For Tutors

MeBio　数学テキスト

定円に接する円

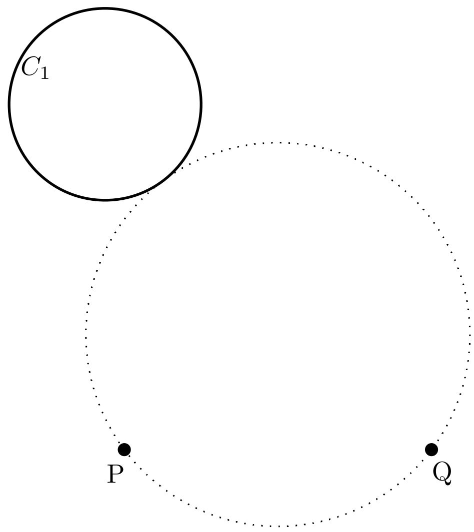
―解答―

Edited by kamei

第 1 章

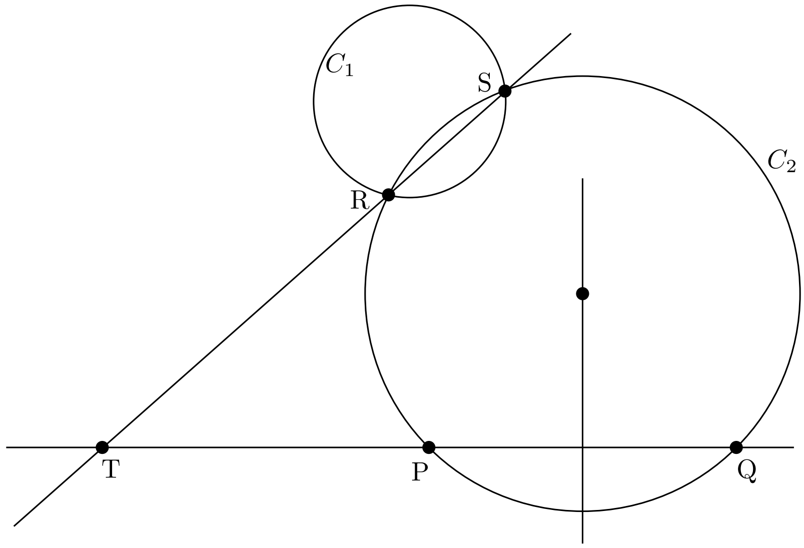
2点を通り1円に接する円

問題 1–1 与えられた定点 P, Q を通り，与えられた定円 C_1 に接する円を，定規とコンパスで作図せよ．

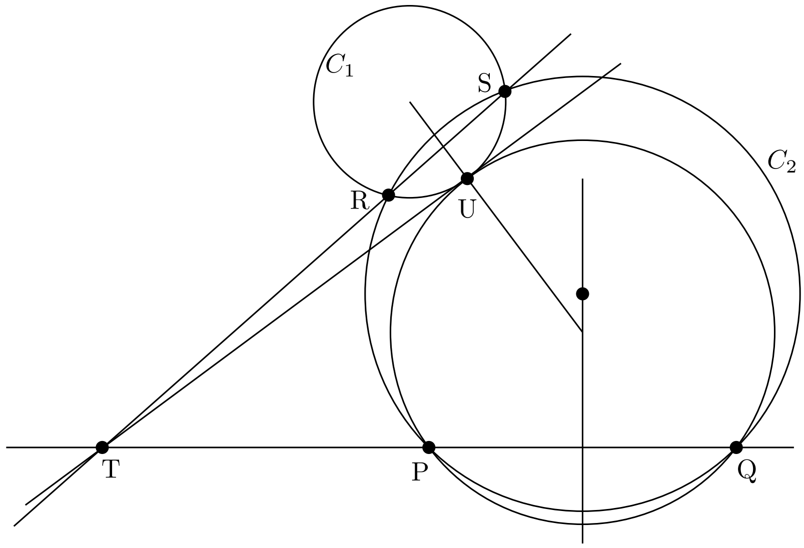


解答

(1)　PQ の垂直二等分線上にうまく中心をとり，P, Q を通って C_1 に交わる円 C_2 を描く．（可能）C_1, C_2 の交点を R, S とし，RS と PQ の交点を T とする．このとき方巾の定理より $\mathrm{TR}\cdot\mathrm{TS}=\mathrm{TP}\cdot\mathrm{TQ}$ が成り立っていることに注意する．



