For Tutors

MeBio　数学テキスト

# 射影幾何の作図問題

―山内先生の数学８の問題―

*Edited by* kamei

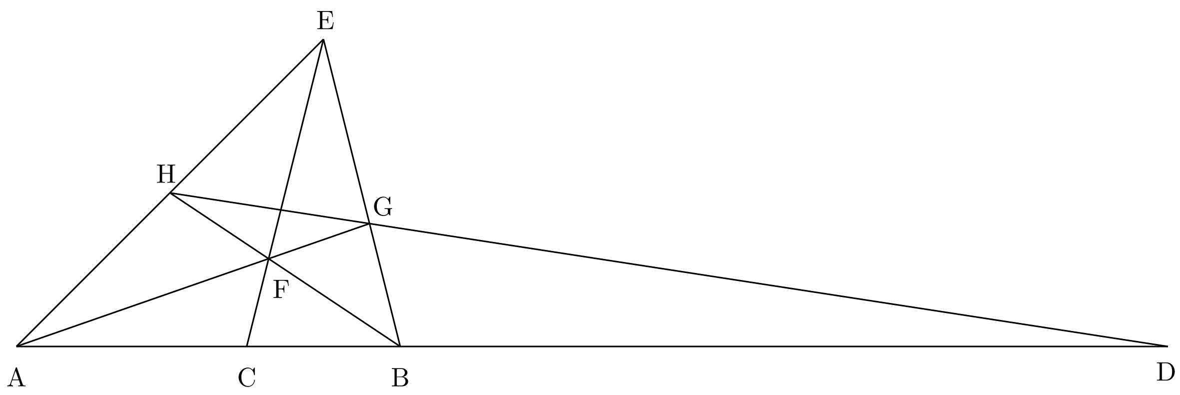
# 第 1 章

# 射影幾何の作図問題

## § 1　山内先生の数学 8 の問題

**問題** 1–1–1　線分 AB と，その $m:n$ の内分点 C が与えられているとき，AB を $m:n$ に外分する点 D を定規だけを使って作図して下さい．

**解答**



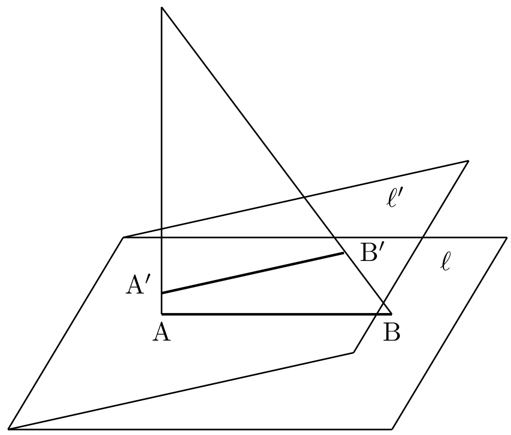

三角形 ABE を作り，AG, BH, EC が一点 F で交わるように作図する．チェバの定理より $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HA}}=1$ である．従って $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HA}}=\dfrac{n}{m}$ がわかる．このとき直線 HG と直線 AB の交点を D とすると，メネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HA}}=1$ である．従って $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HA}}=\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}$ である．これより $\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=m:n$ がわかった．

系　射影幾何において，線分 AB の $m:n$ の内分点を決定する $\iff$ 線分 AB の $m:n$ の外分点を決定する

**問題** 1–1–2　線分 AB の中点 C は，定規だけを使って作図することが不可能なことを証明して下さい．

**解答**

背理法で示す．仮に作図法が存在したとする．

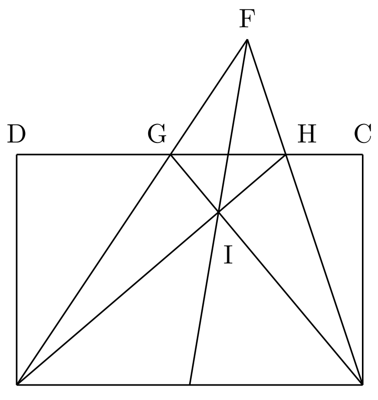



平面 $\ell$ における中点の作図法を平面 $\ell'$ に射影して考えても，作図者には $\ell$ と $\ell'$ の区別はつかないはずである．$\ell$ において中点が作図できたとしても，$\ell'$ における作図の結果は中点にはならない．つまり作図法が存在すると矛盾が起こる．

