For Tutors

MeBio　数学テキスト

剛体の衝突

—元ちゃんが見つけてきた記事—

Edited by kamei

剛体の衝突回数の問題が解けました．

→◎　　○　　｜（壁）

問題　速度 V で移動している質量 M の剛体 A が，静止している質量 m の剛体 B に完全弾性衝突する．B は衝突後その先にある壁に完全弾性衝突して跳ね返り，再び A と正面衝突する．これを繰り返すとき剛体 A, B および B と壁の衝突は合計何回起こるか．

解答　質量比 $M:m=N:1$ の場合の衝突回数 $F(N)$ は

$$F(N)=\left[\frac{\pi-\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{N}}}{\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{N}}{N+1}}\right]\times 2+1$$

です．数値計算では $F(1)=3$, $F(100)=31$, $F(10000)=313$, $F(1000000)=3141$, $F(100000000)=31415$ となります．$\lim_{N\to\infty}\dfrac{F(N)}{\sqrt{N}}=\pi$ を示すのは容易です．
以下方針．

剛体同士の n 回目の衝突直後の右向きの速度を V_n, v_n とする．（初期速度 $V_0=V$, $v_0=0$ ）

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{N-1}{N+1} & -\dfrac{2}{N+1} \\ \dfrac{2N}{N+1} & \dfrac{N-1}{N+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

となることが簡単に示せる．これを少し変形して

$$\begin{pmatrix} V_n \\ \dfrac{v_n}{\sqrt{N}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{N-1}{N+1} & -\dfrac{2\sqrt{N}}{N+1} \\ \dfrac{2\sqrt{N}}{N+1} & \dfrac{N-1}{N+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ \dfrac{v_{n-1}}{\sqrt{N}} \end{pmatrix}$$

と表現すると，この行列部分は $\theta=\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{N}}{N+1}$ の回転行列になっていることが分かる．従って $\begin{pmatrix} V_n \\ \dfrac{v_n}{\sqrt{N}} \end{pmatrix}$ は $(V,\ 0)$ からスタートして半径 V の円上を θ ずつ回転する，これが $V_n>v_n$ の間起こるので $x^2+y^2=V^2$, $y\geqq 0$, $y\geqq\dfrac{x}{\sqrt{N}}$ の領域の点の数を数えて A, B の衝突が $\left[\dfrac{\pi-\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{N}}}{\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{N}}{N+1}}\right]+1$ 回．壁との衝突の回数も数えると，最初の結論を得る．