For Tutors

MeBio　数学テキスト

平面幾何の有名問題

—亀井の解答—

Edited by kamei

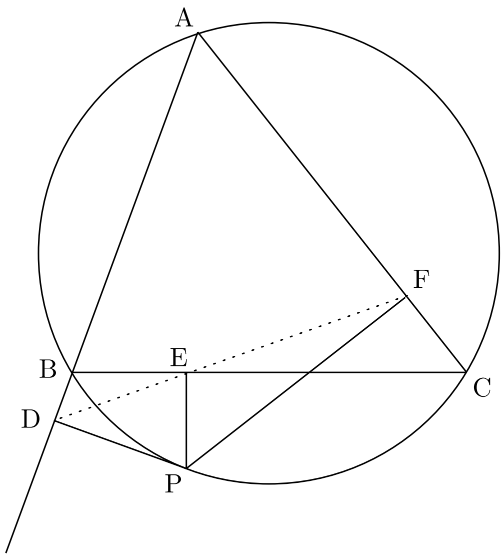
第 1 章

平面幾何

有名な問題たちだと思います．

問題 1–1 シムソン線

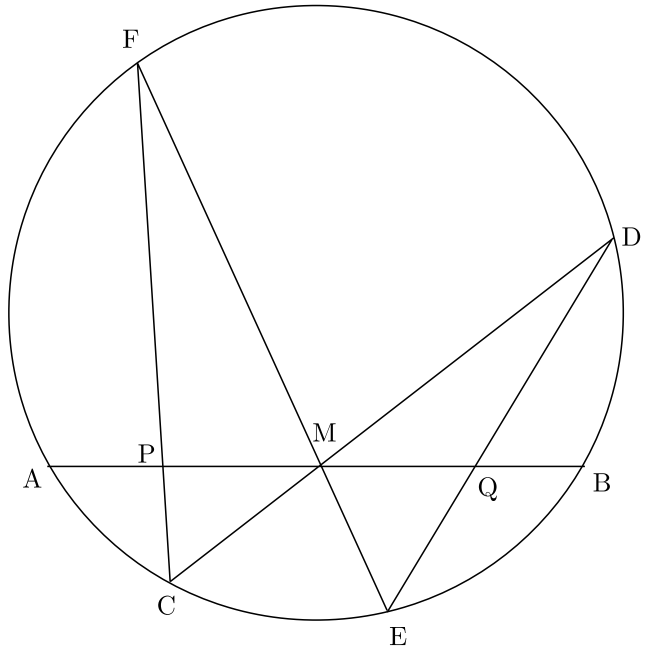
$\triangle$ABC の外接円の周上の点 P から，3 辺 AB，BC，CA にそれぞれ下ろした垂線の足は 1 直線上にあることを示せ．この直線はシムソン線と呼ばれる．



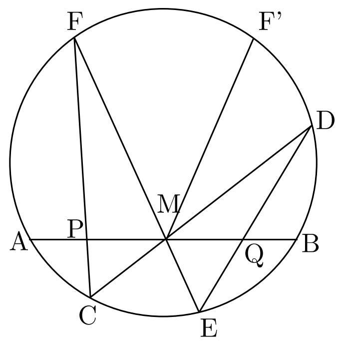
解答

$\angle \mathrm{FCP} = \alpha$ とおくと $\angle \mathrm{FPC} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ である．四辺形 EPCF は共円だから $\angle \mathrm{CEF} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ が分かる．一方四辺形 ABPC は共円だから $\angle \mathrm{ABP} = \pi - \angle \mathrm{FCP} = \pi - \alpha$ であり，$\angle \mathrm{DBP} = \alpha$ となる．四辺形 BDPE は共円だから $\angle \mathrm{BED} = \angle \mathrm{BPD} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ が分かる．以上より $\angle \mathrm{BED} = \angle \mathrm{CEF}$ が分かった．これは DEF が一直線上にあることを意味する．

問題 1–2 胡蝶定理　図のように，線分 AB を弦とする円が与えられている．AB の中点を M とし，M を通る弦 CD, EF を図のように取る．CF と AB の交点を P, DE と AB の交点を Q とおく．このとき，M は PQ の中点になっていることを証明せよ．



