For Tutors

MeBio　数学テキスト

「整数の分割」演習問題84

―亀井の解答―

Edited by kamei

第 1 章

「整数の分割」演習問題84

これも徳島大学の片山真一教授から教えていただいたことですが，ジョージ・アンドリュース，キムモ・エリクソン著「整数の分割」の演習問題に誤りがあるということで，正しい問題を考えてみました．

以下では実数 x に対して $\{x\}$ で x の四捨五入による整数値を表すものとする．つまり $\{x\} = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$ である．ここで [ ] はガウス記号であり，$[y]$ は y を超えない最大の整数を表す．また $p(n\,|\,$和因子は$\,\{2,\ 3,\ 4\}\,$に属す$)$ は自然数 n を 2, 3, 4 の和として表す方法の総数を表し，$p(n\,m)$ は自然数 n を 1, 2, $\cdots$, m の和として表す方法の総数を表す．

§ 1　元々の出題

問題 1–1–1　　$p(n\,|\,$和因子は$\,\{2,\ 3,\ 4\}\,$に属す$) = \left\{\dfrac{(n-3)^2}{12}\right\} - \left[\dfrac{n-3}{4}\right]\left[\dfrac{n-1}{4}\right]$ であることを証明せよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$n = 0$ のとき 左辺 $= 1$, 右辺 $= \left\{\dfrac{9}{12}\right\} - \left[-\dfrac{3}{4}\right]\left[-\dfrac{1}{4}\right] = 0$ より与式は成り立たない．

§ 2　訂正した問題

正しい問題を考えてみた．ただし，$p(n,\ 3) = \left\{\dfrac{(n+3)^2}{12}\right\}$ であるから，上の問題の発想とは違うかもしれない．

問題 1–2–1　　$p(n\,|\,$和因子は$\,\{2,\ 3,\ 4\}\,$に属す$) = p(n,\ 3) - \left[\dfrac{n+3}{4}\right]\left[\dfrac{n+5}{4}\right]$ であることを証明せよ．

$\boxed{\text{解答}}$

集合 $P_1(n), P_0(n)$ を

$$P_1(n) = \{n\text{ の分割}\,|\,\text{和因子は}\,\{2,\ 3,\ 4\}\,\text{に属す}\}$$

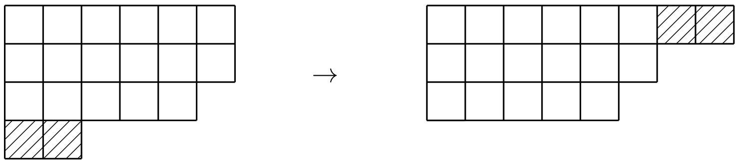
$$P_0(n) = \{n\text{ の分割}\,|\,\text{和因子は}\,\{1,\ 2,\ 3\}\,\text{に属す}\}$$

と定義し，その要素数を

$$p_1(n) = \#(P_1(n)) = p(n\,|\,\text{和因子は}\,\{2,\ 3,\ 4\}\,\text{に属す})$$

$$p_0(n) = \#(P_0(n)) = p(n,\ 3) = p(n\,|\,\text{和因子は}\,\{1,\ 2,\ 3\}\,\text{に属す})$$

とする．$P_1(n)$ の要素の和因子 4 を $3+1$ に分割することにより単射 $f : P_1(n) \to P_0(n)$ が得られる．ヤング図形でいうと，4 行目を 1 行目の右端に移動することを意味する．



これは全射ではない．

$$f(P_1(n)) = \{n \text{ の分割} \mid \text{和因子は } \{1,\ 2,\ 3\} \text{ に属し，} 3 \text{ の数が } 1 \text{ の数以上 }\}$$

である．従って

$$\begin{aligned} p_0(n) - p_1(n) &= \#(P_0(n) \backslash f(P_1(n))) \\ &= \{n \text{ の分割} \mid \text{和因子は } \{1,\ 2,\ 3\} \text{ に属し，} 3 \text{ の数が } 1 \text{ の数未満 }\} \end{aligned}$$

