

MeBio 数学テキスト

円に内接する多角形の問題

—金沢医大 2007 の問題—

§ 1 金沢医大の問題

問題 1-1 $n \geq 3$ を自然数とし、単位円周上に n 個の点を取り、それらを結んで n 角形を作る。その内角の大きさを a_1, a_2, \dots, a_n とし、これらがこの順に公差が正の等差数列をなしているとする。このとき $a_1 = 135^\circ$ とすれば、 n のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ア}} \leq n \leq \boxed{\text{イウ}}$ となる。このとき、 $n = \boxed{\text{イウ}}$ ならば $a_n = \boxed{\text{エオカ}}^\circ$ である。

§ 2 気になったこと

この問題では $\boxed{\text{ア}}$ 9 $\boxed{\text{イウ}}$ 15 $\boxed{\text{エオカ}}$ 177 というのが出題者側の用意していた解答ではないかと思われるが、これは誤りである。必要条件としてある程度のことを考えるとこの条件が出てくるが、それだけで実際の図形が存在する感触は全く得られないはずである。そこをきっちり突き詰めて考えたい。

$\{a_k\}$ の公差を $d (> 0)$ とすると、 $a_k = 135 + (k-1)d$ であり、外角は $180 - a_k = 45 - (k-1)d$ である。外角の和が 360° となることから

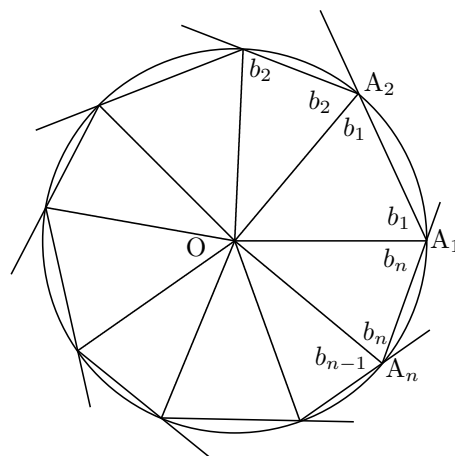
$$\sum_{k=1}^n (45 - (k-1)d) = 45n - \frac{(n-1)n}{2}d = 360 \iff d = \frac{90(n-8)}{n(n-1)}$$

が得られる。これを用いて、 $d > 0$ から $n > 8$ が必要と分かる。

また外角の末項 $180 - a_n = 45 - (n-1)d = 45 - \frac{90(n-8)}{n} = \frac{45(16-n)}{n}$ が正であることから $n < 16$ が得られるので $9 \leq n \leq 15$ となる。しかし、この範囲にあるすべての n について、題意の n 角形が存在するわけではない。存在するための十分条件を求めないといけない。

a_k に対応する頂点を A_k とし、中心を O とおく。各頂点と円の中心を結ぶ n 本の線分で $a_k (1 \leq k \leq n)$ のそれぞれを 2 分割してできる計 $2n$ 個の角を考える。

$\angle OA_k A_{k+1} = b_k (k = 1, 2, \dots, n-1), \angle OA_n A_1 = b_n$ とおく。



$$\begin{aligned} b_n + b_1 &= a_1 = 135 \\ b_1 + b_2 &= a_2 = 135 + d \\ b_2 + b_3 &= a_3 = 135 + 2d \\ &\dots \dots \dots \\ b_{n-1} + b_n &= a_n = 135 + (n-1)d \end{aligned}$$

が成り立っている。

ここで n の偶奇で場合分けしよう。

(i) $n = 2m$ の場合

$$\begin{aligned} b_{2m} + b_1 &= a_1 = 135 \\ b_1 + b_2 &= a_2 = 135 + d \\ b_2 + b_3 &= a_3 = 135 + 2d \\ &\dots \dots \dots \\ b_{2m-2} + b_{2m-1} &= a_{2m-1} = 135 + (2m-2)d \\ b_{2m-1} + b_{2m} &= a_{2m} = 135 + (2m-1)d \end{aligned}$$

この式の奇数番目だけを足すと

$$(b_{2m} + b_1) + (b_2 + b_3) + \cdots + (b_{2m-2} + b_{2m-1}) = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1} = \{135m + (m-1)md\}$$

この式の偶数番目だけを足すと

$$(b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2m-1} + b_{2m}) = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m} = \{135m + m^2d\}$$

ところが左辺は同じものを表しているのだから、右辺は等しい。つまり $m = 0$ であり、これは矛盾である。従って n は偶数ではあり得ない。

(ii) $n = 2m + 1$ の場合

$$\begin{aligned} b_{2m+1} + b_1 &= a_1 = 135 \\ b_1 + b_2 &= a_2 = 135 + d \\ b_2 + b_3 &= a_3 = 135 + 2d \\ \cdots &\cdots \cdots \\ b_{2m-1} + b_{2m} &= a_{2m} = 135 + (2m-1)d \\ b_{2m} + b_{2m+1} &= a_{2m+1} = 135 + (2m)d \end{aligned}$$

この式の奇数番目だけを足すと

$$(b_{2m+1} + b_1) + (b_2 + b_3) + \cdots + (b_{2m} + b_{2m+1}) = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m+1} = 135(m+1) + m(m+1)d$$

この式の偶数番目だけを足すと

$$(b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2m-1} + b_{2m}) = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m} = 135m + m^2d$$

辺々引くと

$$2b_{2m+1} = 135 + md \implies b_{2m+1} = \frac{135 + md}{2}$$

この値を代入し直して

$$b_1 = \frac{135 - md}{2}, \quad b_2 = \frac{135 + (m+2)d}{2}$$

が分かる。 $\{b_{2k+1}\}, \{b_{2k}\}$ がそれぞれ公差 d の等差数列であることは容易に分かるので、偶数項と奇数項で規則の異なる数列として b_n が表示される。

$$\begin{cases} b_{2k+1} = \frac{135 - md}{2} + kd & (k = 0, 1, 2, \dots, m) \\ b_{2k} = \frac{135 + md}{2} + kd & (k = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

あとはこれらの各項が 90 未満である条件を調べればよい。偶数項、奇数項とも単調増加になっているので、末項のみ調べる。 $d = \frac{90(n-8)}{n(n-1)} = \frac{45(2m-7)}{m(2m+1)}$ であることに注意して

$$b_{2m+1} = \frac{135 + md}{2} < 90 \iff 135 + \frac{45(2m-7)}{2m+1} < 180 \iff 45(2m-7) < 45(2m+1)$$

これは成り立っている。

$$b_{2m} = \frac{135 + 3md}{2} < 90 \iff 135 + \frac{135(2m-7)}{2m+1} < 180 \iff 135(2m-7) < 45(2m+1) \iff m < \frac{11}{2}$$

これより $m \leq 5$ が必要である.

以上 (i)(ii) より n のとり得る値は $n = 9, 11$ のみであることが分かった. よって は 11 であるべきだが, このとき $a_{11} = 135 + 10 \cdot \frac{27}{11}$ となり に入らない.