For Tutors

MeBio　数学テキスト

新家さんの問題

—亀井の解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題たち

メビオで同僚だった新家さんに聞いた問題です.（解答は亀井のものです.） 大変に興味深い問題ばかりです.

§ 1 問題たち

問題 1–1–1

(1) 関数 $f(x)=\cos(\pi x) \quad \left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$ において，x と $f(x)$ の両方が有理数となるような x の値をすべて求めよ.

(2) $\sin(\pi x)$ の場合について同様の問に答えよ.

(3) $\tan(\pi x)$ の場合について同様の問に答えよ.

$\boxed{\text{解答}}$

(1) x を有理数とし，$x=\dfrac{n}{m}$ （m, n は互いに素な整数で m は自然数）とおく. $\zeta=\exp\dfrac{n\pi i}{m}=\cos\dfrac{n\pi}{m}+i\sin\dfrac{n\pi}{m}$ は 1 の $2m$ 乗根であり，$z^{2m}-1=0$ の解であるから（代数的）整数である. $\overline{\zeta}$ についても同様なので，$\zeta+\overline{\zeta}=2\cos\dfrac{n\pi}{m}$ は（代数的）整数である. $\cos\dfrac{n\pi}{m}$ が有理数であれば $2\cos\dfrac{n\pi}{m}$ は有理整数ということになる. x の範囲を考えると $2\cos\dfrac{n\pi}{m}=1$ しかあり得ない. 従って答は $x=\dfrac{1}{3}$ のみである.

(2) $\sin(\pi x)=\cos\left(\pi\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\right)$ なので，(1) より $\dfrac{1}{2}-x=\dfrac{1}{3}$, つまり $x=\dfrac{1}{6}$ のみ.

(3) $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ が成り立つから，$\tan(\pi x)$ と x の両方が有理数 $\Longrightarrow$ $\cos(2\pi x)$ と $2x$ の両方が有理数 従って $2\pi x=\dfrac{1}{3}\pi$, $\dfrac{1}{2}\pi$, $\dfrac{2}{3}\pi$ つまり $x=\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{3}$ が必要だが，適するのは $\dfrac{1}{4}$ のみである.

（感想など）
はじめは $\cos n\theta=2^n\cos^n\theta+\cdots$ を使って $2\cos\pi x$ の整数性を示していたのですが，実は当たり前だと気付きました. (2), (3) は (1) からダイレクトですね.

問題 1–1–2

(1)　２つの立方体サイコロを振ったときの確率分布と同じ確率分布を与える２つの立方体サイコロの目のパターンをすべて求めよ．

(2)　３つ以上の立方体サイコロを振った場合についての同様の問いに答えよ．

(3)　他の正多面体サイコロについて同様の問いに答えよ．

解答

(1)　サイコロの目をすべて 1 ずつ減らして目を 0 から 5 と考える．サイコロを２つ振ったとき目が 0, 1, $\cdots$, 10 になる場合の数が 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 であるのは $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$ の展開係数に対応していることがわかる．

従って，２つのサイコロ（目は 0 以上）で目の和が同じ確率分布になるものを探すのは，次の条件を満たす多項式 $f(x)$, $g(x)$ を探すのに等しい．

(i)　$f(x)g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2$

(ii)　$f(x)$, $g(x)$ のすべての係数は非負整数である．

(iii)　$f(1) = g(1) = 6$ （面の数が 6 ということ）

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5 = (1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$ と因数分解される．否自明な解で上の条件に適するのは

$$
\begin{aligned}
(1+x)(1+x+x^2) &= 1+2x+2x^2+x^3 \\
(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 &= 1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7
\end{aligned}
$$

の組み合わせしかない．つまりサイコロの目（目は 0 以上）としては $\{0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3\}$ と $\{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ である．

目を 1 以上に戻すと $\{1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4\}$ と $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$ ということになる．

(2)　(1) と同様に考えると，サイコロが n 個の場合は，n 個の多項式 $f_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で，次の条件を満たすものを考えることになる．

(i)　$\prod f_i(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n$

(ii)　$f_i(x)$ のすべての係数は非負整数である．

(iii)　$f_i(1) = 6$

(iii) の条件により各 $f_i(x)$ は因数 $(1+x)$, $(1+x+x^2)$ をちょうど一つずつ持たねばならない．残る問題は $(1-x+x^2)$ の分配のさせ方だけであるが，次のことが簡単にわかる．

$(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^k$ の x^1 の係数は $2-k$ であり，$k \geqq 3$ のとき負になる．

結論は次の通り．

$\{1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4\}$ と $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$ のサイコロを同数用意し，残りを通常の $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ にした場合に限る．$\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$ 通りあることになる．

(3)

①　正四面体の場合

$1+x+x^2+x^3 = (1+x)(1+x^2)$ なので，各 $f_i(x)$ は

$$f_i(x) = (1+x)^2,\ (1+x)(1+x^2),\ (1+x^2)^2$$

のいずれかである．あとは各因数の $\prod f_i(x)$ における総数にだけ注意すればよい．

③　正八面体の場合

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ なので，この場合も各 $f_i(x)$ に自由に３つの因数を持たせればよい．（各因数の $\prod f_i(x)$ における総数にだけ注意する．）