この数が $\left[\dfrac{n+3}{4}\right]\left[\dfrac{n+5}{4}\right]$ であることを示せばよい．

条件に適する n の分割において，3 の個数を k 個，2 の個数を l 個，1 の個数を m 個としよう．$n = 3k + 2l + m$ である．

k の最小値は 0 である．また，$l \geqq 0, m \geqq k+1$ より $n = 3k + 2l + m \geqq 3k + (k+1) = 4k + 1 \Rightarrow k \leqq \dfrac{n-1}{4}$ で，k の最大値は $\left[\dfrac{n-1}{4}\right]$ である．このとき m の可能性は $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\dfrac{n-3k-(k+1)}{2}\right]$ の $\left[\dfrac{n-4k+1)}{2}\right]$ 通り存在することになる．

従って

$$p_0(n) - p_1(n) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left[\frac{n-4k+1}{2}\right]$$

であることがわかる．これを n を 4 で割った剰余で場合分けして計算してみよう．

$n = 4m$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left[\frac{n-4k+1}{2}\right] = \sum_{k=0}^{m-1} (2m-2k) = m(m+1) = \frac{n}{4} \times \frac{n+4}{4}$$

$n = 4m+1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left[\frac{n-4k+1}{2}\right] = \sum_{k=0}^{m} (2m-2k+1) = (m+1)(m+1) = \frac{n+3}{4} \times \frac{n+3}{4}$$

$n = 4m+2$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left[\frac{n-4k+1}{2}\right] = \sum_{k=0}^{m} (2m-2k+1) = (m+1)(m+1) = \frac{n+2}{4} \times \frac{n+2}{4}$$

$n = 4m+3$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left[\frac{n-4k+1}{2}\right] = \sum_{k=0}^{m} (2m-2k+2) = (m+1)(m+2) = \frac{n+1}{4} \times \frac{n+5}{4}$$

いずれの場合でも

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left[\frac{n-4k+1}{2}\right] = \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right]$$

であることがわかる．

§ 3 $p_1(n)$ の直接計算

問題 1–3–1 $p_1(n) = p(n \mid$ 和因子は $\{2,\ 3,\ 4\}$ に属す$)$ を直接計算し, $p_1(n) = \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{12} \right\} - \left[\dfrac{n+3}{4} \right] \left[\dfrac{n+5}{4} \right]$ であることを確認せよ.

解答

母関数で考えると

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_1(n) q^n = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}$$

である. この右辺のマクローリン展開の係数を求めればよい.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} \\ = \ & \frac{2+q}{9\,(1+q+q^2)} + \frac{1-q}{8\,(1+q^2)} + \frac{7}{32\,(1+q)} + \frac{1}{16\,(1+q)^2} + \frac{59}{288\,(1-q)} + \frac{1}{8\,(1-q)^2} + \frac{1}{24\,(1-q)^3} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{2+q}{1+q+q^2} &= \frac{3}{1-q^3} - \frac{1}{1-q} \\ \frac{1}{1+q} &= \frac{2}{1-q^2} - \frac{1}{1-q} \\ \frac{1}{(1+q)^2} &= \frac{4}{(1-q^2)^2} - \frac{2}{1-q^2} - \frac{1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

が成り立つので, これらを代入して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} \\ = \ & \frac{1}{9}\left(\frac{3}{1-q^3} - \frac{1}{1-q} \right) + \frac{1-q}{8\,(1+q^2)} + \frac{7}{32}\left(\frac{2}{1-q^2} - \frac{1}{1-q} \right) + \frac{1}{16}\left(\frac{4}{(1-q^2)^2} - \frac{2}{1-q^2} - \frac{1}{(1-q)^2} \right) \\ & + \frac{59}{288\,(1-q)} + \frac{1}{8\,(1-q)^2} + \frac{1}{24\,(1-q)^3} \\ = \ & \frac{1}{3}\frac{1}{1-q^3} - \frac{1}{9}\frac{1}{1-q} + \frac{1-q}{8\,(1+q^2)} + \frac{7}{16}\frac{1}{1-q^2} - \frac{7}{32}\frac{1}{1-q} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-q^2)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{1-q^2} \\ & - \frac{1}{16}\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{59}{288\,(1-q)} + \frac{1}{8\,(1-q)^2} + \frac{1}{24\,(1-q)^3} \\ = \ & \frac{1}{3}\frac{1}{1-q^3} - \frac{1}{8}\frac{1}{1-q} + \frac{1-q}{8\,(1+q^2)} + \frac{5}{16}\frac{1}{1-q^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-q^2)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

二項定理より $\dfrac{1}{(1-q)^{m+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} q^n$ である.