解答

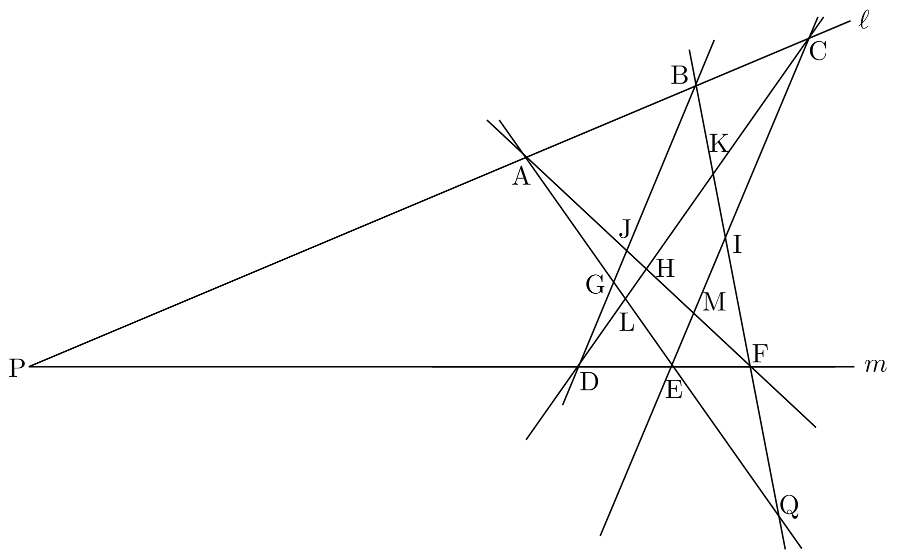


M を通る AB の垂線に関して F の対称点を F' とする．F' は円周上の点であり，FF' は AB に平行である．従って $\angle\mathrm{AMF} = \angle\mathrm{MFF}' = \angle\mathrm{MF}'\mathrm{F} = \angle\mathrm{F}'\mathrm{MB} = \theta$ とおいてよい．

FF'DE は共円だから $\angle\mathrm{F}'\mathrm{DE} = \pi - \angle\mathrm{F}'\mathrm{FE} = \pi - \theta$ である．これより $\angle\mathrm{F}'\mathrm{DQ} + \angle\mathrm{F}'\mathrm{MQ} = \pi$ がわかるので，F'DQM は共円である．従って $\angle\mathrm{MF}'\mathrm{Q} + \angle\mathrm{MDQ} = \angle\mathrm{MFP}$ が得られ，$\triangle\mathrm{MF}'\mathrm{Q} \equiv \triangle\mathrm{MFP}$ がいえる．

問題 1–3 パップスの定理

図のように直線 ℓ 上に三点 A, B, C, 直線 m 上に三点 D, E, F を取る．直線 AE, AF, BD, BF, CD, CF の交点を図のように G〜M とする．このとき G, H, I が一直線上に並ぶこと証明せよ．



解答

チェバ・．メネラウスの定理による解法

直線 ℓ と直線 m の交点を P，直線 AE と直線 BF の交点を Q とする．三角形 QLK といろいろな直線に関するメネラウスの定理を考えてみる．

△QLK	と	直線 EIC	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{QE}}{\mathrm{EL}} \times \dfrac{\mathrm{LC}}{\mathrm{CK}} \times \dfrac{\mathrm{KI}}{\mathrm{IQ}} = 1$
△QLK	と	直線 AHF	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{AL}} \times \dfrac{\mathrm{LH}}{\mathrm{HK}} \times \dfrac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FQ}} = 1$
△QLK	と	直線 GDB	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{QG}}{\mathrm{GL}} \times \dfrac{\mathrm{LD}}{\mathrm{DK}} \times \dfrac{\mathrm{KB}}{\mathrm{BQ}} = 1$
△QLK	と	直線 m	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{EL}}{\mathrm{QE}} \times \dfrac{\mathrm{DK}}{\mathrm{LD}} \times \dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{KF}} = 1$
△QLK	と	直線 l	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{AL}}{\mathrm{QA}} \times \dfrac{\mathrm{CK}}{\mathrm{LC}} \times \dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{KB}} = 1$
			全部掛け合わせて	$\dfrac{\mathrm{QG}}{\mathrm{GL}} \times \dfrac{\mathrm{LH}}{\mathrm{HK}} \times \dfrac{\mathrm{KI}}{\mathrm{IQ}} = 1$

メネラウスの定理の逆より，この式は三点 G, H, I が一直線上に存在することを意味している．

射影変換を利用した解法１

この平面を射影平面に埋め込んで考える．

C を射影の中心とする直線 AF から直線 m への射影写像を f とすると，$f(\mathrm{A}) = \mathrm{P}$, $f(\mathrm{M}) = \mathrm{E}$, $f(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.

B を射影の中心とする直線 m から直線 AQ への射影写像を g とすると，$g(\mathrm{P}) = \mathrm{A}$, $g(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$, $g(\mathrm{F}) = \mathrm{Q}$.

I を射影の中心とする直線 AQ から直線 AF への射影写像を h とすると，$h(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $h(\mathrm{E}) = \mathrm{M}$, $h(\mathrm{Q}) = \mathrm{F}$.