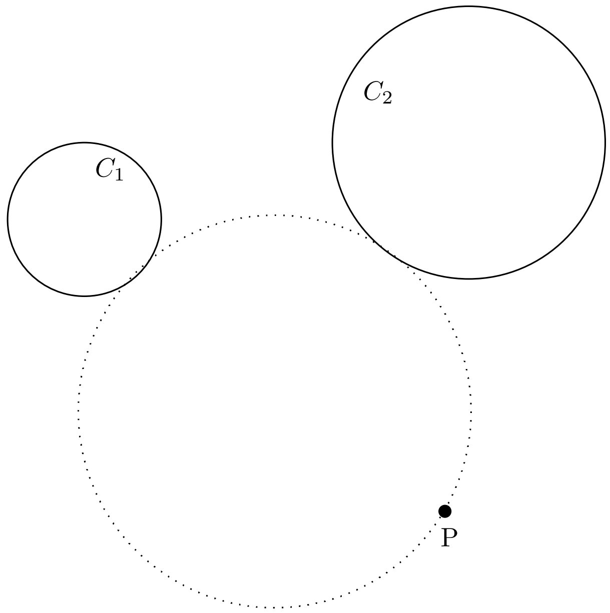
(2)　T を通る C_1 の接線を描き接点を U とする．方巾の定理より $\mathrm{TR}\cdot\mathrm{TS}=\mathrm{TU}^2$ が成り立っている．三点 P, Q, U を通る円 C を描く．C と C_1 は U で接する．つまり C が求める円である．（上の注意により，証明はほぼ済んでいる．）



第 2 章

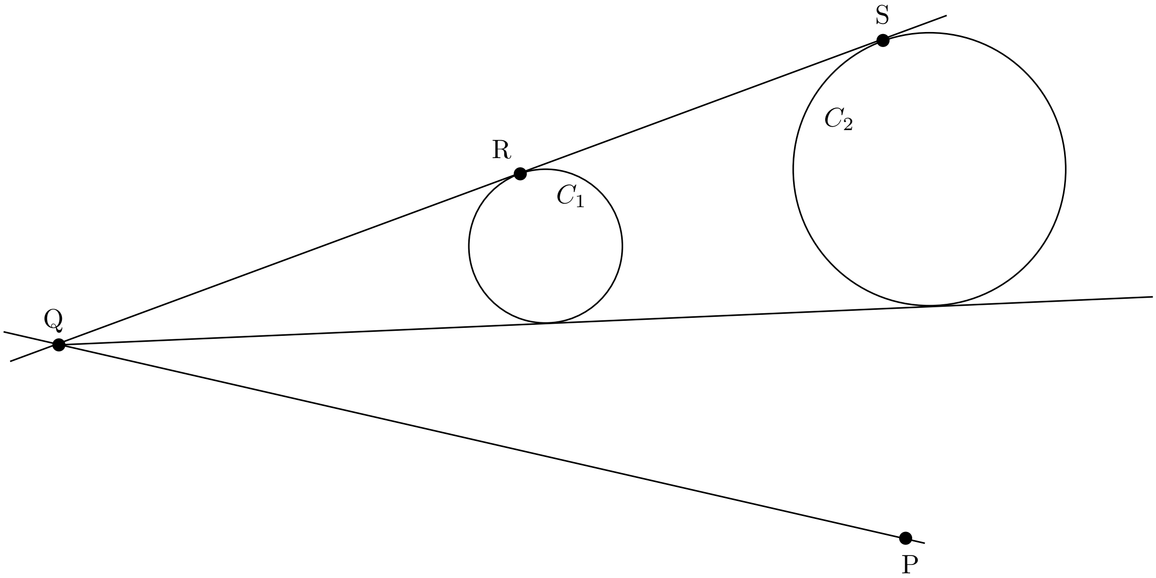
3円に接する円

問題 2–2　与えられた定点 P を通り，与えられた 2 定円 C_1, C_2 に接する円を，定規とコンパスで作図せよ.