また, $\dfrac{1-q}{1+q^2} = (1-q)(1-q^2+q^4-q^6\cdots) = 1-q-q^2+q^3+q^4-q^5-q^6+q^7\cdots$ である.

従って

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3(1-q^3)} &= \frac{1}{3}(1+q^3+q^6+q^9+q^{12}+\cdots) \\
\frac{-1}{8(1-q)} &= \frac{-1}{8}(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10}+q^{11}+q^{12}+\cdots) \\
\frac{1-q}{8(1+q^2)} &= \frac{1}{8}(1-q-q^2+q^3+q^4-q^5-q^6+q^7+q^8-q^9-q^{10}+q^{11}+q^{12}-\cdots) \\
\frac{5}{16(1-q^2)} &= \frac{5}{16}(1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^{10}+q^{12}-\cdots) \\
\frac{1}{4(1-q^2)^2} &= \frac{1}{4}(1+2q^2+3q^4+4q^6+5q^8+6q^{10}+7q^{12}+\cdots+(n+1)q^{2n}+\cdots) \\
\frac{1}{16(1-q)^2} &= \frac{1}{16}(1+2q+3q^2+4q^3+5q^4+6q^5+7q^6+\cdots+(n+1)q^n+\cdots) \\
\frac{1}{24(1-q)^3} &= \frac{1}{24}\left(1+3q+6q^2+10q^3+15q^4+21q^5+28q^6+\cdots+\frac{(n+2)(n+1)}{2}q^n+\cdots\right)
\end{aligned}$$

この級数和の q^n の係数が $p_1(n)$ ということになる．これより $p_1(n)$，$p_0(n)$，$p_2(n)$ をそれぞれ求めると

$n=12k$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6k+1}{4}+\frac{12k+1}{16}+\frac{(12k+2)(12k+1)}{48} \\
&= 3k^2+3k+1 \\
p_0(n) &= \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{(12k+3)^2}{12}\right\} = \left\{12k^2+6k+\frac{9}{12}\right\} \\
&= 12k^2+6k+1 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right] = \left[3k+\frac{3}{4}\right]\left[3k+\frac{5}{4}\right] = 3k(3k+1) \\
&= 9k^2+3k \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n)-p_2(n)
\end{aligned}$$

