For Tutors

MeBio　数学テキスト

群論の問題

—亀井の問題—

Edited by kamei

第 1 章

群論

問題 1–1　位数 60 の単純群 G は A_5 に同型であることを，次のような手順で証明しました．各ステップのちゃんとした理由がわかりますか.

(1)　G の 5-Sylow 部分群は 6 個ある．それを $P_1, \cdots P_6$ とおく．

(2)　G は共役作用により $P_1, \cdots P_6$ の置換を引き起こす．これにより準同型 $f : G \to S_6$ が定義される．

(3)　f は単射であり，その像は A_6 に含まれる．これにより G を A_6 の部分群と見なす．
（G は A_6 の自明な部分 A_5 群ではない．）

(4)　A_6 を左剰余 $G \setminus A_6$ の置換群と考えることにより，準同型 $g : A_6 \to S_6$ が誘導されるが，これは A_6 への同型写像である．

(5)　$g(G)$ は $S(G \setminus A_6)$ の第 1 要素 G の固定化群である．従って $G \cong A_5$ が示された．

問題 1–2　上の証明で (4) 以下を次のように変えてもかまいません．

(4)　$A_6 \supset G$ において G の正規化群は $N_{A_6}(G) = G$ である．

(5)　A_6 を G の共役群の集合 $\{G_1, \cdots G_6\}$ の置換群と見なすと，準同型 $g : A_6 \to S_6$ が誘導されるが，これは A_6 への同型写像である．

(6)　$g(G)$ は $S(G \setminus A_6)$ の第 1 要素 G の固定化群である．従って $G \cong A_5$ が示された．

問題 1–3

(1)　上の証明における同型写像 $g : A_6 \to A_6$ は，自明な自己同型ではありません．この具体例を挙げて下さい．
（$g((1\ 2))$, $g((1\ 3))$, $g((1\ 4))$, $g((1\ 5))$, $g((1\ 2\ 3))$, $g((1\ 2\ 3\ 4\ 5))$ をあげて下さい．）

(2)　A_6 にはこれ以外の例外自己同型が無いことを示して下さい．つまり $|\mathrm{Aut}(G) : S_6| = 2$ を示して下さい．

問題 1–4　位数 60 の単純群 G は A_5 に同型であることの別証明です．かなり趣味的ですがおもしろいですよ．

(1)　G の 5-Sylow 部分群のひとつを $P = \langle x \rangle$ とおく．$x^5 = e$ である．5-Sylow 群は全部で 6 つあり．, G は位数 5 の元を 24 個もつ．

(2)　$N_G(P) = H$ とする．$|H| = 10$ である．H は G の極大部分群である．

(3)　G の 3-Sylow 部分群は 4 個もしくは 10 個あるが，4 個ではあり得ない．従って 3-Sylow は 10 個あり，G は位数 3 の元を 20 個もつ．

(4)　H は可換群ではない．（可換だと仮定して位数 10 の元の個数を考えよ．）

(5)　H の位数 2 の元 y をとる．$Q = \langle y \rangle$ とおく．$H = PQ = \langle x, y \rangle$, $x^5 = y^2 = e$, $yxy = x^{-1}$ である．H は位数 2 の元を 5 個持つ．この 5 個の元はすべて H の内部で共役である．

(6)　H の共役は全部で 6 個ある．この中に位数 2 の元は延べ 30 個あるが，これらの元はすべて G の中で共役である．

(7)　この延べ 30 個のどの元をとっても，それを含む 5-Sylow の個数は一定である．従って位数 2 の元は重複を除くと 30, 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1 個であるが，15 個以外の可能性はない．

(8)　G は位数 5 の元が 24 個，位数 3 の元が 20 個，位数 2 の元が 15 個，位数 1 の元が 1 個からなる．G の 2-Sylow 群は (2, 2) 型の可換群である．

(9)　y を含む 2-Sylow 群が $\langle y,\ t\rangle$ であるとする．$t^2 = tyty = e$ である．

(10)　$t \in H$ ではない．$G = \langle x,\ y,\ t\rangle$ である．

(11)　$G = H \cup HtP$ である．この和集合は disjoint である．従って G の元は $x^m y^s$ または $x^m y^s t x^n$ の形に唯一通りに表せる．

(12)　$txt = x^m y^s$ ではあり得ない．そこで $txt = x^m y^s t x^n$ とする．

(13)　上の表示の逆元を考えると $tx^{-1}t = x^{-n}y^{-s}tx^{-n}$ であるが，$x^{-1} = yxy$ でもあるので，$tx^{-1}t = tyxyt = ytxty = yx^m y^s t x^n y = x^{-m} y y^s t y x^{-n} = x^{-m} y^s t x^{-n}$ となり，$m = n$ がわかる．

(14)　$s = 0,\ 1$ であるが，必要があれば t を yt に置き換えることにより，$s = 0$ と仮定してもよい．従って，$txt = x^m t x^m$ としてよい．

(15)　$m = 0$ つまり $txt = t$ は矛盾する．$m = 1$ つまり $txt = xtx$ も矛盾する．$m = 2$ つまり $txt = x^2tx^2$ も矛盾する．$m = 3$ つまり $txt = x^3tx^3$ も矛盾する．従って $m = 4$ つまり $txt = x^{-1}tx^{-1}$ しかあり得ない．これは $(xt)^3 = e$ と書き直される．

(16)　$F = \langle x,\ y,\ t\rangle$, $x^5 = y^2 = t^2 = (yt)^2 = (xt)^3 = e$ で表される群を考えると，F は位数 120 の群であることがわかる．

(17)　F は位数 2 の正規部分群 $K = \{tx^2tyx^2tx^3, e\}$ を持つ．$K \subset Z(F)$（中心）であることもわかる．$G \cong F/K$ である．

(18)　以上により G の構造はただ 1 通りに決定されることがわかった．従って $G \cong A_5$ である．実際 $x = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $y = (2\ 5)(3\ 4)$, $t = (2\ 3)(4\ 5)$ とおくと，$F/K \to A_5$ が well defined であることがわかる．

問題 1–5　上の証明で $|F| = 120$ は予定外でした．F は A_5 の中心拡大になっています．F の，部分群 $\langle x,\ y\rangle$ に関する剰余類への置換表現は
$x = (1)(2\ 3\ 5\ 6\ 4)(8\ 9\ 10\ 12\ 11)(13)$, $y = (1)(2)(3\ 4)(5\ 6)(8\ 9)(10\ 11)(12)(13)$, $t = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 8)(6\ 9)(10\ 11)(12\ 13)$
となっています．これを避けるための泥縄式の証明も考えました．要は不足している関係式を書くわけです．（なぜこんな関係式を考えるかは，先に与えられるとわからないでしょう．）(1)〜(15) までは同じです．

(16)　$tx^2t = x^m y^s$ ではあり得ない．そこで $tx^2t = x^m y^s t x^n$ とする．

(17)　色々やってみると $tx^2t = x^2ytx^2$ 以外は矛盾する．

(18)　$F = \langle x,\ y,\ t\rangle$, $x^5 = y^2 = t^2 = (yt)^2 = (xt)^3 = e$, $tx^2t = x^2ytx^2$ で表される群を考えると，F は位数 60 の群であることがわかる．

問題 1–6　ルービックキューブの変換群 G の位数が $\dfrac{12! \times 2^{12} \times 8! \times 3^8}{2 \times 3 \times 2}$ であることを証明して下さい．