For Tutors

MeBio　数学テキスト

# 多重根号の極限

—新家さんの問題—

*Edited by* 亀井

# 第 1 章

# 多重根号の極限(2008/11/30)

## § 1　新家さんの問題

**問題** 1–1–1　　$\sqrt{1+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}}$ を求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

はっきりさせるため，問題を次のように読み替える.
問題
「自然数 $N$ を選ぶ. 数列 $\{a_n\}$ $(n=N,\ N-1,\ \cdots 2,\ 1)$ を次の漸化式で定める.

(1)　$a_N = 1$

(2)　$a_{k-1} = \sqrt{1+(k-1)a_k}$ $(k=N,\ N-1,\ \cdots,\ 3,\ 2)$

$\lim_{N\to\infty} a_1$ を求めよ.」

例えば $N=4$ の場合は $a_4=1$ から順次 $a_3=\sqrt{1+3a_4}=\sqrt{1+3\cdot 1}$, $a_2=\sqrt{1+2a_3}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 1}}$, $a_1=\sqrt{1+a_2}=\sqrt{1+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 1}}}$ となる.
（$a_n$ は $N$ によるが，煩雑になるので $a_{n,\ N}$ などという表示はしない.）

Excel で計算すると $\lim_{N\to\infty} a_n = n+1$ らしいことにすぐに気づく. 実際 $a_k = k+1$ とすると，$a_{k-1} = \sqrt{1+(k-1)a_k} = \sqrt{1+(k-1)(k+1)} = k$ である. 以下ではこれを証明する.

**命題** 1–1–2　$1 \leqq a_n \leqq n+1$ である.
証明
$1 \leqq a_n$ は明らかである. $a_n \leqq n+1$ を帰納法で示す.
$a_k \leqq k+1$ とすると，$a_{k-1} = \sqrt{1+(k-1)a_k} \leqq \sqrt{1+(k-1)(k+1)} = k$ より成立する.

証明終

**命題** 1–1–3　$\lim_{N\to\infty} a_n$ は存在し，その極限値は $n+1$ 以下である.
証明
$a_{k-1} = \sqrt{1+(k-1)a_k}$ は $a_k$ の関数として単調増加だから，$a_n$ は $N$ の関数として明らかに単調増加である. 命題 1-1-2 により $a_n \leqq n+1$ と有界だから収束する.

証明終

**命題** 1–1–4　$a_n \leqq \dfrac{n-1}{4}$ のとき $a_{n-1} \geqq 2a_n$ である．

証明

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} - 2a_n &= \sqrt{1+(n-1)a_n} - 2a_n \\
&= \frac{1+(n-1)a_n - 4{a_n}^2}{\sqrt{1+(n-1)a_n} + 2a_n} \\
&= \frac{1+(n-1-4a_n)a_n}{\sqrt{1+(n-1)a_n} + 2a_n} \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

証明終

**命題** 1–1–5　$a_n \leqq n-1$ のとき $a_{n-1} \geqq a_n$ である．

証明

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} - a_n &= \sqrt{1+(n-1)a_n} - a_n \\
&= \frac{1+(n-1)a_n - {a_n}^2}{\sqrt{1+(n-1)a_n} + a_n} \\
&= \frac{1+(n-1-a_n)a_n}{\sqrt{1+(n-1)a_n} + a_n} \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

証明終

**命題** 1–1–6　$a_n \geqq n-1$ のとき $0 \leqq n - a_{n-1} \leqq \dfrac{1}{2}((n+1)-a_n)$ である．

証明

$$
\begin{aligned}
n - a_{n-1} &= n - \sqrt{1+(n-1)a_n} \\
&= \frac{n^2 - 1 - (n-1)a_n}{n + \sqrt{1+(n-1)a_n}} \\
&= \frac{(n-1)\{(n+1)-a_n\}}{n + \sqrt{1+(n-1)a_n}} \\
&\leqq \frac{n-1}{n+(n-1)}\{(n+1)-a_n\} \\
&\leqq \frac{1}{2}\{(n+1)-a_n\}
\end{aligned}
$$

証明終

**問題の証明** 1–1–7
命題 1-1-4 〜1-1-6 により $\lim_{N\to\infty} a_1 = 2$ がいえる．

証明
横軸 $n$, 縦軸 $a_n$ でグラフを描き，領域を図示すればわかりやすいのだが，グラフが描けていないのでそのつもりで読んでください．
$l$ を自然数とする．$N$ を $N > 1 + l + 3l + \log_2 l = 4l + 1 + \log_2 l$ を満たすようにとる．
$a_N = 1$ から始めると命題 1-1-4 により $a_{4l+1} \geqq l$ であることが分かる．
その後，命題 1-1-3 により $l \leqq a_{l+1} \leqq l + 2$ が分かる．
このとき $0 \leqq (l+2) - a_{l+1} \leqq 2$ になっているので，命題 1-1-4 により $0 \leqq (2 - a_1) \leqq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^l$ がいえる．
従って $\lim_{N\to\infty} a_1 = 2$ が成り立つ．

## § 2　谷田さんによる別解

谷田さんが場合分けのいらない証明を考えてくれました．命題 1–1–3 までは同じです．

**命題** 1–2–1
$n = 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ において $0 \leqq n - a_{n-1} \leqq \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}\{(n+1) - a_n\}$ である．

証明

$$\begin{aligned}
n - a_{n-1} &= n - \sqrt{1 + (n-1)a_n} \\
&= \frac{n^2 - 1 - (n-1)a_n}{n + \sqrt{1 + (n-1)a_n}} \\
&= \frac{(n-1)\{(n+1) - a_n\}}{n + \sqrt{1 + (n-1)a_n}} \\
&\leqq \frac{n}{n + \sqrt{n}}\{(n+1) - a_n\} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}\{(n+1) - a_n\}
\end{aligned}$$

証明終

この不等式を $n = 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ において全てかけあわすと，

$$0 \leqq 2 - a_1 \leqq \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{N}}\right)}(N + 1 - a_N)$$

$\log(\text{分母}) \sim O(\sqrt{N})$, $\log(\text{分子}) \sim O(\log N)$ より右辺は 0 に収束する．

この証明の方がシンプルですっきりしていますね．ただ，評価が気前よすぎて，かなり微妙な収束の仕方です．実際の収束はものすごくよくて，$a_{10} = 1000000$ ぐらいから始めても $a_1$ の誤差は $10^{-7}$ もないぐらいです．