For Tutors

MeBio　数学テキスト

組み合わせ理論の問題

—亀井の問題—

Edited by kamei

第 1 章

組み合わせ理論の問題

問題 1–1　　$m,\ n$ を自然数とする．1, 2, $\cdots$, n の数字の書かれたカードが各 m 枚ずつ，計 nm 枚ある．これらのカードをよく混ぜてから m 枚ずつの n グループに分ける．次を示せ．

各グループからうまく 1 枚ずつ選ぶと，1, 2, $\cdots$, n の数字をそろえることができる．

$\boxed{\text{解答}}$

命題を次のように表現しよう．

命題 $\mathbf{P}_{\boldsymbol{m,n}}$：　1, 2, $\cdots$, n に値を持つ nm 項の二重数列 $\{x_{i,j}\}$　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ があり，これらの項のうち値が 1, 2, $\cdots$, n になっているものがそれぞれ m 項ずつある．($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のそれぞれに対し $\#\{(i,\ j)\mid x_{i,j}=k\}=n$)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のそれぞれに対し，$x_{k,1}$, $x_{k,2}$, $\cdots$, $x_{k,m}$ をうまく入れ換えると，$\{x_{1,m},\ x_{2,m},\ \cdots,\ x_{n,m}\}=\{1,\ 2,\ \cdot,\ n\}$ とすることができる．

例　$n=4,\ m=5$ の場合

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

各行において適宜入れ換える（$x_{1,1}=1$ と $x_{1,5}=1$ など）ことにより，右端に 1〜4 を一つずつ集めることができる．

ここでもう少し主張の強い次の命題を考えよう．

命題 $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{m,n}}$：　1, 2, $\cdots$, n に値を持つ nm 項の二重数列 $\{x_{i,j}\}$　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ があり，これらの項のうち値が 1, 2, $\cdots$, n になっているものがそれぞれ m 項ずつある．($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のそれぞれに対し $\#\{(i,\ j)\mid x_{i,j}=k\}=n$)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のそれぞれに対し，$x_{k,1}$, $x_{k,2}$, $\cdots$, $x_{k,m}$ をうまく入れ換えると，すべての j　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ に対し，$\{x_{1,j},\ x_{2,j},\ \cdots,\ x_{n,j}\}=\{1,\ 2,\ \cdot,\ n\}$ とすることができる．

例　$n=4,\ m=5$ の場合

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

各行において適宜入れ換えることにより，どの列にも 1〜4 を一つずつ集めることができる．

以下では命題 $\mathrm{P}_{m,n}$ 並びに $\mathrm{Q}_{m,n}$ の成立を帰納法で証明する．そのために自然数のペア $(m,\ n)$ に次のような半順序をつける．

$$(m_1,\ n_1) \leqq (m_2,\ n_2) \Longleftrightarrow m_1 \leqq m_2 \text{ かつ } n_1 \leqq n_2$$

補題 1

$$\begin{array}{ll} & (m,\ n) \leqq (m_0,\ n_0) \text{ であるような自然数の組 } (m,\ n) \text{ に対し } \mathrm{P}_{m,n} \text{ が成り立つ．} \\ \Longleftrightarrow & (m,\ n) \leqq (m_0,\ n_0) \text{ であるような自然数の組 } (m,\ n) \text{ に対し } \mathrm{Q}_{m,n} \text{ が成り立つ．} \end{array}$$

証明

（$\Longleftarrow$）については明らかである．（$\Longrightarrow$）については次の通り．

$\mathrm{P}_{m,n}, \mathrm{P}_{m-1,n}, \cdots, \mathrm{P}_{1,n}$ の成立を仮定すると，$\{x_{i,j}\}$ の右端の列から一列ずつ $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ を集めていくことにより，$\mathrm{Q}_{m,n}$ の成立がいえる．

補題 1 の証明終

補題 2

$m = 1$ または $n = 1$ のとき，$\mathrm{P}_{m,n}$ および $\mathrm{Q}_{m,n}$ は成り立つ．

証明

$m = 1$ のときは各数字が一つずつしか存在せず，$\{x_{i,j}\}$ は n 行 1 列なので明らか．

$n = 1$ のときは 1 だけが m 枚存在し，$\{x_{i,j}\}$ は 1 行 m 列なので明らか．

補題 2 の証明終

定理

$M,\ N$ を 2 以上の自然数とする．$(m,\ n) < (M,\ N)$ であるような自然数の組 $(m,\ n)$ に対し $\mathrm{P}_{m,n}$ および $\mathrm{Q}_{m,n}$ が成り立っているなら，$\mathrm{P}_{M,N}$ および $\mathrm{Q}_{M,N}$ も成り立つ．

証明

$\{x_{i,j}\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ M)$ を考えよう．$x_{i,j}$ のどれかは N に等しいので，N を含む行が存在する．必要なら適当に行を入れ換えることにより，その行を第 N 行であるとしてもよい．さらに第 N 行内で適当に列を入れ換えることにより，$x_{N,M} = N$ と仮定しても一般性を失わない．

ここで N 行目の数 $x_{N,1}, x_{N,2}, \cdots, x_{N,M}$ がすべて N に等しければ $(M,\ N-1)$ の場合に帰着する．そうでない場合は適当に並べ換えて，$x_{N,1} < N, x_{N,2} < N, \cdots, x_{N,k} < N, x_{N,k+1} = x_{N,k+2} = \cdots = x_{N,M} = N$ としよう．要するに第 N 行目には N 以外の数が k 個あり，N が $M - k$ 個あるとするわけである．$(1 \leqq k < M)$