これらの写像の合成変換 $h \circ g \circ f : m \to m$ は，三点 A, M, F を不動にするので，恒等変換である．従って $\mathrm{H} = h \circ g \circ f(\mathrm{H}) = h \circ g(\mathrm{D}) = h(\mathrm{G})$．これは G, H, I が一直線上に並んでいることを表す．

射影変換を利用した解法２

この平面を射影平面に埋め込んで考える．

A を射影の中心とする直線 NJGD から直線 m への射影写像を f とすると，

$$f(\mathrm{B}) = \mathrm{P},\ f(\mathrm{J}) = \mathrm{F},\ f(\mathrm{G}) = \mathrm{E},\ f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}.$$

C を射影の中心とする直線 m から直線 BKIF への射影写像を g とすると，

$$g(\mathrm{P}) = \mathrm{B},\ g(\mathrm{F}) = \mathrm{F},\ g(\mathrm{E}) = \mathrm{I},\ g(\mathrm{D}) = \mathrm{K}.$$

合成写像 $g \circ f$ により，

$$g \circ f(\mathrm{B}) = \mathrm{B},\ g \circ f(\mathrm{J}) = \mathrm{F},\ g \circ f(\mathrm{G}) = \mathrm{I},\ g \circ f(\mathrm{D}) = \mathrm{K}.$$

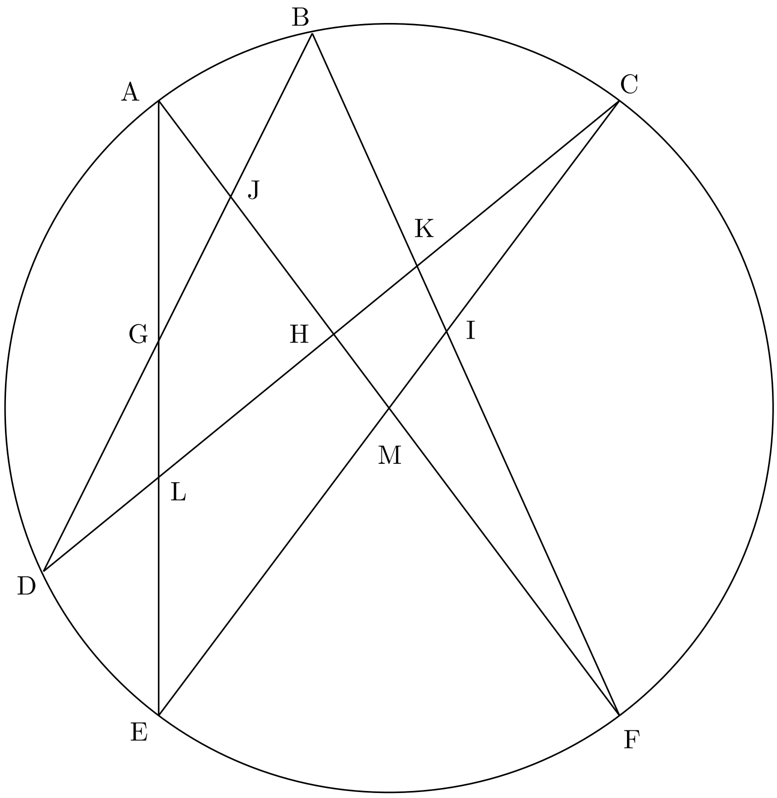
ところが，H を射影の中心とする直線 BJGD から直線 BKIF への射影写像を h とすると，

$$h(\mathrm{B}) = \mathrm{B},\ h(\mathrm{J}) = \mathrm{F},\ h(\mathrm{D}) = \mathrm{K}.$$

三点の像が一致しているので $h = g \circ f$ である．従って $h(\mathrm{G}) = \mathrm{I}$，これは G, H, I が一直線上に並んでいることを表す．

これらの写像により $h \circ g \circ f : m \to m$ は三点 A, M, F を不動にするので，恒等変換である．従って $\mathrm{H} = h \circ g \circ f(\mathrm{H}) = h \circ g(\mathrm{D}) = h(\mathrm{G})$．これは G, H, I が一直線上に並んでいることを表す．

問題 1–4 パスカルの定理　図のように円上に六点 A, B, C, D, E, F を取る．直線 AE, AF, BD, BF, CD, CF の交点を図のように G〜M とする．このとき G, H, I が一直線上に並ぶこと証明せよ．