$n=12k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3}-\frac{1}{8}+\frac{-1}{8}+\frac{0}{16}+\frac{0}{4}+\frac{12k+2}{16}+\frac{(12k+3)(12k+2)}{48} \\
&= 3k^2+2k \\
p_0(n) &= \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{(12k+4)^2}{12}\right\} = \left\{12k^2+8k+\frac{16}{12}\right\} \\
&= 12k^2+8k+1 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right] = \left[3k+\frac{4}{4}\right]\left[3k+\frac{6}{4}\right] = (3k+1)(3k+1) \\
&= 9k^2+6k+1 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n)-p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 2$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+2}{4} + \frac{12k+3}{16} + \frac{(12k+4)(12k+3)}{48} \\
&= 3k^2 + 4k + 1 \\
p_0(n) &= \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{(12k+5)^2}{12}\right\} = \left\{12k^2 + 10k + \frac{25}{12}\right\} \\
&= 12k^2 + 10k + 2 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right] = \left[3k + \frac{5}{4}\right]\left[3k + \frac{7}{4}\right] = (3k+1)(3k+1) \\
&= 9k^2 + 6k + 1 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 3$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+4}{16} + \frac{(12k+5)(12k+4)}{48} \\
&= 3k^2 + 3k + 1 \\
p_0(n) &= \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{(12k+6)^2}{12}\right\} = \left\{12k^2 + 12k + \frac{36}{12}\right\} \\
&= 12k^2 + 12k + 3 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right] = \left[3k + \frac{6}{4}\right]\left[3k + \frac{8}{4}\right] = (3k+1)(3k+2) \\
&= 9k^2 + 9k + 2 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 4$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+3}{4} + \frac{12k+5}{16} + \frac{(12k+6)(12k+5)}{48} \\
&= 3k^2 + 5k + 2 \\
p_0(n) &= \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{(12k+7)^2}{12}\right\} = \left\{12k^2 + 14k + \frac{49}{12}\right\} \\
&= 12k^2 + 14k + 4 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right] = \left[3k + \frac{7}{4}\right]\left[3k + \frac{9}{4}\right] = (3k+1)(3k+2) \\
&= 9k^2 + 9k + 2 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 5$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+6}{16} + \frac{(12k+7)(12k+6)}{48} \\
&= 3k^2 + 4k + 1 \\
p_0(n) &= \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(12k+8)^2}{12} \right\} = \left\{ 12k^2 + 16k + \frac{64}{12} \right\} \\
&= 12k^2 + 16k + 5 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4} \right] \left[\frac{n+5}{4} \right] = \left[3k + \frac{8}{4} \right] \left[3k + \frac{10}{4} \right] = (3k+2)(3k+2) \\
&= 9k^2 + 12k + 4 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 6$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+4}{4} + \frac{12k+7}{16} + \frac{(12k+8)(12k+7)}{48} \\
&= 3k^2 + 6k + 3 \\
p_0(n) &= \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(12k+9)^2}{12} \right\} = \left\{ 12k^2 + 18k + \frac{81}{12} \right\} \\
&= 12k^2 + 18k + 7 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4} \right] \left[\frac{n+5}{4} \right] = \left[3k + \frac{9}{4} \right] \left[3k + \frac{11}{4} \right] = (3k+2)(3k+2) \\
&= 9k^2 + 12k + 4 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 7$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+8}{16} + \frac{(12k+9)(12k+8)}{48} \\
&= 3k^2 + 5k + 2 \\
p_0(n) &= \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(12k+10)^2}{12} \right\} = \left\{ 12k^2 + 20k + \frac{100}{12} \right\} \\
&= 12k^2 + 20k + 8 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4} \right] \left[\frac{n+5}{4} \right] = \left[3k + \frac{10}{4} \right] \left[3k + \frac{12}{4} \right] = (3k+2)(3k+3) \\
&= 9k^2 + 15k + 6 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 8$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+5}{4} + \frac{12k+9}{16} + \frac{(12k+10)(12k+9)}{48} \\
&= 3k^2 + 7k + 4 \\
p_0(n) &= \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(12k+11)^2}{12} \right\} = \left\{ 12k^2 + 22k + \frac{121}{12} \right\} \\
&= 12k^2 + 22k + 10 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4} \right] \left[\frac{n+5}{4} \right] = \left[3k + \frac{11}{4} \right] \left[3k + \frac{13}{4} \right] = (3k+2)(3k+3) \\
&= 9k^2 + 15k + 6 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 9$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+10}{16} + \frac{(12k+11)(12k+10)}{48} \\
&= 3k^2 + 6k + 3 \\
p_0(n) &= \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(12k+12)^2}{12} \right\} = \left\{ 12k^2 + 24k + \frac{144}{12} \right\} \\
&= 12k^2 + 24k + 12 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4} \right] \left[\frac{n+5}{4} \right] = \left[3k + \frac{12}{4} \right] \left[3k + \frac{14}{4} \right] = (3k+3)(3k+3) \\
&= 9k^2 + 18k + 9 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 10$ のとき

$$\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+6}{4} + \frac{12k+11}{16} + \frac{(12k+12)(12k+11)}{48} \\
&= 3k^2 + 8k + 5 \\
p_0(n) &= \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(12k+13)^2}{12} \right\} = \left\{ 12k^2 + 26k + \frac{169}{12} \right\} \\
&= 12k^2 + 26k + 14 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4} \right] \left[\frac{n+5}{4} \right] = \left[3k + \frac{13}{4} \right] \left[3k + \frac{15}{4} \right] = (3k+3)(3k+3) \\
&= 9k^2 + 18k + 9 \\
\therefore p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}$$

