

MeBio 数学テキスト

# 新家さんの問題

—問題のみ—

# 第 1 章

## 問題たち

メビオで同僚だった新家さんに聞いた問題です。(解答は亀井のものです。) 大変に興味深い問題ばかりです。

### § 1 問題たち

#### 問題 1-1-1

- (1) 関数  $f(x) = \cos(\pi x)$   $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$  において,  $x$  と  $f(x)$  の両方が有理数となるような  $x$  の値をすべて求めよ.
- (2)  $\sin(\pi x)$  の場合について同様の問に答えよ.
- (3)  $\tan(\pi x)$  の場合について同様の問に答えよ.

#### 問題 1-1-2

- (1) 2つの立方体サイコロを振ったときの確率分布と同じ確率分布を与える2つの立方体サイコロの目のパターンをすべて求めよ.
- (2) 3つ以上の立方体サイコロを振った場合についての同様の問いに答えよ.
- (3) 他の正多面体サイコロについて同様の問いに答えよ.

#### 問題 1-1-3 単位球面に内接する四面体の体積を6つの辺の長さで表せ.

別問題 四面体の体積を6つの辺の長さで表せ.

#### 問題 1-1-4 余弦定理の拡張

四面体の各面を  $0, 1, 2, 3$  とし, 面  $i$  の面積を  $S_i$ , 面  $i, j$  のなす角を  $\theta_{ij}$  とすると,

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2(S_1 S_2 \cos \theta_{12} + S_2 S_3 \cos \theta_{23} + S_3 S_1 \cos \theta_{31})$$

が成り立つことを示せ.

#### 問題 1-1-5 すべての自然数は高々4つの平方数の和で表されることを証明せよ.

問題 1-1-6  $\frac{2^n + 1}{n^2}$  が整数となるような 1 より大きい整数  $n$  をすべて求めよ.

問題 1-1-7 凸  $n$  角形  $A_1A_2 \cdots A_n$  の内部に一点  $P$  をとる. このとき  $n$  個の角  $\angle PA_1A_2, \angle PA_2A_3, \dots, \angle PA_nA_1$  のうち, 少なくとも一つは  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$  以下であることを示せ.

問題 1-1-8 自然数の  $k$  乗数和の公式に表れる多項式を  $S_k(x)$  とする.

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

$k$  が奇数のとき  $S'_k(x) = kS_{k-1}(x)$  となることを示せ. ただし,  $S'_k(x)$  は  $S_k(x)$  の導関数とする.