解答

チェバ・．メネラウスの定理による解法

直線 AE と直線 BF の交点を N とする．

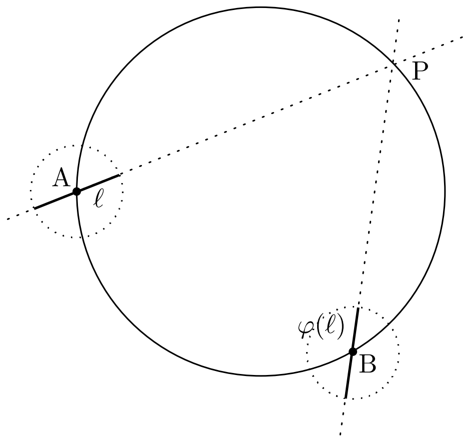
$\triangle$NLK	と	直線 EIC	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{NE}}{\mathrm{EL}} \times \dfrac{\mathrm{LC}}{\mathrm{CK}} \times \dfrac{\mathrm{KI}}{\mathrm{IN}}$	$= 1$
$\triangle$NLK	と	直線 AHF	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AL}} \times \dfrac{\mathrm{LH}}{\mathrm{HK}} \times \dfrac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FN}}$	$= 1$
$\triangle$NLK	と	直線 GDB	に関するメネラウスの定理より	$\dfrac{\mathrm{NG}}{\mathrm{GL}} \times \dfrac{\mathrm{LD}}{\mathrm{DK}} \times \dfrac{\mathrm{KB}}{\mathrm{BN}}$	$= 1$
直線 NBF	と	直線 NAE	に関する方巾の定理より	$\mathrm{NB} \times \mathrm{NF}$	$= \mathrm{NA} \times \mathrm{NE}$
直線 ALE	と	直線 DLC	に関する方巾の定理より	$\mathrm{LE} \times \mathrm{LA}$	$= \mathrm{LD} \times \mathrm{LC}$
直線 CKD	と	直線 BKF	に関する方巾の定理より	$\mathrm{KC} \times \mathrm{KD}$	$= \mathrm{KB} \times \mathrm{KF}$
			全部掛け合わせて	$\dfrac{\mathrm{NG}}{\mathrm{GL}} \times \dfrac{\mathrm{LH}}{\mathrm{HK}} \times \dfrac{\mathrm{KI}}{\mathrm{IN}}$	$= 1$

メネラウスの定理の逆より，この式は三点 G, H, I が一直線上に存在することを意味している．

射影変換を利用した解法

命題　円 C 上に 2 点 A, B があるとする．A を通る直線群 $L(\mathrm{A})$, B を通る直線群 $L(\mathrm{B})$ は射影直線 $\mathbf{P}_1$ と見なすことができる．写像 $\varphi : L(\mathrm{A}) \to L(\mathrm{B})$ を次の様に定める．

$\ell \in L(\mathrm{A})$ と C の A でない方の交点を P とする．$\varphi(\ell) =$ 直線 BP と定める．



このとき φ は射影写像になっている．

証明　円周角の定理より φ は回転で与えられる写像である．

証明終

先ほどの図に戻る．円周上の二点 A, C に対して，命題で与えられる射影写像 $\varphi : L(\mathrm{A}) \to L(\mathrm{C})$ を考える．交点を考えることにより，自然に $L(\mathrm{A}) =$ 直線 BJGD とみなせる．同様に $L(\mathrm{B}) =$ 直線 BKIL とみなせる．このとき $\varphi :$ 直線 BJGD $\to$ 直線 BKIL において $\varphi(\mathrm{D}) = \mathrm{K}$, $\varphi(\mathrm{G}) = \mathrm{I}$, $\varphi(\mathrm{J}) = \mathrm{F}$, $\varphi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ であることが分かる．

ところが H を中心とする直線 BJGD　から直線 BKIL への射影を ψ とすると $\psi(\mathrm{D}) = \mathrm{K}$, $\psi(\mathrm{J}) = \mathrm{F}$, $\psi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ であるから，φ と ψ は一致する．従って $\psi(\mathrm{G}) = \mathrm{I}$ が成り立つ．これは G, H, I が一直線上に存在することを表す．

問題 1–5 モーレーの正三角形　三角形 ABC の角 A, B, C をそれぞれ三等分する．図のように，角の三等分線の交点を，D, E, F とおく．このとき，△DEF が正三角形になることが知られている．(モーレーの正三角形という．)

これを証明しよう．

△ABC の外接円の半径を R とする．$\angle\mathrm{BAF} = \angle\mathrm{FAE} = \angle\mathrm{EAC} = \alpha$, $\angle\mathrm{ABF} = \angle\mathrm{FBD} = \angle\mathrm{DBC} = \beta$, $\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{DCE} = \angle\mathrm{ECA} = \gamma$ とおく．