$n = 12k + 11$ のとき

$$
\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+12}{16} + \frac{(12k+13)(12k+12)}{48} \\
&= 3k^2 + 7k + 4 \\
p_0(n) &= \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} = \left\{\frac{(12k+14)^2}{12}\right\} = \left\{12k^2 + 28k + \frac{196}{12}\right\} \\
&= 12k^2 + 28k + 16 \\
p_2(n) &= \left[\frac{n+3}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right] = \left[3k + \frac{14}{4}\right]\left[3k + \frac{16}{4}\right] = (3k+3)(3k+4) \\
&= 9k^2 + 21k + 12 \\
\therefore\ p_1(n) &= p_0(n) - p_2(n)
\end{aligned}
$$

§ 4 $p_1(n)$ の簡略表示

前節の結果を書き直すと次のようになる．

$$
\begin{array}{llllll}
n=12k & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+3k+1 & =\dfrac{(n+6)^2}{48}+\dfrac{1}{4} & =\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} \\
n=12k+1 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+2k & =\dfrac{(n+3)^2}{48}-\dfrac{1}{3} & =\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} \\
n=12k+2 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+4k+1 & =\dfrac{(n+6)^2}{48}-\dfrac{1}{3} & =\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} \\
n=12k+3 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+3k+1 & =\dfrac{(n+3)^2}{48}+\dfrac{1}{4} & =\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} \\
n=12k+4 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+5k+2 & =\dfrac{(n+6)^2}{48}-\dfrac{1}{12} & =\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} \\
n=12k+5 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+4k+1 & =\dfrac{(n+3)^2}{48}-\dfrac{1}{3} & =\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} \\
n=12k+6 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+6k+3 & =\dfrac{(n+6)^2}{48} & =\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} \\
n=12k+7 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+5k+2 & =\dfrac{(n+3)^2}{48}-\dfrac{1}{12} & =\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} \\
n=12k+8 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+7k+4 & =\dfrac{(n+6)^2}{48}-\dfrac{1}{12} & =\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} \\
n=12k+9 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+6k+3 & =\dfrac{(n+3)^2}{48} & =\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} \\
n=12k+10 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+8k+5 & =\dfrac{(n+6)^2}{48}-\dfrac{1}{3} & =\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} \\
n=12k+11 & \text{のとき} & p_1(n)=3k^2+7k+4 & =\dfrac{(n+3)^2}{48}-\dfrac{1}{4} & =\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{array}
$$

従って $p_1(n)=\begin{cases}\left\{\dfrac{(n+6)^2}{48}\right\} & (n\ \text{偶数}) \\ \left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} & (n\ \text{奇数})\end{cases}$ と表すことができる．

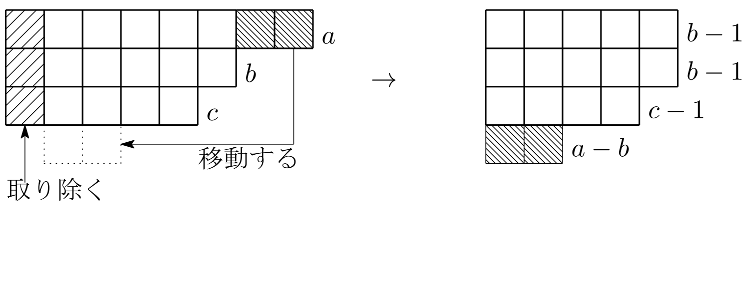
（もっと納得のいく証明があるかどうかはよくわからない．）

系 1–4–1 三辺の長さが自然数で，その和が n であるような三角形の合同類の個数を $\Delta(n)$ とすると，

$$\Delta(n)=\begin{cases}\left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} & (n\ \text{奇数}) \\ \left\{\dfrac{n^2}{48}\right\} & (n\ \text{偶数})\end{cases}$$

