

MeBio 数学テキスト

大川内さんの問題

— 亀井の解答 —

第 1 章

大川内さんの問題

§ 1 問題

問題 1-1-1 p_1, p_2, \dots, p_n を異なる n 個の素数とすると、 $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$ であることを示せ。

解答

$F = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n})$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$ とおく. $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ である. $\alpha = \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}$ に対するガロア群の作用を考えると,

$$\alpha^\sigma = \alpha \iff \sigma = e$$

が分かるので, $\text{Gal}(K/F) = \{e\}$ つまり $F = K$ である.

証明終わり

というわけで $\sqrt{5} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ が成り立つことが分かったが, 具体的に $\sqrt{5}$ は $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ を使ってどのように表されるのだろうか.

$G = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbf{Q})$, $H = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbf{Q}(\sqrt{5}))$ とする. もちろん $H \subset G$ と考えている. ここで α の F 上の定義多項式を考える.

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{\sigma \in H} (x - \alpha^\sigma) \\ &= (x - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

当然のことながら $f(x) \in F[x]$ であるが, $f(x) \notin \mathbf{Q}[x]$ も分かる. つまり係数に $\sqrt{5}$ が残る. 実際に計算すると, $f(x) = (x^4 + 20x^2 - 24) - 4x^3\sqrt{5}$ になっている. $f(x) = 0$ は $x = \alpha$ を解に持つので $(\alpha^4 + 20\alpha^2 - 24) - 4\alpha^3\sqrt{5} = 0$ が成り立つ. 従って $\sqrt{5} = \frac{\alpha^4 + 20\alpha^2 - 24}{4\alpha^3}$ である. (Excel で数値計算チェック済み.) もちろん有理化して分母のない形で表すこともできる.

この議論は一般的に成り立ちますが, 書くのが面倒なのでやめます. 見当は付くと思います.

演習 1-1-2 $\sqrt{7}$ を $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ の有理式で表せ.

解答

$$\sqrt{7} = \frac{x^8 + 156x^6 - 418x^4 - 5972x^2 - 215}{8x^7 + 152x^5 - 1448x^3 - 1080x} \text{ など. 表し方は一意的ではない. (この計算は大川内さんによる.)}$$

演習 1-1-3 $\sqrt{5}$ を $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ の整式で表せ.

解答

次数に制限がなければ解は無限にあるが, 7次以下の整式だと一通りであり, それは次の通り.

$$\sqrt{5} = \frac{5}{576}x^7 - \frac{97}{288}x^5 + \frac{95}{36}x^3 - \frac{53}{12}x$$

分母に表れる数の原因は,

$$\mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}] \supset \mathbf{Z}[\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}]$$

の index の差である.