(1) 一般に $\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ が成り立つことを証明せよ

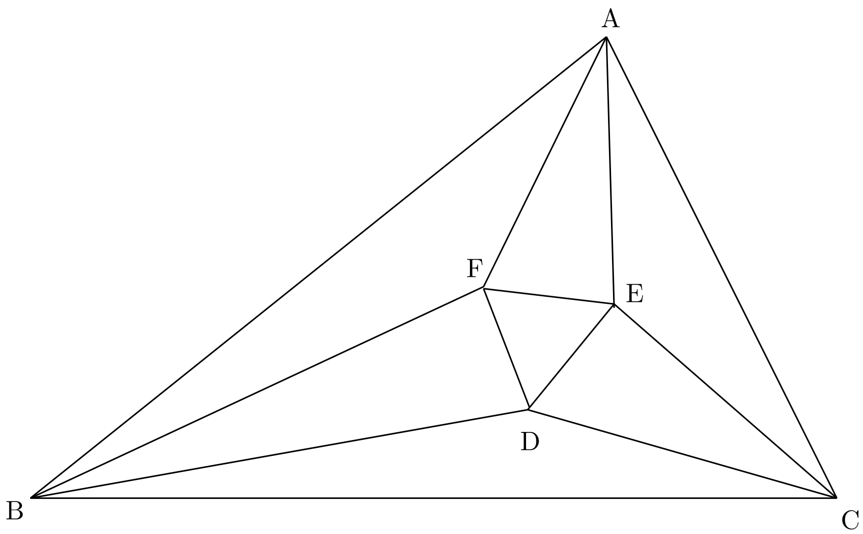
(2) △ABF の外接円の半径を R' とすると，$R' = 4R\sin\gamma\sin\left(\gamma + \dfrac{\pi}{3}\right)$ であることを示せ．

(3) $\mathrm{BF} = 8R\sin\alpha\sin\gamma\sin\left(\gamma + \dfrac{\pi}{3}\right)$ であることを示せ．

(4) 一般に $x + y + z = \pi$ であるとき，$\sin^2 z = \sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x\sin y\cos z$ であることを示せ．

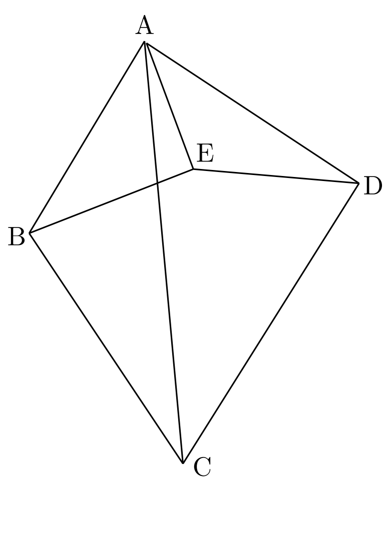
(5) $\mathrm{DF} = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ であることを示せ．

DF が α, β, γ の対称式で表されたということは $\mathrm{DF} = \mathrm{FE} = \mathrm{ED}$ であることを意味する．



問題 1–6 トレミーの不等式　平面内に 4 点 A, B, C, D があるとき，$\mathrm{AB} \times \mathrm{CD} + \mathrm{BC} \times \mathrm{AD} \geqq \mathrm{AC} \times \mathrm{BD}$ が成り立つ．等号は A, B, C, D がこの順に同一円上に存在するか，その極限として一直線上に存在するときである．これを証明せよ．

$\boxed{\text{解答}}$



四辺形 ABCD の内部に △ABC ∽ △AED となる点 E をとる．
$\mathrm{AC} : \mathrm{BC} = \mathrm{AD} : \mathrm{ED}$ より $\mathrm{BC} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{ED} \cdots$①．

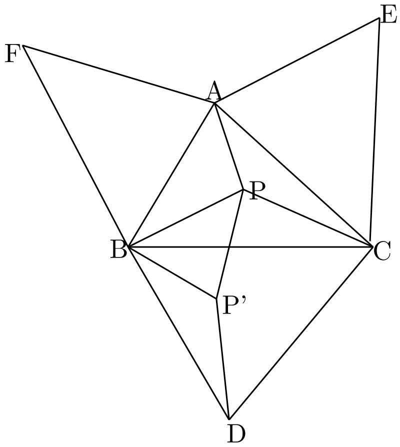
このとき △ABE∽ △ACD も容易に分かり，$\mathrm{AB} : \mathrm{BE} = \mathrm{AC} : \mathrm{CD}$ より $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BE} \cdots$②．

① + ② より $\mathrm{BC} \cdot \mathrm{AD} + \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} = \mathrm{AC} \cdot (\mathrm{BE} + \mathrm{ED}) \geqq \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$.