解答

$\Delta(n)=p_1(n-3)$ であることが次の全単射によって証明される．



§ 5 $\Delta(n)$ の直接計算

三角形の合同類が $P_1(n-3)$ と一対一対応が付くという事実は興味深いが，その個数は単純な Σ 計算によっても求められるはずである．ここでは $\Delta(n)$ を直接計算によって求めてみよう．

三辺の長さを $a,\ b,\ c\ \ (a \geqq b \geqq c \geqq 1)$ とする．最長辺が a なので $a \geqq \dfrac{n}{3}$ であるが，これは整数値に限定すれば $a \geqq \left[\dfrac{n+2}{3}\right]$ を意味する．また $a < b+c$ より $a \leqq \dfrac{n}{2}$ であるが，これは整数値に限定すれば $a \leqq \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ を意味する．

$\left[\dfrac{n+2}{3}\right] \leqq a \leqq \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ である a を固定する．このとき $b+c=n-a$ を満たす $(b,\ c)$ で $a \geqq b \geqq c \geqq 1$ を満たすものを考える．先ほどと同様に考えて $\left[\dfrac{n-a+1}{2}\right] \leqq b \leqq a$ であるから，このような $(b,\ c)$ の組は $a - \left[\dfrac{n-a+1}{2}\right] + 1$ 組存在する．従って

$$\Delta(n) = \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2}\right] + 1\right)$$

という表示が得られる．これを n を 12 で割った剰余で場合分けして計算してみよう．（計算途中で a を $2d$ と $2d-1$, または $2d$ と $2d+1$ に分けている．）

$n = 12k$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2}\right] + 1\right) = \sum_{a=4k}^{6k-1} \left(a - \left[\frac{12k-a+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k}^{3k-1} \left(2d - \left[\frac{12k-2d+1}{2}\right] + 1\right) + \sum_{d=2k}^{3k-1} \left((2d+1) - \left[\frac{12k-(2d+1)+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k}^{3k-1} \{2d - (6k-d) + 1\} + \sum_{d=2k}^{3k-1} \{(2d+1) - (6k-d) + 1\} \\
&= \sum_{d=2k}^{3k-1} \{6d - 12k + 3\} \\
&= 3(3k-1)(3k) - 3(2k-1)(2k) - k(12k-3) \\
&= 3k^2 = \frac{n^2}{48} = \left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2}\right] + 1\right) = \sum_{a=4k+1}^{6k} \left(a - \left[\frac{12k+1-a+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+1-(2d-1)+1}{2}\right] + 1\right) + \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+1-2d+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{(2d-1) - (6k-d+1) + 1\} + \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d - (6k-d+1) + 1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d-12k-1\} \\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+1) \\
&= 3k^2+2k = \frac{(n+3)^2-16}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+2$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+1}^{6k} \left(a - \left[\frac{12k+2-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+2-(2d-1)+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+2-2d+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{(2d-1)-(6k-d+2)+1\} + \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d-(6k-d+1)+1\} \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d-12k-2\} \\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+2) \\
&= 3k^2+k = \frac{n^2-4}{48} = \left\{ \frac{n^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+3$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+1}^{6k+1} \left(a - \left[\frac{12k+3-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+3-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k}^{3k} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+3-(2d+1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d-(6k-d+2)+1\} + \sum_{d=2k}^{3k} \{(2d+1)-(6k-d+1)+1\} \\
&= \left\{ \sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d-12k\} \right\} + 1 \\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k)+1 \\
&= 3k^2+3k+1 = \frac{(n+3)^2+12}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+4$ のとき