系　「中点である」という性質は，射影幾何における不変性質ではない．

**問題** 1–1–3　平面上に長方形 ABCD が描かれているとき，線分 AB の中点 M を，定規だけを使って作図してください．

$\boxed{\text{解答}}$




平面上に点 F を，線分 AF, BF が辺 CD と交わるようにとる．AF と CD の交点を G, BF と CD の交点を H とする．AH と BG の交点を I とし，AI の延長と BC の交点を M とすればよい．M が AB の中点であることは，チェバの定理から直ちに導かれる．

注意
1 : 1 の外分点（無限遠点）を与えることと平行線を与えることは同じと考えられるので，これは 1 : 1 の外分点が与えられたときに 1 : 1 の内分点を作図せよという問題と考えられる．

**問題** 1–1–4 **結構難問**
2 点 A, B がどんなに遠く離れていても，短い定規だけを使って線分 AB を作図することが可能であることを示して下さい．

**解答**

二段階に分けて証明する．第一段階では，A を通る直線で B にいくらでも近い直線が引けること．第二段階では，A を通り B に十分近い直線が二本存在するとき，B から A を通る直線が引けることを示す．

（第一段階）

定規が短い場合，遠く離れた点を直線で結ぶ方法は自明ではないが，短い線分を無限に延長することは可能である．そこで点 A から B に向かって直線 $\ell$ を引く．$\ell$ が B を通れば解決だがその確率は 0 である．むしろ B と $\ell$ の距離は定規の長さより大きいと思っておく方がよい．（このあたりの表現は数学的かもしれませんが，気にしないでください．）

補題 **1**

線分 AB が与えられたとき，可算無限回の操作で AB 内の稠密な部分集合を作図することが出来る．

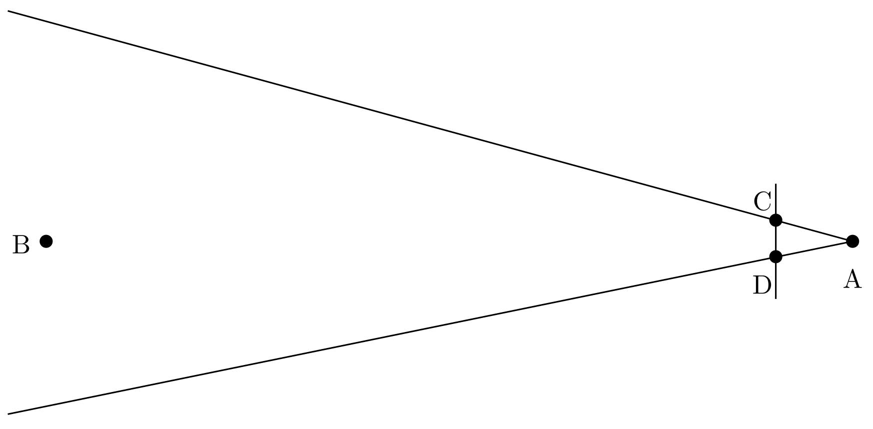
証明

先に証明したように，線分 AB の平行線が与えられているなら AB の中点を作図することが出来る．これを繰り返すと AB の $2^n$ 分点が作図できる．

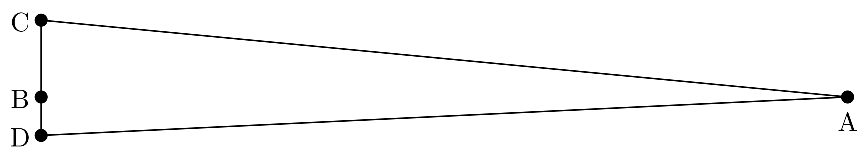
平行線が与えられていなくても，線分 AB と交点を持たない直線を引いてそれを平行線と見なして同様の操作をすると，$2^n$ 分点の射影変換点が得られるが，これらは $n \to \infty$ のとき AB 内で稠密になる．

