For Tutors

MeBio　数学テキスト

三角形の合同類の個数

—亀井の解答—

Edited by kamei

第 1 章

三角形の合同類の個数

大学の先輩である徳島大学の片山真一教授からうかがった問題です.

§ 1 問題

問題 1–1–1 n を 3 以上の自然数とする．三辺の長さが自然数で，その和が n であるような三角形の合同類の個数を $\Delta(n)$ とする，

$$\Delta(n) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{48} \right\} & (n \text{ 奇数}) \\ \left\{ \dfrac{n^2}{48} \right\} & (n \text{ 偶数}) \end{cases}$$

であることを示せ．ここで実数 x に対して $\{x\}$ で x の四捨五入による整数値を表すものとする．つまり $\{x\} = \left[x + \dfrac{1}{2} \right]$ である．ここで $[\quad]$ はガウス記号であり，$[y]$ は y を超えない最大の整数を表す.

§ 2　母関数を用いた証明

n を自然数とする．集合 $P_1(n)$ を

$$P_1(n) = \{n \text{ の分割} \mid \text{和因子は } \{2,\ 3,\ 4\} \text{ に属す }\}$$

と定義し，その要素数を

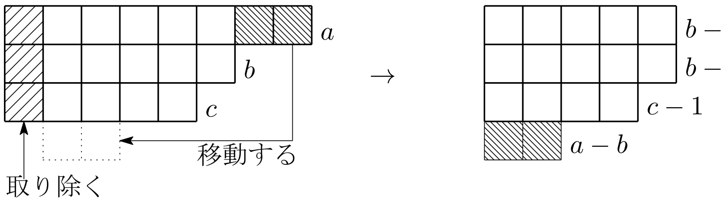
$$p_1(n) = \#(P_1(n)) = p(n \mid \text{和因子は } \{2,\ 3,\ 4\} \text{ に属す})$$

とする．例えば

$$P_1(12) = \{4{+}4{+}4,\ 4{+}4{+}2{+}2,\ 4{+}3{+}3{+}2,\ 4{+}2{+}2{+}2{+}2,\ 3{+}3{+}3{+}3,\ 3{+}3{+}2{+}2{+}2,\ 2{+}2{+}2{+}2{+}2{+}2\}$$

であり，$p_1(12) = 7$ ということになる．

$\Delta(n) = p_1(n-3)$ であることが次の全単射によって容易に証明される．



従って $p_1(n) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n+6)^2}{48} \right\} & (n \text{ 偶数}) \\ \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{48} \right\} & (n \text{ 奇数}) \end{cases}$ であればよい．以下でこれを示そう．

母関数で考えると

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_1(n) q^n = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}$$

である．この右辺のマクローリン展開の係数を求めればよい．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} \\ = \ & \frac{2+q}{9\ (1+q+q^2)} + \frac{1-q}{8\ (1+q^2)} + \frac{7}{32\ (1+q)} + \frac{1}{16\ (1+q)^2} + \frac{59}{288\ (1-q)} + \frac{1}{8\ (1-q)^2} + \frac{1}{24\ (1-q)^3} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{2+q}{1+q+q^2} &= \frac{3}{1-q^3} - \frac{1}{1-q} \\ \frac{1}{1+q} &= \frac{2}{1-q^2} - \frac{1}{1-q} \\ \frac{1}{(1+q)^2} &= \frac{4}{(1-q^2)^2} - \frac{2}{1-q^2} - \frac{1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

