For Tutors

MeBio　数学テキスト

京都大学大学院物理学専攻
199？ 年入試問題III–1

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

いくつかの物理系において次の N 次元積分が現れる．

$$Z_N(g)=\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_N[\Delta(x_1,\ \cdots,\ x_N)]^2\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}V(x_i)\right) \tag{A}$$

ここで $\Delta(x_1,\ \cdots,\ x_N)$ は Vandermonde 行列式

$$\Delta(x_1,\ \cdots,\ x_N)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{N-1} & {x_2}^{N-1} & \cdots & {x_N}^{N-1} \end{vmatrix}$$

であり，$V(x)$ は

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{g}{4}x^4\quad\text{（ただし，}g>0\text{）}$$

で与えられる．

さて，この積分を評価するために，次の性質を満たす直交多項式 $P_n(x)$ を定義しよう．

$P_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ は x について n 次の多項式であり，次の 2 条件を満足する．

1. (正規化条件) $P_n(x)$ の最高次のべき x^n の係数は 1．即ち $P_n(x)=x^n+\sum_{j=0}^{n-1}a_{nj}x^j$ と展開される．
2. (直交性) $n\neq m$ について $\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp(-V(x))P_n(x)P_m(x)=0$.

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 正規化条件を用いると Vandermonde 行列式は P_n を用いて以下のように書き換えられることを示せ．

$$\Delta(x_1,\ \cdots,\ x_N)=\begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_N) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_N) \\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & \cdots & P_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N-1}(x_1) & P_{N-1}(x_2) & \cdots & P_{N-1}(x_N) \end{vmatrix}$$

(2) $P_n(x)$ のノルムを s_n とする[1]．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-V(x)) P_n(x) P_n(x) = s_n.$$

このとき積分 (A) は次のように書けることを証明せよ．

$$Z_N(g) = N! \prod_{k=0}^{N-1} s_k.$$

(3) P_n の間に次の漸化式が成立することを証明せよ．

$$x P_n(x) = P_{n+1}(x) + r_n P_{n-1}(x) \quad \left(r_n = \frac{s_n}{s_{n-1}} \right).$$

(ヒント：まず展開式,

$$\begin{aligned} & x P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_{n,i} P_i(x), \\ & c_{n,n+1} = 1, \\ & c_{n,i} = {s_i}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-V(x)) P_n(x) x P_i(x), \end{aligned}$$

を証明し $c_{n,i}$ を各 $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$ について評価せよ．)

(4) 次に積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-V(x)) \frac{dP_n(x)}{dx} P_n(x)$$

を[2] 二通りに評価することにより次の漸化式を証明せよ．

$$r_n + g r_n (r_{n-1} + r_n + r_{n+1}) = n.$$

[1] ノルムの 2 乗の間違いと思われる．

[2] $\dfrac{dP_n(x)}{dx}$ は $\dfrac{dP_{n-1}(x)}{dx}$ の間違いだと思われる．

第 2 章

解答

§ 1　(1) の解答

掃き出し法を考えるとほぼ明らかであるが，次のように答えてもよい．

$$
\begin{pmatrix}
P_0(x_1) & P_0(x_2) & P_0(x_3) & \cdots & P_0(x_N) \\
P_1(x_1) & P_1(x_2) & P_1(x_3) & \cdots & P_1(x_N) \\
P_2(x_1) & P_2(x_2) & P_2(x_3) & \cdots & P_2(x_N) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
P_{N-1}(x_1) & P_{N-1}(x_2) & P_{N-1}(x_3) & \cdots & P_{N-1}(x_N)
\end{pmatrix} \tag{2.1}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{10} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{20} & a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{N0} & a_{N1} & a_{N3} & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\
{x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_N}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
{x_1}^{N-1} & {x_2}^{N-1} & {x_3}^{N-1} & \cdots & {x_N}^{N-1}
\end{pmatrix} \tag{2.2}
$$