証明終

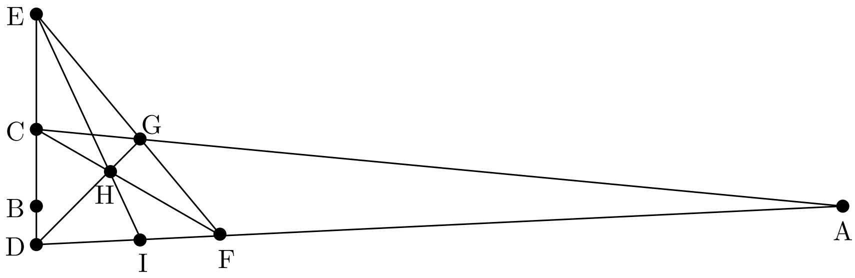
A を通る二本の直線を引く．A の近くで二直線と交わる直線を引き，その交点を C, D とする．ただし B が $\angle$CAD の内部に存在するようにする．補題 1 より CD の稠密な分点が作図できるので，A を通る直線で B にいくらでも近いものが作図できる．



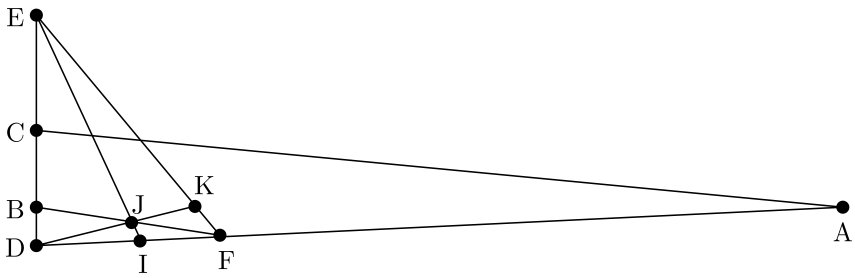

そこで A を通る二本の直線で B に十分近いものをとり，B を通る直線との交点を C, D とする．B の近傍では定規の長さは十分あるが，A は B から遠いとする．このとき B の近傍で作図することにより直線 BA が引けることを示せばよい．




作図法 **1**

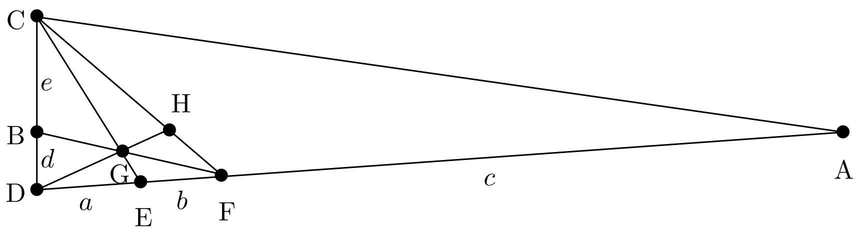



図のように CD 上に E, AD 上に F を，B の十分近くに取る．CF, DG の交点を H とし，EH と AD の交点を I とする．先に示したように，DI : IF $= m : n$ であれば DA : AF $= m : n$ である．