が成り立つので，これらを代入して

$$\frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{1-q^3}-\frac{1}{1-q}\right)+\frac{1-q}{8\,(1+q^2)}+\frac{7}{32}\left(\frac{2}{1-q^2}-\frac{1}{1-q}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{4}{(1-q^2)^2}-\frac{2}{1-q^2}-\frac{1}{(1-q)^2}\right)\\
&\quad +\frac{59}{288\,(1-q)}+\frac{1}{8\,(1-q)^2}+\frac{1}{24\,(1-q)^3}\\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{1-q^3}-\frac{1}{9}\frac{1}{1-q}+\frac{1-q}{8\,(1+q^2)}+\frac{7}{16}\frac{1}{1-q^2}-\frac{7}{32}\frac{1}{1-q}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1-q^2)^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{1-q^2}\\
&\quad -\frac{1}{16}\frac{1}{(1-q)^2}+\frac{59}{288\,(1-q)}+\frac{1}{8\,(1-q)^2}+\frac{1}{24\,(1-q)^3}\\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{1-q^3}-\frac{1}{8}\frac{1}{1-q}+\frac{1-q}{8\,(1+q^2)}+\frac{5}{16}\frac{1}{1-q^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1-q^2)^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{(1-q)^2}+\frac{1}{24}\frac{1}{(1-q)^3}
\end{aligned}
$$

二項定理より $\dfrac{1}{(1-q)^{m+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} n+m \\ m \end{array}\right)q^n$ である．

また，$\dfrac{1-q}{1+q^2}=(1-q)(1-q^2+q^4-q^6\cdots)=1-q-q^2+q^3+q^4-q^5-q^6+q^7\cdots$ である．

従って

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3(1-q^3)} &= \frac{1}{3}(1+q^3+q^6+q^9+q^{12}+\cdots)\\
\frac{-1}{8(1-q)} &= \frac{-1}{8}(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10}+q^{11}+q^{12}+\cdots)\\
\frac{1-q}{8(1+q^2)} &= \frac{1}{8}(1-q-q^2+q^3+q^4-q^5-q^6+q^7+q^8-q^9-q^{10}+q^{11}+q^{12}-\cdots)\\
\frac{5}{16(1-q^2)} &= \frac{5}{16}(1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^{10}+q^{12}-\cdots)\\
\frac{1}{4(1-q^2)^2} &= \frac{1}{4}(1+2q^2+3q^4+4q^6+5q^8+6q^{10}+7q^{12}+\cdots+(n+1)q^{2n}+\cdots)\\
\frac{1}{16(1-q)^2} &= \frac{1}{16}(1+2q+3q^2+4q^3+5q^4+6q^5+7q^6+\cdots+(n+1)q^n+\cdots)\\
\frac{1}{24(1-q)^3} &= \frac{1}{24}\left(1+3q+6q^2+10q^3+15q^4+21q^5+28q^6+\cdots+\frac{(n+2)(n+1)}{2}q^n+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

この級数和の q^n の係数が $p_1(n)$ ということになる．これより $p_1(n)$ を求めると

$n=12k$ のとき

$$
\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6k+1}{4}+\frac{12k+1}{16}+\frac{(12k+2)(12k+1)}{48}\\
&= 3k^2+3k+1=\frac{(n+6)^2}{48}+\frac{1}{4}=\left\{\frac{(n+6)^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
p_1(n) &= \frac{0}{3}-\frac{1}{8}+\frac{-1}{8}+\frac{0}{16}+\frac{0}{4}+\frac{12k+2}{16}+\frac{(12k+3)(12k+2)}{48}\\
&= 3k^2+2k=\frac{(n+3)^2}{48}-\frac{1}{3}=\left\{\frac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n = 12k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+2}{4} + \frac{12k+3}{16} + \frac{(12k+4)(12k+3)}{48} \\ &= 3k^2 + 4k + 1 = \frac{(n+6)^2}{48} - \frac{1}{3} = \left\{ \frac{(n+6)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 3$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+4}{16} + \frac{(12k+5)(12k+4)}{48} \\ &= 3k^2 + 3k + 1 = \frac{(n+3)^2}{48} + \frac{1}{4} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 4$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+3}{4} + \frac{12k+5}{16} + \frac{(12k+6)(12k+5)}{48} \\ &= 3k^2 + 5k + 2 = \frac{(n+6)^2}{48} - \frac{1}{12} = \left\{ \frac{(n+6)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 5$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+6}{16} + \frac{(12k+7)(12k+6)}{48} \\ &= 3k^2 + 4k + 1 = \frac{(n+3)^2}{48} - \frac{1}{3} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 6$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+4}{4} + \frac{12k+7}{16} + \frac{(12k+8)(12k+7)}{48} \\ &= 3k^2 + 6k + 3 = \frac{(n+6)^2}{48} = \left\{ \frac{(n+6)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 7$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+8}{16} + \frac{(12k+9)(12k+8)}{48} \\ &= 3k^2 + 5k + 2 = \frac{(n+3)^2}{48} - \frac{1}{12} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 8$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+5}{4} + \frac{12k+9}{16} + \frac{(12k+10)(12k+9)}{48} \\ &= 3k^2 + 7k + 4 = \frac{(n+6)^2}{48} - \frac{1}{12} = \left\{ \frac{(n+6)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 9$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+10}{16} + \frac{(12k+11)(12k+10)}{48} \\ &= 3k^2 + 6k + 3 = \frac{(n+3)^2}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 10$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6k+6}{4} + \frac{12k+11}{16} + \frac{(12k+12)(12k+11)}{48} \\ &= 3k^2 + 8k + 5 = \frac{(n+6)^2}{48} - \frac{1}{3} = \left\{ \frac{(n+6)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