この場合，N 行目以外に数 N が k 個存在する．それらを $x_{i_1,j_1}, x_{i_2,j_2}, \cdots,\ x_{i_k,j_k}$ とする．x_{i_1,j_1} と $x_{N,1}, x_{i_2,j_2}$ と $x_{N,2}, \cdots, x_{i_k,j_k}$ と $x_{N,k}$ を入れ換える．この k 組の入れ換えによりすべての N は第 N 行に集まる．

$(N-1)M$ の数 $\{x_{i,j}\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ (N-1);\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ M)$ は値が $1,\ 2,\ \cdots,\ (N-1)$ になっているものがそれぞれ M 項ずつあるので，帰納法の仮定により $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ (N-1)$ のそれぞれに対し，$x_{k,1},\ x_{k,2},\ \cdots,\ x_{k,M}$ をうまく入れ換えると，すべての $j \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ M)$ に対し，$\{x_{1,j},\ x_{2,j},\ \cdots,\ x_{N-1,j}\} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ N-1\}$ とすることができる．

これらの数の中には先の入れ換えによって N と入れ換えられた物が混ざっているかもしれないが，入れ換えは k 箇所おこなわれ，j は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ M\}$ の任意の数だから $k < M$ と合わせて考えると，第 N 行目と入れ換えなく

ても $\{x_{1,j},\ x_{2,j},\ \cdots,\ x_{N-1,j}\} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ N-1\}$ となっている列が存在するはずである．それを第 M 列に移動すれば，$x_{N,M} = N$ とあわせて $\{x_{1,j},\ x_{2,j},\ \cdots,\ x_{N,j}\} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ とすることができる．

以上より $\mathrm{P}_{M,N}$ の成立が分かった．補題 1 により $\mathrm{Q}_{M,N}$ も成立する． 定理の証明終

わかりにくいと思うので，例で説明します．

例：$N=4,\ M=5$ の場合

$$
\left(\begin{array}{ccccc} 1&1&1&4&3\\ \hline 1&\mathbf{4}&2&3&3\\ \hline 1&2&2&3&3\\ \hline 2&4&4&4&2 \end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc} 1&1&1&4&3\\ \hline 1&2&2&3&3\\ \hline 2&4&4&4&2\\ \hline 1&\mathbf{4}&2&3&3 \end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc} 1&1&1&4&3\\ \hline 1&2&2&3&3\\ \hline 2&4&4&4&2\\ \hline 1&2&3&3&\mathbf{4} \end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc} 1&1&1&\textcircled{4}&3\\ \hline 1&2&2&3&3\\ \hline 2&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&2\\ \hline \textcircled{1}&\textcircled{2}&\textcircled{3}&\textcircled{3}&\mathbf{4} \end{array}\right)
$$

$$
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc} 1&1&1&\textcircled{1}&3\\ \hline 1&2&2&3&3\\ \hline 2&\textcircled{2}&\textcircled{3}&\textcircled{3}&2\\ \hline \textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\mathbf{4} \end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1&1&1&3&\textcircled{1}\\ \hline 2&2&3&1&3\\ \hline \textcircled{3}&\textcircled{3}&2&\textcircled{2}&2\\ \hline \textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\mathbf{4} \end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1&1&3&\textcircled{1}&1\\ \hline 2&2&1&3&3\\ \hline \textcircled{3}&\textcircled{3}&\textcircled{2}&2&2\\ \hline \textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&\mathbf{4} \end{array}\right)
$$

$$
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1&1&3&\textcircled{4}&1\\ \hline 2&2&1&3&3\\ \hline \textcircled{4}&\textcircled{4}&\textcircled{4}&2&2\\ \hline \textcircled{1}&\textcircled{2}&\textcircled{3}&\textcircled{3}&\mathbf{4} \end{array}\right)
$$

操作１　 4 を含む行をひとつ見つけ（今の場合２行目），それを一番下の４行目に移動する．

操作２　４行目内で 4 を右に寄せる．

操作３　４行目以外に存在する 4 に○をつける．また，４行目の 4 以外の数に○をつける．これらは同数存在し，その数は M 未満であることに注意しておく．

操作３　４行目以外の○付きの数と４行目の○付きの数を交換する．すべての 4 は４行目に集まる．

操作４　帰納法の仮定により，３行目までを行内で入れ換えて，どの列にも 1, 2, 3 がそろうようにできる．（する．）

操作５　３行目までの各列には 1, 2, 3 がそろっているが，○の付いていない数だけからなる列が存在するはずである．それを右端に持って行く．

操作６　○付きの数字の入れ換えを元に戻す．

操作７　一番右端には 1, 2, 3, 4 がそろっていることになる．

補題２が成り立ち定理が成り立つので，帰納法が働いてすべての $m,\ n$ について命題 $\mathrm{P}_{m,n}$ 並びに $\mathrm{Q}_{m,n}$ が成り立つことが分かる．これも例で説明しておくと次のようになる．

例：

m/n	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	○	○	○	○	○	$\cdots$
2	○	○	○	○	★	
3	○	○	★			
4	○	○				
5	○	○				
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$				

$(m,\ n)$ に関して ○ の値での $\mathrm{P}_{m,n}$, $\mathrm{Q}_{m,n}$ の成立が仮定されているときは，★ の値に関する成立も定理から保証される．