For Tutors

MeBio　数学テキスト

3 次, 4 次方程式の解の公式

―群論的解釈で―

Edited by M.Kamei

第 1 章

3 次方程式の解の公式

3 次方程式にはカルダノの公式が存在するが，群論的には 3 次対称群 S_3 が可解群だから巾根表示ができると習う．これを実際にやってみて，カルダノの公式との一致を見よう．

§ 1　記号の定義

目標 1–1–1

$K = \boldsymbol{C}(a,\ b,\ c)$ とおく．ここで a, b, c は不定元である．つまり K は $\boldsymbol{C}$ 係数の a, b, c の有理式の全体であり，$\boldsymbol{C}$ 上超越次元 3 の拡大になっている．

K には 3 次対称群 S_3 が，a, b, c の置換として作用する．S_3 の作用で不変な元は a, b, c の対称式と呼ばれるが，これは基本対称式の有理式で表される．つまり $-p = a+b+c,\ q = ab+bc+ca,\ -r = abc$ とおくと $p,\ q,\ r$ は $\boldsymbol{C}$ 上で代数的に独立で $F = \boldsymbol{C}(p,\ q,\ r)$ が K の S_3 不変な元の全体であり，$Gal(K/F) = S_3$ となっている．

S_3 は可解群であり K は F の巾根拡大で得られる体だから，$a,\ b,\ c$ を F 上で巾根表示しようというのが 3 次方程式の解の公式である．

目標' 1–1–2（文字の節約）

2 次の係数が 0 でないと非常に煩雑になるので，$x^3+qx+r=0$ の解の公式を考えることにしたい．この場合は次のように考える．$R=\boldsymbol{C}[a,\ b,\ c]/(a+b+c)$ とし，K を R の商体とする．

K にはやはり 3 次対称群 S_3 が，a, b, c の置換として作用する．$q=ab+bc+ca,\ -r=abc$ とおくと $q,\ r$ は $\boldsymbol{C}$ 上で代数的に独立で $F=\boldsymbol{C}(q,\ r)$ が K の S_3 不変な元の全体であり，$Gal(K/F)=S_3$ となっている．

3 次交代群 A_3 に対応する中間体 L は $\zeta=(a-b)(b-c)(c-a)$ として $L=F(\zeta)$ である．$\zeta^2\ (=D)$ は対称式だから $q,\ r$ で表示できるはずである．実際に計算してみよう．

$$\begin{aligned} D &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \\ &= \left\{(a+b)^2-4ab\right\}\left\{(b+c)^2-4bc\right\}\left\{(c+a)^2-4ca\right\} \\ &= (c^2-4ab)(a^2-4bc)(b^2-4ca) \\ &= a^2b^2c^2-4(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+16abc(a^3+b^3+c^3)-64a^2b^2c^2 \\ &= -63(abc)^2-4(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+16abc(a^3+b^3+c^3) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc \\ &= -3r \\ a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 &= (ab+bc+ca)\{(ab+bc+ca)^2-3abc(a+b+c)\}+3(abc)^2 \\ &= q^3+3r^2 \end{aligned}$$

を代入すると，$D=-27r^2-4q^3$ が分かる．つまり

$$\zeta=(a-b)(b-c)(c-a)=\pm\sqrt{-4q^3-27r^2}$$

である．

補足 1–1–3　　$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の場合は

$$\zeta = (a-b)(b-c)(c-a) = \pm\sqrt{-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2}$$

である．　　補足終

K/L を Kummer 拡大と考えると，$(a + b\omega + c\omega^2)^3 \in L$ のはずである．計算してみよう．

$$(a + b\omega + c\omega^2)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + b^2c + c^2a)\omega + 3(ab^2 + bc^2 + ca^2)\omega^2$$