等号は B, E, D が一直線上に並ぶときであるが，これは $\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BDA}$ と同値であるから，ABCD が共円の時である．

問題 1–7 シュタイナー点（フェルマー点）　平面内に鋭角三角形 ABC が与えられているとき，△ABC の内部に点 P をとって AP + BP + CP を最小にしたい．このような点 P の作図法を与えよ．

解答



三角形 ABC の外部に三つの正三角形 △DBC, △ECA, △FAB をとる．三角形 ABC の内部の点 P に対して △BPP′ が正三角形となるように P' を（BP に関して A の反対側に）とる．△BPP′ が正三角形なので BP = PP′ である．また △BPC ≡ △BP′D なので CP = DP′ である．

以上より AP + BP + CP = AP + PP′ + P′D であることがわかった．従って A, P, P, D が一直線上に並べられれば AP + BP + CP　が最小になるが，これは可能である．

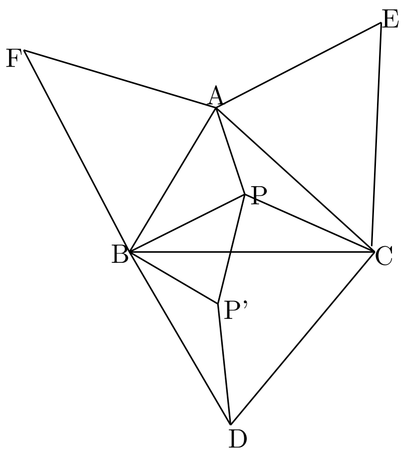
この場合 P は AD, BE, CF の交点となる．また $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{CPA} = \dfrac{\pi}{3}$ となり，P は △DBC, △ECA, △FAB のそれぞれの外接円の交点でもある．

問題 1–8 重み付きシュタイナー点

(1)　正の 3 数 a, b, c を，ある鋭角三角形の三辺になっている 3 実数とする．平面内に（それとは別の）鋭角三角形 ABC が与えられているとき，△ABC の内部に点 P をとって $a\mathrm{AP} + b\mathrm{BP} + c\mathrm{CP}$ を最小にしたい．このような点 P の作図法を与えよ．

(2)　(1) において，$a = 5$, $b = 7$, $c = 8$ であり △ABC が一辺の長さが 5 の正三角形であるとすると，$a\mathrm{AP} + b\mathrm{BP} + c\mathrm{CP}$ を最小値はいくらか．

解答



(1)　三角形 ABC の外部に三つの正三角形 △DBC, △ECA, △FAB を，$\mathrm{CB} : \mathrm{BD} : \mathrm{DC} = a : c : b$, $\mathrm{AC} : \mathrm{CE} : \mathrm{EA} = b : a : c$, $\mathrm{BA} : \mathrm{AF} : \mathrm{FB} = c : b : a$ が成り立つようにとる．三角形 ABC の内部の点 P に対して $\mathrm{PB} : \mathrm{BP}' : \mathrm{P}'\mathrm{P} = a : c : b$ となるように P' を（BP に関して A の反対側に）とる．

作り方より $\mathrm{PP}' = \dfrac{b\mathrm{BP}}{a}$ である．

また △BPC ∽ △BP′D なので $\mathrm{P}'\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{cCP}}{\mathrm{a}}$ である．

以上より $a\mathrm{AP} + b\mathrm{BP} + c\mathrm{CP} = a(\mathrm{AP} + \mathrm{PP}' + \mathrm{P}'\mathrm{D})$ であることがわかった．従って A, P, P, D が一直線上に並べられれば AP + BP + CP　が最小になるが，これは可能である．

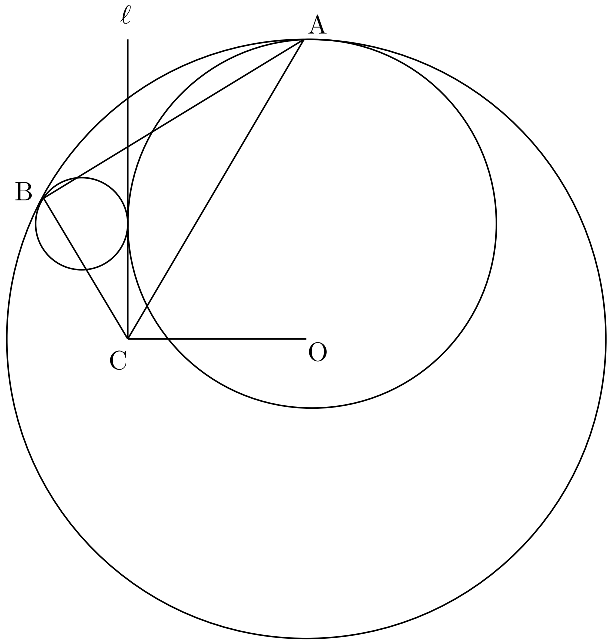
この場合 P は AD, BE, CF の交点となる．また a, b, c を三辺とする三角形のそれぞれの対角を α, β, γ とすると，$\angle\mathrm{APB} = \pi - \gamma$, $\angle\mathrm{BPC} = \pi - \alpha$ $\angle\mathrm{CPA} = \pi - \beta$ となり，P は △DBC, △ECA, △FAB のそれぞれの外接円の交点でもある．