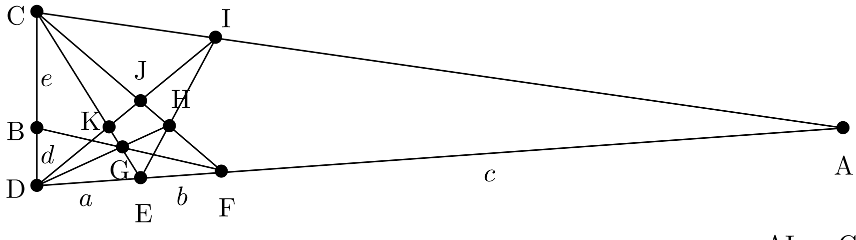



次に BF と EI の交点を J とし，DJ と EF の交点を K とする．BK と DF の交点は DF を $m : n$ に外分する点であるが，これは A のことである．つまり線分 BK を延長していけば A にたどり着く．

作図法 **2**




図のように AD 上に二点 E, F を，B の十分近くに取る．CE, BF の交点を G とし，DG と CF の交点を H とする．DE $= a$, EF $= b$, FA $= c$, DB $= d$, BC $= e$ とおく．チェバの定理より FH : HC $= bd : ae$ である．




GH と AC の交点を I とする．△ACF と直線 IHG に関するメネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HF}} \cdot \dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EA}} = 1 \iff$ $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}} = \dfrac{\mathrm{HF}}{\mathrm{CH}} \cdot \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{FE}} = \dfrac{bd}{ae} \cdot \dfrac{b+c}{b} = \dfrac{d(b+c)}{ae}$.

このとき $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}} \cdot \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{d(b+c)}{ae} \cdot \dfrac{e}{d} \cdot \dfrac{a}{(b+c)} = 1$ なので，チェバの定理の逆により AB, CE, DI は一点で交わる．つまり BK を延長すれば A にたどり着く．

作図法終

作図法が正しいことを，チェバ・メネラウスの定理を使わずに射影幾何的な発想で示したい．

**補題 2**

平面 $S$ 上に直線 $\ell$ と $\ell$ 上にない 3 点 P, A, A′ があり，P, A, A′ は一直線上にあるとする．このとき次の (1)〜(3) を満たす射影変換 $f$ がただ一つ存在する．

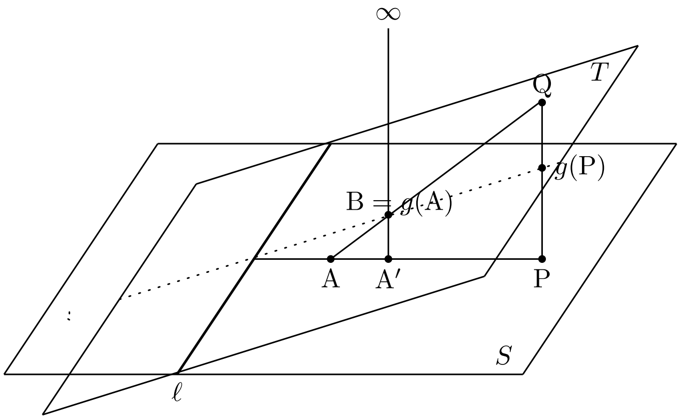
(1)　$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$.

(2)　$\ell$ 上の任意の点 Q について $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}$.

(3)　$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

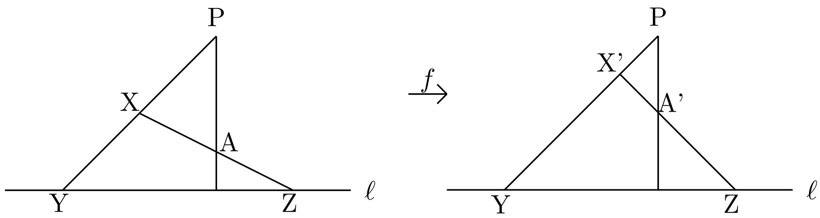
証明

平面 $S$ と直線 $\ell$ で交わる平面 $T$ を考える．（ただし $S, T$ は垂直ではないとする．）A′ を通る $S$ の法線と $T$ の交点を B とし，P を通る $S$ の法線と AB の交点を Q とする．