(2.2) の左側の行列は下三角行列で，その行列式の値は 1 だから題意は成り立つ．

§ 2　(2) の解答

数学的帰納法で示そう．行列 (2.1) の $(N,\ k)$ 余因子を Δ_k とする．つまり

$$
\Delta_k = \det \begin{pmatrix}
P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_{k-1}) & P_0(x_{k+1}) & \cdots & P_0(x_N) \\
P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_{k-1}) & P_1(x_{k+1}) & \cdots & P_1(x_N) \\
P_2(x_1) & P_2(x_2) & \cdots & P_2(x_{k-1}) & P_2(x_{k+1}) & \cdots & P_2(x_N) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
P_{N-2}(x_1) & P_{N-2}(x_2) & \cdots & P_{N-2}(x_{k-1}) & P_{N-2}(x_{k+1}) & \cdots & P_{N-2}(x_N)
\end{pmatrix} \tag{2.3}
$$

$$
= \Delta(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \cdots,\ x_N) \tag{2.4}
$$

である．このとき

$$
Z_{N-1}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} * (\Delta_k)^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} * V(x_i)\right) \tag{2.5}
$$

ただし，積分 $\int *$ およびシグマ $\sum *$ は x_k に関する部分を除くものとする．

行列式の定義より

$$\Delta(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N) = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{N+k}\Delta_k P_{N-1}(x_k) \tag{2.6}$$

であるから

$$\begin{aligned} & Z_N(g) && (2.7) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \left(\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N+k}\Delta_k P_{N-1}(x_k)\right)\left(\sum_{l=1}^{N}(-1)^{N+l}\Delta_l P_{N-1}(x_l)\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}V(x_i)\right) && (2.8) \end{aligned}$$

ここで $k \fallingdotseq l$ のとき Δ_l の展開式に表れる x_k を含む多項式はすべて $P_m(x_k)$ $(m \fallingdotseq N-1)$ の形をしているので $\int_{\infty}^{\infty} dx_k \exp(-V(x_k))P_{N-1}(x_k)\Delta(l) = 0$ である．従って

$$\begin{aligned} & Z_N(g) && (2.9) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \left(\sum_{k=1}^{N}(-1)^{2N+2k}\Delta_k P_{N-1}(x_k)\Delta_k P_{N-1}(x_k)\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}V(x_i)\right) && (2.10) \\ = & \sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} dx_k \exp(-V(x_k))\left(P_{N-1}(x_k)\right)^2 \times Z_{N-1}(g) && (2.11) \\ = & \sum_{k=1}^{N} s_{N-1} \times Z_{N-1}(g) && (2.12) \\ = & N \times s_{N-1} \times Z_{N-1}(g) && (2.13) \end{aligned}$$

帰納法の仮定より $Z_{N-1}(g) = (N-1)!\prod_{k=0}^{N-2} s_k$ であるから，$Z_N(g) = N \times s_{N-1} \times (N-1)!\prod_{k=0}^{N-2} s_k = N!\prod_{k=0}^{N-1} s_k$ となり，証明できた．

§ 3　(3) の解答

証明の便宜のため，多項式環 $\mathbb{R}[x]$ に次のように内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を導入して Hilbert 空間と見なす．

$$\langle f(x),\ g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)} f(x) g(x)\ dx \tag{2.14}$$

収束性，線形性，正定値性などは容易に確認される．$f(x)$ のノルムは

$$\| f(x) \| = \sqrt{\langle f(x),\ f(x)\rangle}$$

で定義される．また $\langle f(x)g(x),\ h(x)\rangle = \langle f(x),\ g(x)h(x)\rangle$ である．これは以下で頻繁に使われる．

$N-1$ 次以下の多項式は $\mathbb{R}$ 上の N 次元ベクトル空間であり，$P_0(x),\ P_1(x),\ \cdots,\ P_{N-1}(x)$ は上の内積に関して直交基底になっている．（正規直交基底ではない．）　k 次多項式は $P_0(x),\ P_1(x),\ \cdots,\ P_k(x)$ の線形和で表される

から，$P_n(x)$ は次数 n 未満のすべての多項式と直交することがわかる．また x^n との内積は s_n である．

さて，$xP_n(x) = x^{n+1} + (\text{lower})$ であるから $P_0(x)$, $\cdots$, $P_n(x)$ の線形和で表される．