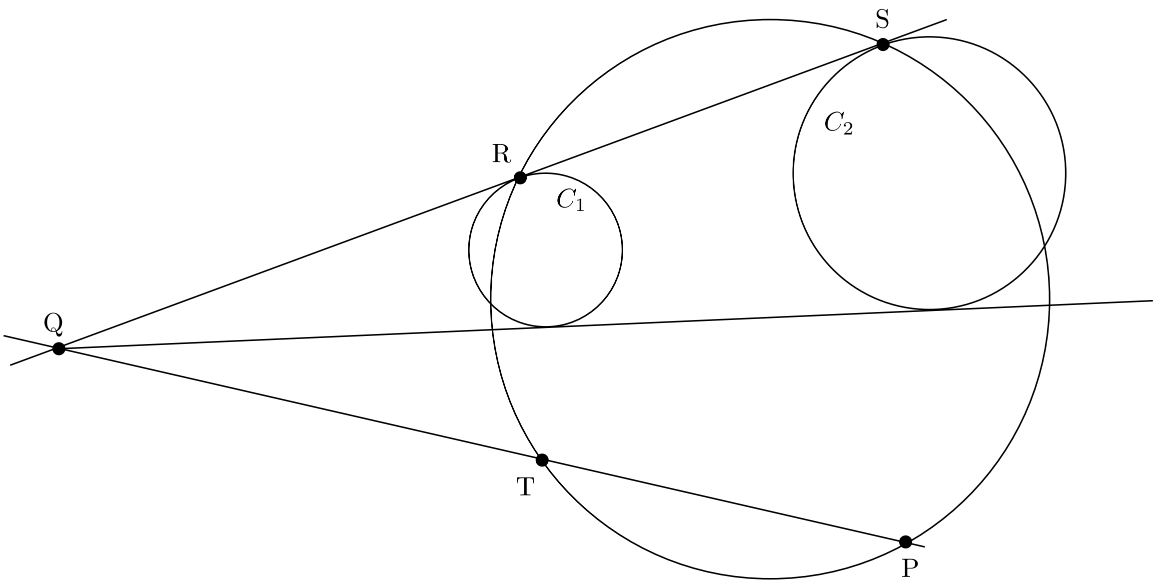


解答

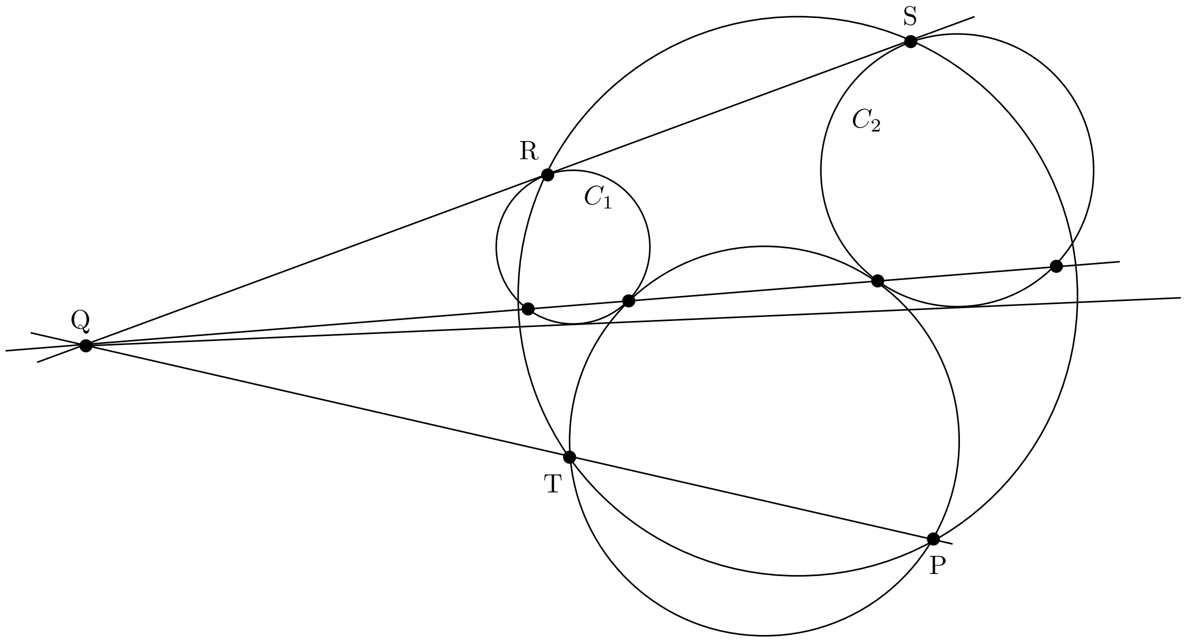
(1)　まず 2 定円の共通接線，および共通接線の交点 Q を作図する．共通接線と C_1 の交点を R, C_2 の交点を S とする．直線 PQ を引く．