(2)　上図で AB = BC = CA = 5, BD = 8, DC = 7 とする．$\theta = \angle\mathrm{CBD}$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} =$

$\dfrac{1}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$．すると $\angle\mathrm{ABD} = \dfrac{2\pi}{3}$ であり，$\mathrm{AD}^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 129$．従って $a\mathrm{AP} + b\mathrm{BP} + c\mathrm{CP} = 5\mathrm{AP} + 7\mathrm{BP} + 8\mathrm{CP} = 5\mathrm{AD} = 5\sqrt{129}$.

問題 1–9"L change the world" より

3 つの円がどの 2 つも接している．ℓ は 2 円の共通接線であり，O は最も大きい円の中心である．O から ℓ におろした垂線の足を C とする．また，各 2 円の接点を A, B とおく．$\mathrm{AB} = 26, \mathrm{BC} = 3, \mathrm{CA} = 25$ のとき，$\mathrm{OA} : \mathrm{OC}$ を求めよ．



$\boxed{\text{解答}}$

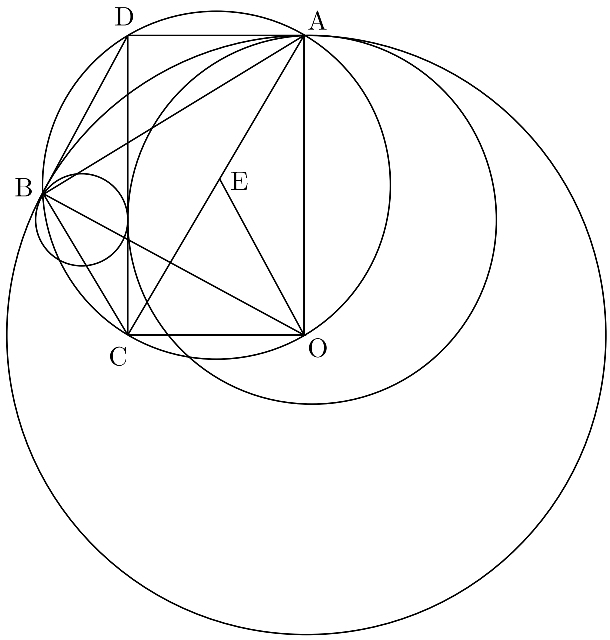
B, A における共通接線および ℓ は同一の点で交わる．それを D とおく．それぞれの円の中心は OA, OB 上にあるので，$\angle\mathrm{OAD} = 90^\circ$, $\angle\mathrm{OBD} = 90^\circ$ がわかる．$\angle\mathrm{OCD} = 90^\circ$ でもあるので，D, B, C, O, A は共円であり，OD がその直径である．

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = x$, $\mathrm{OC} = y$ とおく．ABCO にトレミーの定理を適用すると $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CO} + \mathrm{BC}\cdot\mathrm{OA} = \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BO}$ より $26y + 3x = 25x$．これより直ちに $x : y = 13 : 11$ がわかる．

以下はトレミーの定理の証明も取り込んだ解答である．(映画でのニアの解法.)

D, B, C, O, A が共円であることの証明までは上と同じ．円周角の定理より $\angle\mathrm{CBO} = \angle\mathrm{CAO}$ なので，$\triangle\mathrm{CBO} \backsim \triangle\mathrm{EAO}$ となる点 E を線分 AC 上にとることができる．ところが $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ なので $\triangle\mathrm{CBO}$ と $\triangle\mathrm{EAO}$ は合同である．従って $\mathrm{AE} = \mathrm{BC} = 3$．従って $\mathrm{EC} = 22$.

今度は $\triangle\mathrm{ABO}$ と $\triangle\mathrm{ECO}$ に注目すると，この三角形は相似で相似比は $26 : 22 = 13 : 11$ である．従って $\mathrm{OA} : \mathrm{OC} = 13 : 11$ とわかる．



亀井の最初の解答

D, B, C, O, A が共円であることの証明までは上と同じ．この円の半径を R とする．$R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{3 \cdot 26 \cdot 25}{4\sqrt{27(27-3)(27-25)(27-26)}} = \dfrac{13 \cdot 25}{24}$ である．また，$\angle\mathrm{BDC} = 2\alpha$, $\angle\mathrm{CDA} = 2\beta$ とおく．$\angle\mathrm{BDO} = \angle\mathrm{ODA} = \beta + \alpha$ がわかる．