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_{n,n}P_n(x) + c_{n,n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + c_{n,0}P_0(x) \tag{2.15}$$

これと $P_n(x)$ との内積を考える [1]．

$$\begin{aligned}
\langle xP_n(x),\ P_n(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)} xP_n(x)P_n(x)\ dx & (2.16)\\
&= 0\ \ (\because\ \text{被積分関数は奇関数}) & (2.17)\\
\langle\ \text{右辺},\ P_n(x)\rangle &= c_{n,n}s_n & (2.18)\\
\therefore c_{n,n} &= 0 & (2.19)
\end{aligned}$$

次に $P_{n-1}(x)$ との内積を考える．

$$\begin{aligned}
\langle xP_n(x),\ P_{n-1}(x)\rangle &= \langle P_n(x),\ xP_{n-1}(x)\rangle & (2.20)\\
&= \langle P_n(x),\ x^n + \text{lower}\rangle & (2.21)\\
&= s_n & (2.22)\\
\langle\ \text{右辺},\ P_{n-1}(x)\rangle &= c_{n,n-1}s_{n-1} & (2.23)\\
\therefore c_{n,n-1} &= \frac{s_n}{s_{n-1}} & (2.24)
\end{aligned}$$

$P_k(x)$ $(k \leqq n-2)$ との内積を考える．

$$\begin{aligned}
\langle xP_n(x),\ P_k(x)\rangle &= \langle P_n(x),\ xP_k(x)\rangle & (2.25)\\
&= \langle P_n(x),\ (n-1)\ \text{次以下}\ \rangle & (2.26)\\
&= 0 & (2.27)\\
\langle\ \text{右辺},\ P_k(x)\rangle &= c_{n,k}s_k & (2.28)\\
\therefore c_{n,k} &= 0 & (2.29)
\end{aligned}$$

以上により $xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \dfrac{s_n}{s_{n-1}}P_{n-1}(x)$ が証明された．

§ 4　(4) の解答

後述するが，問題文通りの誘導に従うと証明が大変回りくどくなってしまう．どう考えても不自然だったので，誘導を無視して自然な解法を考えてみた．次のようにすると，目標とする漸化式が素直に得られる．

$e^{-V(x)}P_{n-1}(x)P(x)$ を x で微分すると次のようになる．

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{-V(x)}P_{n-1}(x)P(x)\right\} \tag{2.30}$$

$$= -(x+gx^3)e^{-V(x)}P_{n-1}(x)P_n(x) + e^{-V(x)}\frac{d}{dx}P_{n-1}(x)P_n(x) + e^{-V(x)}P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}P_n(x) \tag{2.31}$$

これより次を得る．

[1] n が偶数のとき $P_n(x)$ は偶関数，n が奇数のとき $P_n(x)$ は奇関数であることが容易に証明される，

$$\begin{aligned}
& \left[e^{-V(x)}P_{n-1}(x)P(x)\right]_{-\infty}^{\infty} && (2.32)\\
= \quad & -\int_{-\infty}^{\infty}(x+gx^3)e^{-V(x)}P_{n-1}(x)P_n(x)\ dx && (2.33)\\
& +\int_{-\infty}^{\infty}e^{-V(x)}\frac{d}{dx}P_{n-1}(x)P_n(x)\ dx && (2.34)\\
& +\int_{-\infty}^{\infty}e^{-V(x)}P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}P_n(x)\ dx && (2.35)
\end{aligned}$$

(2.32) は 0 である．(2.33) を次のように変形する．

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty}(x+gx^3)e^{-V(x)}P_{n-1}(x)P_n(x)\ dx && (2.36)\\
= \quad & \langle xP_{n-1}(x),\ P_n(x)\rangle + g\left\langle x^2P_{n-1}(x),\ xP_n(x)\right\rangle && (2.37)
\end{aligned}$$