(2)　3 点 P, R, S を通る円を描く．この円と直線 PQ の交点を T とする．

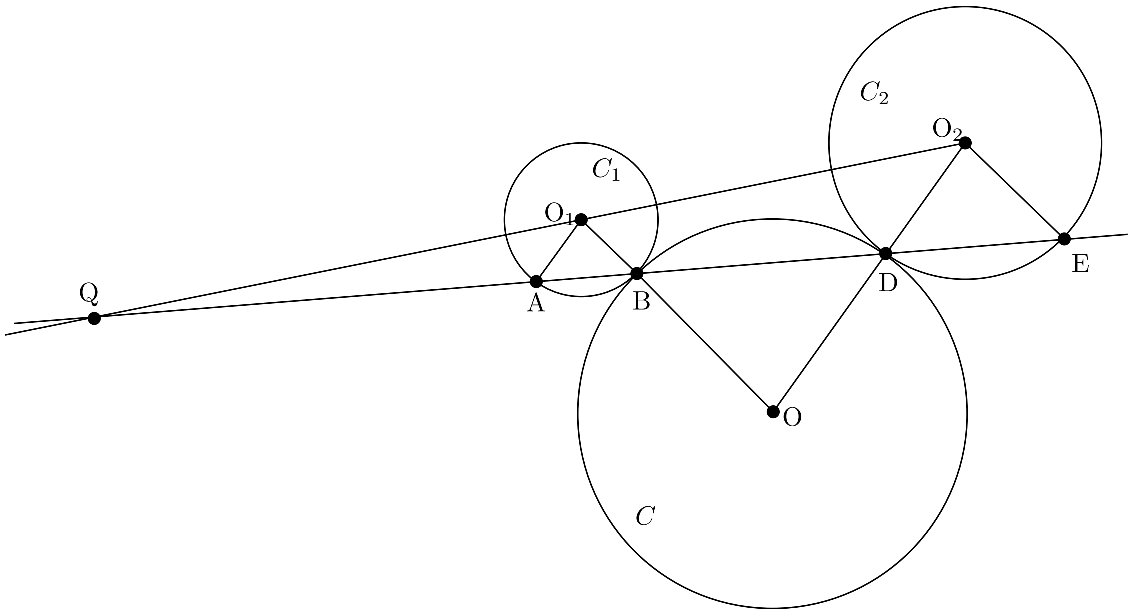


(3)　P, T を通り円 C_1 に接する円を描く．（前章の結果よりこれは可能．）この円が C_2 にも接すること (*1) が証明できる．つまりこれが求める円である．