$n = 12k + 11$ のとき

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{0}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{4} + \frac{12k+12}{16} + \frac{(12k+13)(12k+12)}{48} \\ &= 3k^2 + 7k + 4 = \frac{(n+3)^2}{48} - \frac{1}{4} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\} \end{aligned}$$

従って $p_1(n) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n+6)^2}{48} \right\} & (n \text{ 偶数}) \\ \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{48} \right\} & (n \text{ 奇数}) \end{cases}$ と表すことができる．

§ 3　$\Delta(n)$ の直接計算

三角形の合同類が $P_1(n-3)$ と一対一対応が付くという事実は興味深いが，その個数は単純な Σ 計算によっても求められるはずである．ここでは $\Delta(n)$ を直接計算によって求めてみよう．

三辺の長さを $a,\ b,\ c\ \ (a \geqq b \geqq c \geqq 1)$ とする．最長辺が a なので $a \geqq \dfrac{n}{3}$ であるが，これは整数値に限定すれば $a \geqq \left[\dfrac{n+2}{3} \right]$ を意味する．また $a < b + c$ より $a < \dfrac{n}{2}$ であるが，これは整数値に限定すれば $a \leqq \left[\dfrac{n-1}{2} \right]$ を意味する．

$\left[\dfrac{n+2}{3} \right] \leqq a \leqq \left[\dfrac{n-1}{2} \right]$ である a を固定する．このとき $b + c = n - a$ を満たす $(b,\ c)$ で $a \geqq b \geqq c \geqq 1$ を満たすものを考える．先ほどと同様に考えて $\left[\dfrac{n-a+1}{2} \right] \leqq b \leqq a$ であるから，このような $(b,\ c)$ の組は $a - \left[\dfrac{n-a+1}{2} \right] + 1$ 組存在する．従って

$$\Delta(n) = \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right)$$

という表示が得られる．これを n を 12 で割った剰余で場合分けして計算してみよう．（計算途中で a を $2d$ と $2d-1$, または $2d$ と $2d+1$ に分けている．）

$n = 12k$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k}^{6k-1} \left(a - \left[\frac{12k-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k}^{3k-1} \left(2d - \left[\frac{12k-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k}^{3k-1} \left((2d+1) - \left[\frac{12k-(2d+1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k}^{3k-1} \{2d-(6k-d)+1\} + \sum_{d=2k}^{3k-1} \{(2d+1)-(6k-d)+1\} \\
&= \sum_{d=2k}^{3k-1} \{6d-12k+3\} \\
&= 3(3k-1)(3k) - 3(2k-1)(2k) - k(12k-3) \\
&= 3k^2 = \frac{n^2}{48} = \left\{ \frac{n^2}{48} \right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+1}^{6k} \left(a - \left[\frac{12k+1-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+1-(2d-1)+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+1-2d+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{(2d-1)-(6k-d+1)+1\} + \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d-(6k-d+1)+1\} \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d-12k-1\} \\
&= 3(3k)(3k+1) - 3(2k)(2k+1) - k(12k+1) \\
&= 3k^2+2k = \frac{(n+3)^2-16}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k+2$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+1}^{6k} \left(a - \left[\frac{12k+2-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left((2d-1) - \left[\frac{12k+2-(2d-1)+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+2-2d+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{(2d-1)-(6k-d+2)+1\} + \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d-(6k-d+1)+1\} \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d-12k-2\} \\
&= 3(3k)(3k+1) - 3(2k)(2k+1) - k(12k+2)
\end{aligned}$$