$xP_{n-1}(x) = x^n + (\text{lower})$ だから，第一項は $\langle xP_{n-1}(x),\ P_n(x)\rangle = s_n = r_n s_{n-1}$ である．

第二項については

$$\begin{aligned}
& \left\langle x^2P_{n-1}(x),\ xP_n(x)\right\rangle && (2.38)\\
= \quad & \langle x(P_n(x)+r_{n-1}P_{n-2}(x)),\ P_{n+1}(x)+r_nP_{n-1}(x)\rangle && (2.39)\\
= \quad & \langle xP_n(x),\ P_{n+1}(x)\rangle + r_n\langle xP_n(x),\ P_{n-1}(x)\rangle + r_{n-1}\langle xP_{n-2}(x),\ P_{n+1}(x)\rangle && (2.40)\\
& +r_{n-1}r_n\langle xP_{n-2}(x),\ P_{n-1}(x)\rangle && (2.41)\\
= \quad & s_{n+1} + r_n\langle P_n(x),\ xP_{n-1}(x)\rangle + r_{n-1}\cdot 0 + r_{n-1}r_ns_{n-1} && (2.42)\\
= \quad & s_{n+1} + r_ns_n + r_{n-1}r_ns_{n-1} && (2.43)\\
= \quad & r_{n+1}r_ns_{n-1} + {r_n}^2s_{n-1} + r_{n-1}r_ns_{n-1} && (2.44)
\end{aligned}$$

従って (2.33) は $r_ns_{n-1} + gr_n(r_{n+1}+r_n+r_{n-1})s_{n-1}$ である．

(2.34) は次のように計算される．

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty}e^{-V(x)}\frac{d}{dx}P_{n-1}(x)P_n(x)\ dx && (2.45)\\
= \quad & \left\langle \frac{d}{dx}P_{n-1}(x),\ P_n(x)\right\rangle && (2.46)\\
= \quad & \left\langle (n-1)x^{n-2}+\text{lower},\ P_n(x)\right\rangle && (2.47)\\
= \quad & 0 && (2.48)
\end{aligned}$$

(2.35) は次のように計算される．

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty}e^{-V(x)}P_{n-1}(x)\frac{d}{dx}P_n(x)\ dx && (2.49)\\
= \quad & \left\langle P_{n-1}(x),\ \frac{d}{dx}P_n(x)\right\rangle && (2.50)\\
= \quad & \left\langle P_{n-1}(x),\ nx^{n-1}+\text{lower}\right\rangle && (2.51)\\
= \quad & ns_{n-1} && (2.52)
\end{aligned}$$

結局 (2.32)〜(2.35) は次のようになる．

$$0 = -r_n s_{n-1} - g r_n (r_{n+1} + r_n + r_{n-1}) s_{n-1} + 0 + n s_{n-1} \tag{2.53}$$

これより $r_n + g r_n (r_{n+1} + r_n + r_{n-1}) = n$ が証明された.

§ 5　(4) の回りくどい解答

そのまま誘導に従うと次のようになる.

$$\begin{aligned}
& 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)} \frac{dP_n(x)}{dx} x P_n(x)\ dx && (2.54)\\
= \ & \left[\left(e^{-V(x)}x\right)(P_n(x))^2\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(xe^{-V(x)}\right)(P_n(x))^2\ dx && (2.55)\\
= \ & -\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-V(x)} - x(x+gx^3)e^{-V(x)}\right)(P_n(x))^2\ dx && (2.56)
\end{aligned}$$

(2.54) は

$$\begin{aligned}
& 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)} \frac{dP_n(x)}{dx} x P_n(x)\ dx && (2.57)\\
= \ & 2\left\langle \frac{dP_n(x)}{dx},\ xP_n(x)\right\rangle && (2.58)\\
= \ & 2\left\langle nx^{n-1} + (\mathrm{lower}),\ P_{n+1}(x) + r_n P_{n-1}(x)\right\rangle && (2.59)\\
= \ & 2n r_n s_{n-1} && (2.60)\\
= \ & 2n s_n && (2.61)
\end{aligned}$$

