For Tutors

MeBio　数学テキスト

ランダムウォークについて

Edited by 亀井

第 1 章

問題と結論

§ 1　気になったこと

確率の漸化式の確認テストを探していて，本質的には次と同値な問題を見つけた．

問題 1–1–1

a を 2 以上の自然数とする．動点 P が最初，数直線上の $0 < n < a$ を満たす点 n に存在する．この点 P が整数時刻ごとに確率 p で左，確率 $q\ (= 1 - p)$ で右へ移動する．ただし $0 < p < 1$ である．この動点は原点 O または座標 a の点 A に到達すると停止する．この動点 P が原点 O に到達して停止する確率 p_n を求めよ．ただし $p_0 = 1$, $p_a = 0$ とする．（簡単のため $p \fallingdotseq q$ とする．）

解答

$p_1 = t$ とおく．また $\dfrac{p}{q} = \alpha$ とおく．$1 \leqq n \leqq a - 1$ に対して漸化式 $p_n = p \cdot p_{n-1} + q \cdot p_{n+1}$ が成り立つ．特性方程式は $x = p + qx^2 \iff (qx - p)(x - 1) = 0 \iff x = \alpha,\ 1$ だから，この漸化式を変形して

$$
\begin{array}{lll}
 & p_{n+1} - p_n = \alpha(p_n - p_{n-1}) = \cdots = \alpha^n(p_1 - p_0) = \alpha^n(t - 1) & \cdots ① \\
 & p_{n+1} - \alpha p_n = p_n - \alpha p_{n-1} = \cdots = p_1 - \alpha p_0 = t - \alpha & \cdots ② \\
② - ① \text{ より} & (1 - \alpha)p_n = t - \alpha - \alpha^n(t - 1) & \\
\text{従って} & p_n = \dfrac{t - \alpha}{1 - \alpha} + \dfrac{1 - t}{1 - \alpha}\alpha^n & \cdots ③
\end{array}
$$

$p_a = 0$ であるから $(t - \alpha) + (1 - t)\alpha^a = 0$ つまり $t = \dfrac{\alpha - \alpha^a}{1 - \alpha^a}$ である．これを代入し直して $p_n = \dfrac{\alpha^n - \alpha^a}{1 - \alpha^a}$ を得る．（解答終）

この問題から点 A での停止条件を取り除くとどうなるだろうか，というのが気になったのである．$p = q = \dfrac{1}{2}$ のとき一次元のランダムウォークが再帰的であることはよく知られている．つまり $p_n = 1$ である．そうであれば $p > q$ のときも $p_n = 1$ であろう．しかし $p < q$ の場合は $p_n = 1$ とはとうてい思われない．($p = 0.01$, $q = 0.99$ の場合に $n = 10$ の点から原点に来るのはほぼ不可能と思われる．)

p_n を α の関数として表した場合，このように場合分け的な結果が出るのは不思議であるし（実は他愛ない理由であるが），そもそも上の解法のような漸化式からは答が決まらないのである．そのあたりの事情の説明と，実際に p_n を求める方法についてまとめてみた．

§ 2　改めて問題設定

問題 1–2–1

動点 P が最初，数直線上の $0 < n$ を満たす点 n に存在する．この点 P が整数時刻ごとに確率 p で左，確率 $q\ (= 1 - p)$ で右へ移動する．ただし $0 < p < 1$ である．この動点は原点 O に到達すると停止する．この動点 P が原点 O に到達して停止する確率 p_n を求めよ．ただし $p_0 = 1$ とする．（簡単のため $p \fallingdotseq q$ とする．）

（問題終）

上の設定でも漸化式 $p_n = p \cdot p_{n-1} + q \cdot p_{n+1}$ が成り立つ．従って $p_1 = t$, $\dfrac{p}{q} = \alpha$ とすると，一般項が $p_n = \dfrac{t - \alpha}{1 - \alpha} + \dfrac{1 - t}{1 - \alpha}\alpha^n$ で与えられることがわかる．

命題 1–2–2　　$\alpha > 1$ のとき $p_n = 1$ である．

（証明）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$ であるから $0 \leqq p_n \leqq 1$ であるためには $t = 1$ でなければならない．このとき $p_n = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1-1}{1-\alpha}\alpha^n = 1$ である．

（証明終）

$\alpha < 1$ のときは $\{\alpha^n\}$ は単調減少で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ だから，$0 \leqq p_n \leqq 1$ を満たすための必要条件として得られるのは $\alpha \leqq t \leqq 1$ だけである．感覚的には $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ であろうと思われるので，それを認めると $t = \alpha$ ということになる．これを代入すると $p_n = \dfrac{\alpha-\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha}\alpha^n = \alpha^n$ が得られる．

この結果は実際に正しいのだが，これでは厳密な証明になっていない．また α の大小によって場合分け的な答えが出るのかもしっくりいかない．以下の節で厳密な証明をしてみよう．

§ 3　p_1 の決定

$p_1 = t$ の値が決定できれば一般項 p_n は決まる．そのために p_1 を級数表示することを考えよう．

$n = 1$ から原点にたどり着くのは奇数回目に限る．$2k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 回目に初めて原点にたどり着くためには，左 $k+1$ 個，右 k 個を，$2k$ 回目までは常に左に移動した回数が右に移動した回数を超えず，最後の $2k+1$ 回目に左に移動するようにしなければいけない．その移動方法の総数は，カタラン数 $C_k = \dfrac{1}{k+1}\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}$ である．

これは $(0,\ 0)$ から $(n,\ n)$ まで常に $x \geqq y$ を満たしながら移動する方法として $\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2k \\ k-1 \end{pmatrix}$ と考えることも出来るし，$2 \times k$ のヤング図形の標準盤の個数として鉤公式から求めることも出来る．

以上より次がわかった．

命題 1–3–1

$\displaystyle p_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} p^{k+1}q^k$ と級数表示される．

（命題終）

命題 1–3–2
次のようなカタラン数の母関数表示がある．

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}x^{k+1}$$

（証明）
二項級数展開により

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\{1+(-4x)\}^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\k\end{pmatrix}(-4x)^k$$

ここで

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\k\end{pmatrix}(-4x)^k &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-4x)^k\\
&= \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{k!}(2x)^k\\
&= \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\cdots\cdot(2k-1)\cdot2k}{(2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2k)k!}(2x)^k\\
&= \frac{(2k)!}{k!k!}x^k\\
&= \begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}x^k
\end{aligned}$$

従って $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}x^k$ がわかった．この両辺を定積分する．

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\,dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}t^k\,dt\\
\Rightarrow\ &\left[-\frac{(1-4t)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]_0^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}x^{k+1}\\
\Rightarrow\ &\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}x^{k+1}
\end{aligned}$$

（命題終）

系 1–3–3

$p_1 = \begin{cases} 1 & (p > q \text{ のとき}) \\ \dfrac{p}{q} & (p < q \text{ のとき}) \end{cases}$　が成り立つ.

（証明）

命題 1–3–1, 命題 1–3–2 より

$$p_1 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} (pq)^k = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q}$$

ここで $p+q=1$ であるから $\dfrac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q} = \dfrac{(p+q)-\sqrt{(p+q)^2-4pq}}{2q} = \dfrac{(p+q)-|p-q|}{2q}$.

これより題意の成立することがわかる.　（証明終）

結論 1–3–4

$p_n = \begin{cases} 1 & (p > q \text{ のとき}) \\ \left(\dfrac{p}{q}\right)^n & (p < q \text{ のとき}) \end{cases}$　が成り立つ.

（結論終）