ここで次が成り立つことが分かる．

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 9abc \\
&= -9r \\
a^2b + b^2c + c^2a &= \frac{1}{2}\left\{(a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2)\right\} + \frac{1}{2}\left\{(a^2b + b^2c + c^2a) - (ab^2 + bc^2 + ca^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc\} - \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a) \\
&= \frac{1}{2}\left(3r - \sqrt{-4q^3 - 27r^2}\right) \\
ab^2 + bc^2 + ca^2 &= \frac{1}{2}\left\{(a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2)\right\} - \frac{1}{2}\left\{(a^2b + b^2c + c^2a) - (ab^2 + bc^2 + ca^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc\} + \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a) \\
&= \frac{1}{2}\left(3r + \sqrt{-4q^3 - 27r^2}\right)
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
(a + b\omega + c\omega^2)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + b^2c + c^2a)\omega + 3(ab^2 + bc^2 + ca^2)\omega^2 \\
&= -9r + \frac{3}{2}\left(3r - \sqrt{-4q^3 - 27r^2}\right)\omega + \frac{3}{2}\left(3r + \sqrt{-4q^3 - 27r^2}\right)\omega^2 \\
&= \left(-9 + \frac{9}{2}\omega + \frac{9}{2}\omega^2\right)r - \frac{3}{2}\sqrt{-4q^3 - 27r^2}(\omega - \omega^2) \\
&= -\frac{27}{2}r - \frac{3}{2}\sqrt{(-4q^3 - 27r^2)(-3)} \\
&= -\frac{27}{2}r - \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2} \\
a + b\omega + c\omega^2 &= -\sqrt[3]{\frac{27}{2}r + \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2}}
\end{aligned}$$

同様にして $a + b\omega^2 + c\omega = -\sqrt[3]{\frac{27}{2}r - \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2}}$ が得られる．また，$a + b + c = 0$ である．これら 3 式を足すと

$$\begin{aligned}
3a &= -\sqrt[3]{\frac{27}{2}r + \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2}} - \sqrt[3]{\frac{27}{2}r - \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2}} \\
a &= -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r + \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r - \frac{3}{2}\sqrt{12q^3 + 81r^2}}
\end{aligned}$$

が得られる．

また，$3b = (a + b\omega + c\omega^2)\omega^2 + (a + b\omega^2 + c\omega)\omega + (a+b+c)$, $3c = (a + b\omega + c\omega^2)\omega + (a + b\omega^2 + c\omega)\omega^2 + (a+b+c)$

より

$$
\begin{aligned}
b &= -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r+\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}}\omega^2-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r-\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}}\omega \\
c &= -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r+\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}}\omega-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r-\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}}\omega^2
\end{aligned}
$$

が得られる.

§ 2　カルダノの公式との比較

カルダノの公式では 3 次方程式 $x^3+qx+r=0$ は次のように解く.

$q=-3st$, $r=s^3+t^3$ とおく. s^3, t^3 は y の 2 次方程式 $y^2-ry-\dfrac{q^3}{27}=0$ の 2 解なので,

$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt[3]{\frac{r+\sqrt{r^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r+\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}}, \\
t &= \sqrt[3]{\frac{r-\sqrt{r^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{2}r-\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}}
\end{aligned}
$$

と思ってよい.

$x^3+qx+r=x^3+s^3+t^3-3stx=(x+s+t)(x+s\omega+t\omega^2)(x+s\omega^2+t\omega)=0$ より $x=-s-t$, $-s\omega-t\omega^2$, $-s\omega^2-t\omega$ が分かる. これは前節の結果と一致する.

第 2 章

4 次方程式の解の公式

4 次方程式にはフェラーリの公式などが存在するが，群の可解性との関連がわかりにくいものになっている．これもやってみよう．

目標 2–1

$R = \boldsymbol{C}[a,\ b,\ c,\ d]/(a+b+c+d)$ とし，K を R の商体とする．K には 4 次対称群 S_4 が，a, b, c, d の置換として作用する．$p = ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $q = -abc-abd-acd-bcd$, $r = abcd$ とおくと，$p,\ q,\ r$ は $\boldsymbol{C}$ 上で代数的に独立で $F = \boldsymbol{C}(p,\ q,\ r)$ が K の S_4 不変な元の全体であり，$Gal(K/F) = S_4$ となっている．

S_4 は可解群であり K は F の巾根拡大で得られる体だから，$a,\ b,\ c,\ d$ を F 上で巾根表示しようというのが 4 次方程式の解の公式である．

4 次対称群 S_4 の部分群 H を $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$ とすると H は S_4 の正規部分群であり，$S_4/H \cong S_3$ が成り立つ．$\xi_1 = ab+cd$, $\xi_2 = ac+bd$, $\xi_3 = ad+bc$ とおくと $L = F(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ が H に対応する部分体であり，$Gal(L/F) = S_4/H \cong S_3$, $Gal(K/L) = H \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ が成り立つ．