$\mathrm{OD} = 2R$ であり，正弦定理（三角比）より $\mathrm{OA} = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $\mathrm{OC} = 2R\sin(\beta-\alpha)$, $\mathrm{AC} = 2R\sin 2\beta = 25$, $\mathrm{BC} = 2R\sin 2\alpha = 3$, $\mathrm{AB} = 2R\sin(2\beta+2\alpha) = 26$ が成り立つ．これだけわかっていれば出せるに決まっている．具体的には以下の通り．

$\sin 2\beta = \dfrac{12}{13}$ より $\cos 2\beta = \dfrac{5}{13}$ であり，これから $\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ が得られる．

$\sin 2\alpha = \dfrac{36}{13 \times 25}$ より $\cos 2\alpha = \dfrac{17 \times 19}{13 \times 25}$ であり，これから $\sin\alpha = \dfrac{1}{5\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \dfrac{18}{5\sqrt{13}}$ が得られる．

すると，$\sin(\beta+\alpha) = \dfrac{3}{5}$, $\sin(\beta-\alpha) = \dfrac{33}{5 \times 13}$ が得られ，$\mathrm{AO} : \mathrm{OC} = \sin(\beta+\alpha) : \sin(\beta-\alpha) = \dfrac{3}{5} : \dfrac{33}{5 \times 13} = 13 : 11$.

問題 1–10　△ABC における各点の位置ベクトル表示は次の様になっている．これを示せ

(1)　重心 G の位置ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$

(2)　内心 I の位置ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$

(3)　外心 P の位置ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\sin 2A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sin 2B\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \sin 2C\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$

(4)　垂心 H の位置ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\tan A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \tan B\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \tan C\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\tan A + \tan B + \tan C}$

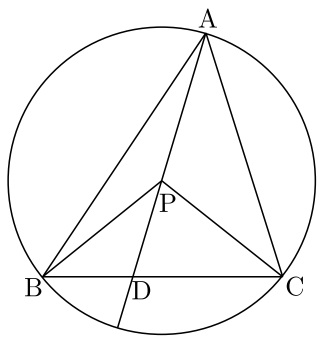
(5)　フェルマー点 F の位置ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\dfrac{a}{\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{b}{\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{c}{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\dfrac{a}{\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)} + \dfrac{b}{\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)} + \dfrac{c}{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}}$

解答

(1)　自明

(2)　容易（有名）

(3)



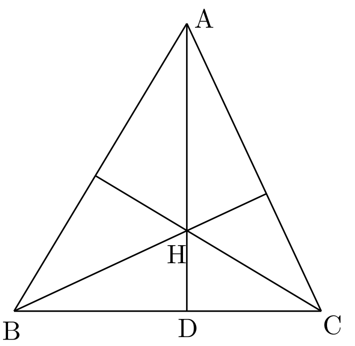
$\triangle\mathrm{OAB} = S_1$, $\triangle\mathrm{OAC} = S_2$ とすると，

$S_1 : S_2 = \dfrac{1}{2}R^2\sin 2C : \dfrac{1}{2}R^2\sin 2B = \sin 2C : \sin 2B$.

従って $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = S_1 : S_2 = \sin 2C : \sin 2B$.

他の辺も同様に考えると P は頂点 A, B, C に重み $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ をつけた重心となるので，題意の通りとなる．

(4)



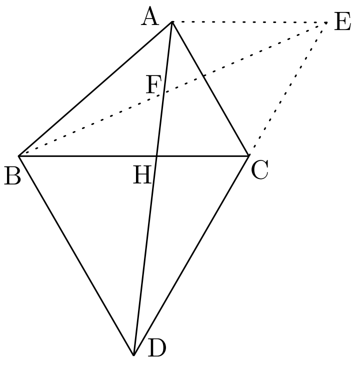
$\angle\mathrm{BAD} = \dfrac{\pi}{2} - B$ より $\mathrm{BD} = \mathrm{AD}\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{B}\right) = \dfrac{\mathrm{AD}}{\tan B}$.

同様に $\mathrm{CD} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\tan C}$ なので，

$\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\tan B} : \dfrac{\mathrm{AD}}{\tan C} = \tan C : \tan B$.

他の辺も同様に考えると P は頂点 A, B, C に重み $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ をつけた重心となるので，題意の通りとなる．

(5)



$\triangle\mathrm{ABD} = S_1$, $\triangle\mathrm{ACD} = S_2$ とする．$\angle\mathrm{ABD} = B + \dfrac{\pi}{3}$ より

$S_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BD}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}ca\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

同様 $S_2 = \dfrac{1}{2}ab\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

従って $\mathrm{BH} : \mathrm{CH} = S_1 : S_2$

$= \dfrac{1}{2}ca\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right) : \dfrac{1}{2}ab\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \dfrac{c}{\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)} : \dfrac{b}{\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

これより，題意の通りとなる．