$g : S \to T$ を，Q を射影の中心とする射影変換とする．また $h : T \to S$ を，平面 $S$ への正射影とする．$f = h \circ g$ とすれば条件を満たす射影変換になっていることが分かる．

一意性については次の様に証明できる．

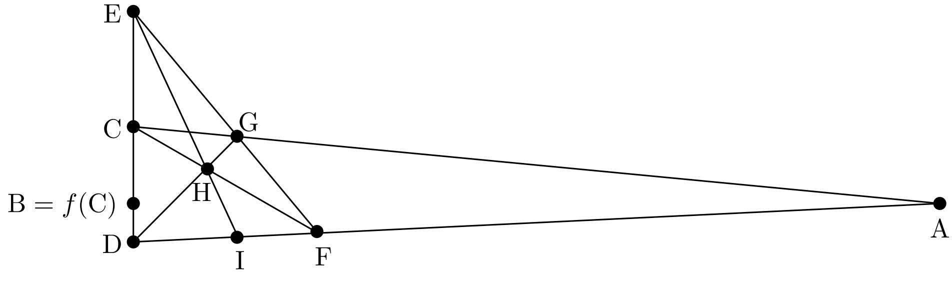



PX と $\ell$ の交点を Y, XA と $\ell$ の交点を Z とする．X は PY と AZ の交点だから $f(\mathrm{X})$ は $f(\mathrm{P})f(\mathrm{Y})$ と $f(\mathrm{A})f(\mathrm{Z})$ の交点である．つまり PY と A’Z の交点である．

証明終

作図法 **1** の別解釈

下図において，E および直線 DIFA 上の点を不動点，$f(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$ である射影変換 $f$ が，補題 2 により存在する．

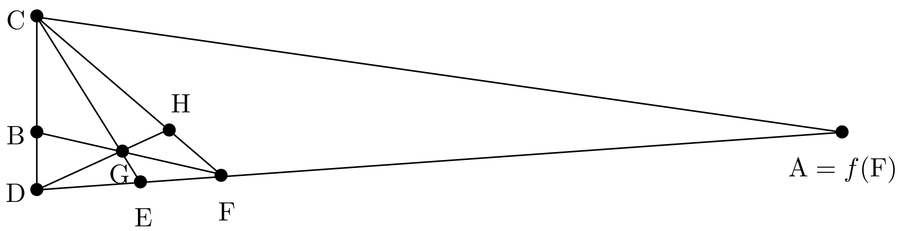


$f$(H), $f$(G) は共線条件，不動点条件から簡単に作図できる．

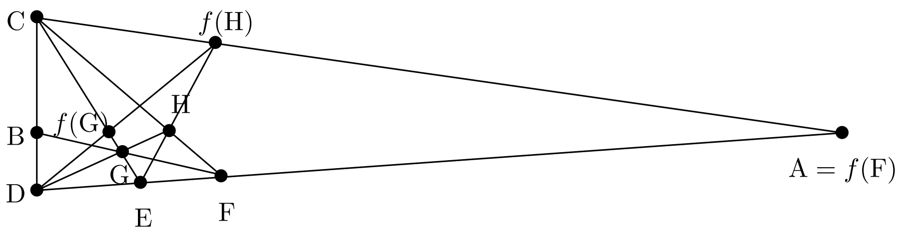

CGA が一直線に存在するので，$f$(C)$f$(G)A も一直線上にある．

作図法 **2** の別解釈

下図において，E および直線 CBD 上の点を不動点，$f(\mathrm{F}) = \mathrm{A}$ である射影変換 $f$ が，補題 2 により存在する．




$f$(H), $f$(G) は共線条件，不動点条件から簡単に作図できる．




BGF が一直線に存在するので，B$f$(G)$f$(F) つまり B$f$(G)A も一直線上にある．