$$= 3k^2 + k = \frac{n^2-4}{48} = \left\{\frac{n^2}{48}\right\}$$

$n = 12k+3$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2}\right] + 1\right) = \sum_{a=4k+1}^{6k+1} \left(a - \left[\frac{12k+3-a+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+3-2d+1}{2}\right] + 1\right) + \sum_{d=2k}^{3k} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+3-(2d+1)+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d - (6k-d+2) + 1\} + \sum_{d=2k}^{3k} \{(2d+1) - (6k-d+1) + 1\} \\
&= \left\{\sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d - 12k\}\right\} + 1 \\
&= 3(3k)(3k+1) - 3(2k)(2k+1) - k(12k) + 1 \\
&= 3k^2 + 3k + 1 = \frac{(n+3)^2+12}{48} = \left\{\frac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k+4$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2}\right] + 1\right) = \sum_{a=4k+2}^{6k+1} \left(a - \left[\frac{12k+4-a+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \left(2d - \left[\frac{12k+4-2d+1}{2}\right] + 1\right) + \sum_{d=2k+1}^{3k} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+4-(2d+1)+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{2d - (6k-d+2) + 1\} + \sum_{d=2k}^{3k-1} \{(2d+1) - (6k-d+2) + 1\} \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k} \{6d - 12k - 1\} \\
&= 3(3k)(3k+1) - 3(2k)(2k+1) - k(12k+1) \\
&= 3k^2 + 2k = \frac{n^2-16}{48} = \left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}$$

$n = 12k+5$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2}\right] + 1\right) = \sum_{a=4k+2}^{6k+2} \left(a - \left[\frac{12k+5-a+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1} \left(2d - \left[\frac{12k+5-2d+1}{2}\right] + 1\right) + \sum_{d=2k+1}^{3k} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+5-(2d+1)+1}{2}\right] + 1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1} \{2d - (6k-d+3) + 1\} + \sum_{d=2k+1}^{3k} \{(2d+1) - (6k-d+2) + 1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\sum_{d=2k+1}^{3k}\{6d-12k-2\}\right\}+3k+1 \\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+2)+3k+1 \\
&= 3k^2+4k+1=\frac{(n+3)^2-16}{48}=\left\{\frac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+6$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+2}^{6k+2}\left(a-\left[\frac{12k+6-a+1}{2}\right]+1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1}\left(2d-\left[\frac{12k+6-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+1}^{3k}\left((2d+1)-\left[\frac{12k+6-(2d+1)+1}{2}\right]+1\right) \\
&= \sum_{d=2k+1}^{3k+1}\{2d-(6k-d+3)+1\}+\sum_{d=2k+1}^{3k}\{(2d+1)-(6k-d+3)+1\} \\
&= \left\{\sum_{d=2k+1}^{3k}\{6d-12k-3\}\right\}+3k+1 \\
&= 3(3k)(3k+1)-3(2k)(2k+1)-k(12k+3)+3k+1 \\
&= 3k^2+2k+1=\frac{n^2+12}{48}=\left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+7$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+3}^{6k+3}\left(a-\left[\frac{12k+7-a+1}{2}\right]+1\right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1}\left(2d-\left[\frac{12k+7-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+2}^{3k+2}\left((2d-1)-\left[\frac{12k+7-(2d-1)+1}{2}\right]+1\right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1}\{2d-(6k-d+4)+1\}+\sum_{d=2k+2}^{3k+2}\{(2d-1)-(6k-d+4)+1\} \\
&= \left\{\sum_{d=2k+2}^{3k+1}\{6d-12k-7\}\right\}+3k+2 \\
&= 3(3k+1)(3k+2)-3(2k+1)(2k+2)-k(12k+7)+3k+2 \\
&= 3k^2+5k+2=\frac{(n+3)^2-4}{48}=\left\{\frac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+8$ のとき