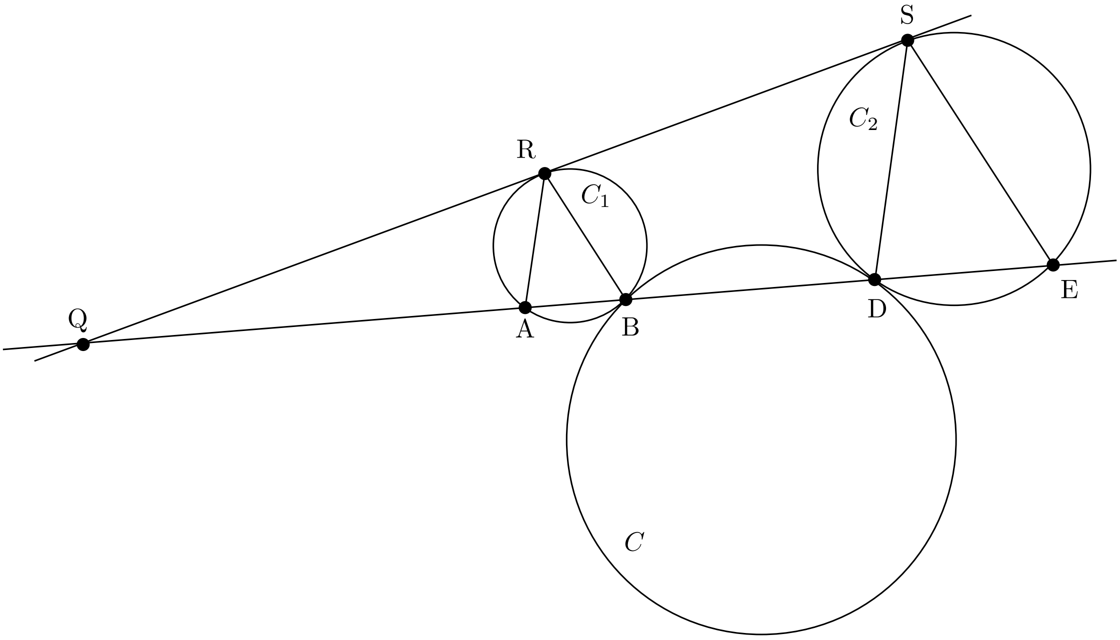


(*1) の証明

図のように円 C が円 C_1, C_2 と点 B, D で接しているとする．$\triangle \mathrm{AO_1B}$, $\triangle \mathrm{BOD}$, $\triangle \mathrm{DO_2E}$ はすべて相似な二等辺三角形であるから，$\triangle \mathrm{QO_1B}$, $\triangle \mathrm{QO_2E}$ は相似で，その相似比は $r_1 : r_2$ である．従って Q は $\mathrm{O_1O_2}$ を $r_1 : r_2$ に外分する点である．つまり共通外接線の交点と分かる．