$$
\Delta(n) = \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+2}^{6k+1} \left(a - \left[\frac{12k+4-a+1}{2} \right] + 1 \right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d=2k+1}^{3k}\left(2d-\left[\frac{12k+4-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+1}^{3k}\left((2d+1)-\left[\frac{12k+4-(2d+1)+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k}\{2d-(6k-d+2)+1\}+\sum_{d=2k}^{3k-1}\{(2d+1)-(6k-d+2)+1\}\\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k}\{6d-12k-1\}\\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+1)\\
&= 3k^2+2k=\frac{n^2-16}{48}=\left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+5$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+2}^{6k+2}\left(a-\left[\frac{12k+5-a+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1}\left(2d-\left[\frac{12k+5-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+1}^{3k}\left((2d+1)-\left[\frac{12k+5-(2d+1)+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1}\{2d-(6k-d+3)+1\}+\sum_{d=2k+1}^{3k}\{(2d+1)-(6k-d+2)+1\}\\
&= \left\{\sum_{d=2k+1}^{3k}\{6d-12k-2\}\right\}+3k+1\\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+2)+3k+1\\
&= 3k^2+4k+1=\frac{(n+3)^2-16}{48}=\left\{\frac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+6$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+2}^{6k+2}\left(a-\left[\frac{12k+6-a+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1}\left(2d-\left[\frac{12k+6-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+1}^{3k}\left((2d+1)-\left[\frac{12k+6-(2d+1)+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1}\{2d-(6k-d+3)+1\}+\sum_{d=2k+1}^{3k}\{(2d+1)-(6k-d+3)+1\}\\
&= \left\{\sum_{d=2k+1}^{3k}\{6d-12k-3\}\right\}+3k+1\\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+3)+3k+1\\
&= 3k^2+2k+1=\frac{n^2+12}{48}=\left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n = 12k + 7$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+3}^{6k+3} \left(a - \left[\frac{12k+7-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \left(2d - \left[\frac{12k+7-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+7-(2d-1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \{2d - (6k-d+4) + 1\} + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{(2d-1) - (6k-d+4) + 1\} \\
&= \left\{ \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \{6d - 12k - 7\} \right\} + 3k + 2 \\
&= 3(3k+1)(3k+2) - 3(2k+1)(2k+2) - k(12k+7) + 3k + 2 \\
&= 3k^2 + 5k + 2 = \frac{(n+3)^2 - 4}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k + 8$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+3}^{6k+3} \left(a - \left[\frac{12k+8-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \left(2d - \left[\frac{12k+8-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+8-(2d-1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \{2d - (6k-d+4) + 1\} + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{(2d-1) - (6k-d+5) + 1\} \\
&= \left\{ \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \{6d - 12k - 8\} \right\} + 3k + 1 \\
&= 3(3k+1)(3k+2) - 3(2k+1)(2k+2) - k(12k+8) + 3k + 1 \\
&= 3k^2 + 4k + 1 = \frac{n^2 - 16}{48} = \left\{ \frac{n^2}{48} \right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k + 9$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+3}^{6k+4} \left(a - \left[\frac{12k+9-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left(2d - \left[\frac{12k+9-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+9-(2d-1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{2d - (6k-d+5) + 1\} + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{(2d-1) - (6k-d+5) + 1\} \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{6d - 12k - 9\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3(3k+2)(3k+3) - 3(2k+1)(2k+2) - (k+1)(12k+9) \\
&= 3k^2 + 6k + 3 = \frac{(n+3)^2}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

$n = 12k + 10$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+4}^{6k+4} \left(a - \left[\frac{12k+10-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left(2d - \left[\frac{12k+10-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+10-(2d+1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{2d - (6k-d+5) + 1\} + \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \{(2d+1) - (6k-d+5) + 1\} \\
&= \left\{ \sum_{d=2k+2}^{3k+1} \{6d - 12k - 7\} \right\} + 3k + 2 \\
&= 3(3k+1)(3k+2) - 3(2k+1)(2k+2) - k(12k+7) + 3k + 2 \\
&= 3k^2 + 5k + 2 = \frac{n^2-4}{48} = \left\{ \frac{n^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

$n = 12k + 11$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+4}^{6k+5} \left(a - \left[\frac{12k+11-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left(2d - \left[\frac{12k+11-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+11-(2d+1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{2d - (6k-d+6) + 1\} + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{(2d+1) - (6k-d+5) + 1\} \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{6d - 12k - 8\} \\
&= 3(3k+2)(3k+3) - 3(2k+1)(2k+2) - (k+1)(12k+8) \\
&= 3k^2 + 7k + 4 = \frac{(n+3)^2-4}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

以上により $\Delta(n) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{48} \right\} & (n \text{ 奇数}) \\ \left\{ \dfrac{n^2}{48} \right\} & (n \text{ 偶数}) \end{cases}$ であることが示された.