$$
\Delta(n) = \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+3}^{6k+3}\left(a-\left[\frac{12k+8-a+1}{2}\right]+1\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1}\left(2d-\left[\frac{12k+8-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+2}^{3k+2}\left((2d-1)-\left[\frac{12k+8-(2d-1)+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+1}\{2d-(6k-d+4)+1\}+\sum_{d=2k+2}^{3k+2}\{(2d-1)-(6k-d+5)+1\}\\
&= \left\{\sum_{d=2k+2}^{3k+1}\{6d-12k-8\}\right\}+3k+1\\
&= 3(3k+1)(3k+2)-3(2k+1)(2k+2)-k(12k+8)+3k+1\\
&= 3k^2+4k+1=\frac{n^2-16}{48}=\left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+9$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+3}^{6k+4}\left(a-\left[\frac{12k+9-a+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2}\left(2d-\left[\frac{12k+9-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+2}^{3k+2}\left((2d-1)-\left[\frac{12k+9-(2d-1)+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2}\{2d-(6k-d+5)+1\}+\sum_{d=2k+2}^{3k+2}\{(2d-1)-(6k-d+5)+1\}\\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2}\{6d-12k-9\}\\
&= 3(3k+2)(3k+3)-3(2k+1)(2k+2)-(k+1)(12k+9)\\
&= 3k^2+6k+3=\frac{(n+3)^2}{48}=\left\{\frac{(n+3)^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n=12k+10$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=[\frac{n+2}{3}]}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a-\left[\frac{n-a+1}{2}\right]+1\right)=\sum_{a=4k+4}^{6k+4}\left(a-\left[\frac{12k+10-a+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2}\left(2d-\left[\frac{12k+10-2d+1}{2}\right]+1\right)+\sum_{d=2k+2}^{3k+1}\left((2d+1)-\left[\frac{12k+10-(2d+1)+1}{2}\right]+1\right)\\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2}\{2d-(6k-d+5)+1\}+\sum_{d=2k+2}^{3k+1}\{(2d+1)-(6k-d+5)+1\}\\
&= \left\{\sum_{d=2k+2}^{3k+1}\{6d-12k-7\}\right\}+3k+2\\
&= 3(3k+1)(3k+2)-3(2k+1)(2k+2)-k(12k+7)+3k+2\\
&= 3k^2+5k+2=\frac{n^2-4}{48}=\left\{\frac{n^2}{48}\right\}
\end{aligned}
$$

$n = 12k + 11$ のとき

$$
\begin{aligned}
\Delta(n) &= \sum_{a=\left[\frac{n+2}{3}\right]}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(a - \left[\frac{n-a+1}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{a=4k+4}^{6k+5} \left(a - \left[\frac{12k+11-a+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left(2d - \left[\frac{12k+11-2d+1}{2} \right] + 1 \right) + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \left((2d+1) - \left[\frac{12k+11-(2d+1)+1}{2} \right] + 1 \right) \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{2d - (6k-d+6) + 1\} + \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{(2d+1) - (6k-d+5) + 1\} \\
&= \sum_{d=2k+2}^{3k+2} \{6d - 12k - 8\} \\
&= 3(3k+2)(3k+3) - 3(2k+1)(2k+2) - (k+1)(12k+8) \\
&= 3k^2 + 7k + 4 = \frac{(n+3)^2 - 4}{48} = \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}
\end{aligned}
$$

以上により $\Delta(n) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{48} \right\} & (n \text{ 奇数}) \\ \left\{ \dfrac{n^2}{48} \right\} & (n \text{ 偶数}) \end{cases}$ であることが示された.