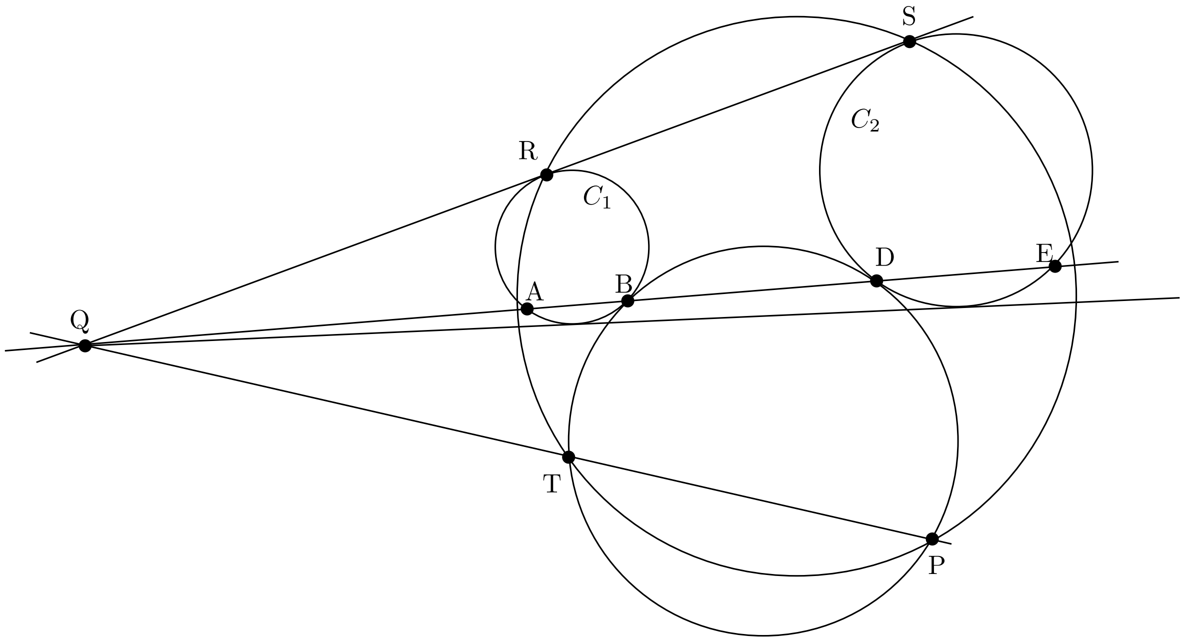


そこで共通外接線を引き接点を R, S とする．△QAR, △QRB, △QDS, △QSE はすべて相似であるから $\mathrm{QB}\cdot\mathrm{QD}=\mathrm{QR}\cdot\mathrm{QS}$ が成り立つ．作図の一意性より B で C_1 に接する円が D を通るなら，その円は D で C_2 にも接するといってよいことがわかる．

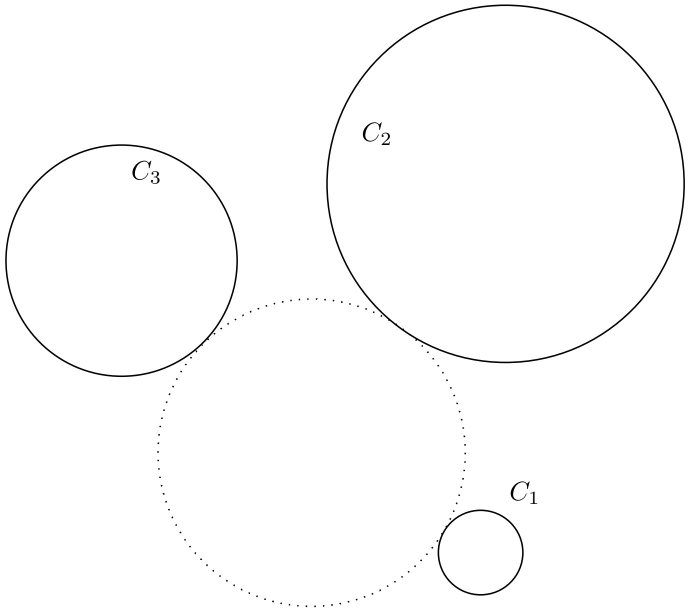


先ほどの解答 (3) の図に戻ると，方巾の定理より $\mathrm{QR}\cdot\mathrm{QS}=\mathrm{QT}\cdot\mathrm{QP}$，また作図した円 C と C_1 の接点を B として QB の延長と円 C_2 の交点を D, E とすると $\mathrm{QB}\cdot\mathrm{QD}=\mathrm{QR}\cdot\mathrm{QS}$.

従って $\mathrm{QB}\cdot\mathrm{QD}=\mathrm{QT}\cdot\mathrm{QP}$ より B, D, T, P は共円であり，円 C は点 D も通るが，この点 D は C と C_2 の接点になっていることが，先ほどの事実よりわかる．



問題 2–3　与えられた 3 定円 C_1, C_2, C_3 に接する円を，定規とコンパスで作図せよ．



$\boxed{\text{解答}}$

C_1, C_2, C_3 の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とする．$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ と仮定してよい．中心はそのままで半径 $r_1 - r_1$, $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$ の円または点を作図する．この 3 つの点または円（少なくとも一つは点）に接する（または通る）円は作図することが出来るが，その中心が 3 円に接する円の中心に一致する．