For Tutors

MeBio　数学テキスト

随伴表現の像について

—大医 1990 の問題—

Edited by kamei

§ 1　大医の問題

問題 1–1　　2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．また，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ を証明せよ．

(2)　B を任意の正方行列とする．$A^2B - BA^2 = k(AB - BA)$ の形の式が，行列 A だけによる数 k により成り立つことを示せ．また k を求めよ．

(3)　$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ かつ $A^2B - BA^2 = O$ を満たす行列 A をすべて求めよ．

§ 2　気になったこと

この問題で $AB - BA$ と B をでたらめに与えると，おそらく A は解けないでしょう．気になったことは次の点です．

- $\{AB - BA \mid A \in M(2, \boldsymbol{R}),\ B \in M(2, \boldsymbol{R})\}$ は何か.
- B を固定したとき $\{AB - BA \mid A \in M(2, \boldsymbol{R})\}$ は何か.
- B, C を固定したとき，行列 A に関する方程式 $AB - BA = C$ が解を持つための必要十分条件は何か.

後者の問題を中心に考えていきます.

§ 3　随伴表現

リー括弧 $[A,\ B] = AB - BA$ は A, B に関して双線型であるから $A \to [A,\ B]$ は $\boldsymbol{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間 $M(2, \boldsymbol{R})$ の一次変換を与える．これを $\mathrm{ad}(B)$ とかき，B の随伴表現と呼ぶ．$B = kE$ の場合はすべての行列が B と可換であるため $\mathrm{ad}(B) = 0$ である．これはつまらないので，以下 $B \fallingdotseq kE$ とする．

この場合よく知られているように，A が B と交換可能であるため必要十分条件は $A = mB + nE$ と表されることである．つまり $\mathrm{ad}(B) : M(2, \boldsymbol{R}) \to M(2, \boldsymbol{R})$ において $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(B)) = \{mB + nE \mid m,\ n \in \boldsymbol{R}\}$ である．これは $\boldsymbol{R}$ 上 2 次元のベクトル空間をなす．$\{mB + nE \mid m,\ n \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}[B]$ と書くと，次は完全系列である．

$$0 \to \boldsymbol{R}[B] \to M(2, \boldsymbol{R}) \xrightarrow{\mathrm{ad}(B)} M(2, \boldsymbol{R})$$

これより $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(B))$ は $M(2, \boldsymbol{R})$ 内の 2 次元部分空間だと分かる．$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(B)) = \left\{ m \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, m,\ n \in \boldsymbol{R} \right\}$ であることが成分計算により容易に分かるが，B で定まるこの空間は一体何者なのであろうか.

数年来この解釈にずっと悩んでいたのですが，多少解決の方向が見えてきたので報告します.

$M(2, \boldsymbol{R})$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線型写像 φ を $\varphi(A) = (\mathrm{tr}(A),\ \mathrm{tr}(BA))$ で定義する.

定理 3–1　$\varphi \circ \mathrm{ad}(B) = 0$ である．

証明　$\mathrm{tr}([A,\ B]) = 0$ と $\mathrm{tr}(B[A,\ B]) = 0$ を示せばよい．$\mathrm{tr}([A,\ B]) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ である．また，$\mathrm{tr}(B[A,\ B]) = \mathrm{tr}(BAB - BBA) = \mathrm{tr}((BA)B) - \mathrm{tr}(B(BA)) = 0$ も容易に分かる．

定理 3–2　$B \fallingdotseq kE$ の場合 φ は全射である．

証明　ほぼ明らか．

定理 3–3　$\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(B)) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ である．

証明　先の定理より $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(B)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ であるが，両方とも $\boldsymbol{R}$ 上 2 次元なので一致する．

以上より次の完全系列が得られた．

$$0 \to \boldsymbol{R}[B] \to M(2, \boldsymbol{R}) \xrightarrow{\mathrm{ad}(B)} M(2, \boldsymbol{R}) \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{R}^2 \to 0$$

結論 3–4　$B\ (\fallingdotseq kE)$, C が与えられたとき，$AB - BA = C$ を満たす A が存在するための必要十分条件は，$\mathrm{tr}(C) = 0$ かつ $\mathrm{tr}(BC) = 0$ が成り立つことである．

大医の問題の場合，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので $BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であり，$\mathrm{tr}(C) = 0, \mathrm{tr}(BC) = 0$ が成り立つので解が存在します．（A^2 の方は付け足し．）
ちなみに最初の疑問の答は $\{AB - BA \mid A \in M(2, \boldsymbol{R}),\ B \in M(2, \boldsymbol{R})\} = \{M \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ です．（3 次元の部分空間）