(2.56) は

$$\begin{aligned}
= \ & -\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-V(x)} - x(x+gx^3)e^{-V(x)}\right)(P_n(x))^2\ dx && (2.62)\\
= \ & -\langle P_n(x),\ P_n(x)\rangle + \langle xP_n(x),\ xP_n(x)\rangle + g\left\langle x^2P_n(x),\ x^2P_n(x)\right\rangle && (2.63)\\
= \ & -s_n + \parallel P_{n+1}(x) + r_nP_{n-1}(x) \parallel^2 + g \parallel x(P_{n+1}(x) + r_nP_{n-1}(x)) \parallel^2 && (2.64)\\
= \ & -s_n + s_{n+1} + {r_n}^2 s_{n-1} + g \parallel P_{n+2}(x) + r_{n+1}P_n(x) + r_n(P_n(x) + r_{n-1}P_{n-2}(x)) \parallel^2 && (2.65)\\
= \ & -s_n + s_{n+1} + {r_n}^2 s_{n-1} + g(s_{n+2} + (r_{n+1}+r_n)^2 s_n + {r_n}^2 r_{n-1}^2 s_{n-2}) && (2.66)\\
= \ & -s_n + r_{n+1}s_n + r_n s_n + g(r_{n+2}r_{n+1}s_n + (r_{n+1}+r_n)^2 s_n + r_n r_{n-1} s_n) && (2.67)
\end{aligned}$$

(2.61), (2.67) を比較し s_n で割ると次を得る.

$$n + (n+1) = r_n + r_{n+1} + g r_n (r_{n-1} + r_n + r_{n+1}) + g r_{n+1}(r_n + r_{n+1} + r_{n+2}) \tag{2.68}$$

これは示したい漸化式の連続二項の和になっている. これから単独の漸化式を導くためには, 一番最初の漸化式 $1 = r_1 + g r_1 (r_0 + r_1 + r_2)$ だけを示せばよい. そのためには $P_2(x)$ までを調べておく必要がある.

$t_n = \langle x^n,\ x^n\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)} x^{2n}\ dx$ と置く. $P_0(x) = 1$ だから $s_0 = \langle P_0(x),\ P_0(x)\rangle = \langle 1,\ 1\rangle = t_0$ である. また $P_1(x) = x$ だから $s_1 = \langle P_1(x),\ P_1(x)\rangle = \langle x,\ x\rangle = t_1$ である.

$P_2(x) = x^2 + ax + b$ と置く．$0 = \langle P_2(x),\ P_0(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)}(x^2+ax+b)\,dx = t_1 + bt_0$ より $b = -\frac{t_1}{t_0} = -\frac{s_1}{s_0}$ である．また $0 = \langle P_2(x),\ P_1(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)}(x^3+ax^2+bx)\,dx = bt_1$ より $a = 0$ である．つまり $P_2(x) = x^2 - \frac{s_1}{s_0}$ がわかった．

これより

$$t_2 = \langle x^2,\ x^2\rangle = \left\langle P_2(x) - \frac{s_1}{s_0}P_0(x),\ P_2(x) - \frac{s_1}{s_0}P_0(x)\right\rangle = s_2 + \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2 s_0 \tag{2.69}$$

一方で

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(x)}\,dx &(2.70)\\ &= \left[xe^{-V(x)}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x(x+gx^3)e^{-V(x)}\,dx &(2.71)\\ &= t_1 + gt_2 &(2.72)\end{aligned}$$

t に関するこの関係式を s の関係式に書き直す．

$$\begin{aligned} & t_0 = t_1 + gt_2 &(2.73)\\ \Longleftrightarrow\quad & s_0 = s_1 + g\left(s_2 + \frac{{s_1}^2}{s_0}\right) &(2.74)\\ \Longleftrightarrow\quad & s_0 = r_1 s_0 + g\left(r_2 r_1 s_0 + {r_1}^2 s_0\right) &(2.75)\\ \Longleftrightarrow\quad & 1 = r_1 + gr_1\left(r_2 + r_1\right) &(2.76)\end{aligned}$$

$r_0 = 0$ だから最初の漸化式が証明できた．