§ 1　拡大 L/F

$x^4+px^2+qx+r=0$ の 4 解が $a,\ b,\ c,\ d$ であり，

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 0, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= p, \\ abc+abd+acd+bcd &= -q, \\ abcd &= r \end{aligned}$$

が成り立っている．

$$\begin{aligned} \xi_1 &= ab+cd, \\ \xi_2 &= ac+bd, \\ \xi_3 &= ad+bc \end{aligned}$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\xi_1+\xi_2+\xi_3 &= ab+ac+ad+bc+bd+cd \\
&= p \\
\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1 &= (ab+cd)(ac+bd)+(ac+bd)(ad+bc)+(ad+bc)(ab+cd) \\
&= (a^2bc+b^2ad+c^2ad+d^2bc)+(a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab)+(a^2bd+b^2ac+c^2bd+d^2ac) \\
&= a^2(bc+cd+db)+b^2(ac+cd+da)+c^2(ab+bd+da)+d^2(ab+bc+ca) \\
&= (a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)-4abcd \\
&= -4abcd \\
&= -4r \\
\xi_1\xi_2\xi_3 &= (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \\
&= (a^3bcd+b^3acd+c^3abd+d^3abc)+(a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2) \\
&= abcd\{(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\} \\
&\quad +\{(abc+abd+acd+bcd)^2-2abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\} \\
&= -2pr+(q^2-2pr) \\
&= q^2-4pr
\end{aligned}
$$

以上により ξ_1, ξ_2, ξ_3 は $X^3-pX-4rX-(q^2-4pr)=0$ の 3 解である．これは前章の方法により巾根表示できることが分かっている．

§ 2　拡大 K/L

$Gal(K/L)=H\cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ なので K は L の元の 2 つのルートの和でかける．（ 2 重根号は必要ない.）
$\eta_1=a+b, \eta_2=c+d$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\eta_1+\eta_2 &= a+b+c+d=0, \\
\eta_1\eta_2 &= (a+b)(c+d)=(ac+bd)+(ad+bc)=\xi_2+\xi_3=-(\xi_1-p)
\end{aligned}
$$

なので，$\eta_1=\sqrt{\xi_1-p}, \eta_2=-\sqrt{\xi_1-p}$ がわかる．このようにして次が分かる．

$$
\begin{array}{ll}
a+b=\sqrt{\xi_1-p} & c+d=-\sqrt{\xi_1-p} \\
a+c=\sqrt{\xi_2-p} & b+d=-\sqrt{\xi_2-p} \\
a+d=\sqrt{\xi_3-p} & b+c=-\sqrt{\xi_4-p}
\end{array}
$$

この根号の偏角の決め方であるが，適当に $a,\ b,\ c,\ d$ を交換することにより $a+b, a+c$ の符号は任意に決めてよいことがわかる．$a+d$ はそれらから次のように決めないといけない．

$a,\ b,\ c,\ d$ は $x^4+px^2+qx+r=0$ の解なので，

$$
x^4+px^2+qx+r=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)
$$

が成り立つ．$x=-a$ を代入すると

$$
a^4+pa^2-qa+r=-2a(-a-b)(-a-c)(-a-d)
$$

となるが，$a^4 + pa^2 + qa + r = 0$ なので左辺は $-2qa$ に等しい．

従って $-2qa = 2a(a+b)(a+c)(a+d)$ より

$$(a+b)(a+c)(a+d) = -q$$

が分かる．$a+b, a+c$ が決まっているときはこれが成り立つように $a+d$ の符号を決める必要がある．

これにより

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}\{(a+b)+(a+c)-(b+c)\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi_1 - p} + \sqrt{\xi_2 - p} + \sqrt{\xi_3 - p}\right) \\
b &= \frac{1}{2}\{(a+b)+(b+d)-(a+d)\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi_1 - p} - \sqrt{\xi_2 - p} - \sqrt{\xi_3 - p}\right) \\
c &= \frac{1}{2}\{(c+d)+(a+c)-(a+d)\} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\xi_1 - p} + \sqrt{\xi_2 - p} - \sqrt{\xi_3 - p}\right) \\
d &= \frac{1}{2}\{(c+d)+(b+d)-(b+c)\} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\xi_1 - p} - \sqrt{\xi_2 - p} + \sqrt{\xi_3 - p}\right)
\end{aligned}$$

が得られる．