④　正１２面体の場合

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11} = (1+x)(1+x^2)(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)$ なので，非負条件が必要になる．これは $\boldsymbol{Z}[x]/(x^4)$ で考えれば解決すると思われるが，確認はしていない．　（(x^4) は x^4 の生成する $\boldsymbol{Z}[x]$ のイデアルを表す．）

④　正２０面体の場合

やはり面倒そうだ．

（感想など）

問題 (1) は，私が高校生の時に初めて数学セミナーの「エレガントな解答を求む」に解答を送った問題です．懐かしい．(3) は面倒になって投げてしまいましたが，実はおもしろいのだというような裏がありましたら教えてください．

問題 1–1–3　単位球面に内接する四面体の体積を 6 つの辺の長さで表せ.

いまこの文章を入力しようとして初めて「単位球面」の部分を読み落としていたことに気づきました.「単位球面」を使えば簡単です. それについては後でふれます. まずは単位球面の条件なしの問題から.

別問題　四面体の体積を 6 つの辺の長さで表せ.

$\boxed{\text{解答}}$

四面体 OABC において $\mathrm{OA}=a$, $\mathrm{OB}=b$, $\mathrm{OC}=c$, $\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{BC}=y$, $\mathrm{CA}=z$ とおく. また, 座標を導入し, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ とおく.

$|\overrightarrow{a}|=a$, $|\overrightarrow{b}|=b$, $|\overrightarrow{c}|=c$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{a^2+b^2-x^2}{2}$, $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\dfrac{b^2+c^2-y^2}{2}$, $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\dfrac{c^2+a^2-z^2}{2}$ であることはすぐにわかる. これらはすべて辺の長さで表されていることに注意しておく.

行列 $A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ を考える. $V=|\det A|$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で作られる平行 6 面体の体積であり, 四面体 OABC の体積は $\dfrac{V}{6}$ である. ここで ${}^tA\cdot A$ を考える.

$$
\begin{aligned}
{}^tA\cdot A &= \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a^2 & \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2} & \dfrac{a^2+c^2-z^2}{2}\\ \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2} & b^2 & \dfrac{b^2+c^2-y^2}{2}\\ \dfrac{a^2+c^2-x^2}{2} & \dfrac{b^2+c^2-y^2}{2} & c^2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\det{}^tA\cdot A=(\det A)^2=V^2$ だから, 四面体の体積は次の式で与えられる.

$$
\frac{V}{6}=\frac{1}{6}\sqrt{\det\begin{pmatrix}a^2 & \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2} & \dfrac{a^2+c^2-z^2}{2}\\ \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2} & b^2 & \dfrac{b^2+c^2-y^2}{2}\\ \dfrac{a^2+c^2-z^2}{2} & \dfrac{b^2+c^2-y^2}{2} & c^2\end{pmatrix}}
$$

注：この行列式部分を展開しても因数分解はできない. もっときれいな形には表せないと思われる.

(感想など)

解けてしまえば当たり前すぎて誰でもわかりそうなものですが, 結構苦労しました. はじめは O から ABC におろした垂線の長さを求めようと考えました. 三垂線の定理, 円周角の定理, 余弦定理, 正弦定理を使うと (ここも結構おもしろ

いのですが)，高さを表す式の因数に $\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ が出てきます．この根号の中身を辺で表すと $\dfrac{6\text{ 次式}}{6\text{ 次式}}$ になるのですが，きれいに因数分解できるわけでもなく，正体がつかめ切れなかったのです．

$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ とは何だろうとしばらく眺めているうちに，$\det\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$ であると気づきました．これはベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ （を正規化したもの）の相補基底を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ で表したときの係数であるというところから解きほぐし，結局当たり前の結論に達したわけです．

単位球とわかっている場合

球の中心を O とし，四面体を ABCD とする．OABC の体積 V_1 が辺の長さで表現できればよい．△ABC の外接円の半径はわかるので．O と平面 ABC の距離も出せる．△ABC の面積はヘロンの公式で出せるので体積も出せる．具体的には次の通り．

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)} \\
R &= \frac{xyz}{4S} \\
h &= \sqrt{1-R^2} \\
V_1 &= \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{12}\sqrt{16S^2-x^2y^2z^2} = \frac{1}{12}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)-x^2y^2z^2}
\end{aligned}
$$

半径 1 を使っているので斉次式にならず少し気持ち悪いです．また，これらの式 4 つを足した V の式が単独の根号で表せることも自明ではありません．そもそも先ほどの答と同じであるのかどうかすら確かめる気がしません．（外接球の半径が 1 であるときの 6 辺の関係式も簡単ではなく，それを使って式変形するのも面倒.）

問題 1–1–4 余弦定理の拡張

四面体の各面を 0, 1, 2, 3 とし，面 i の面積を S_i, 面 i, j のなす角を θ_{ij} とすると，

$$S_0{}^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 - 2(S_1 S_2 \cos\theta_{12} + S_2 S_3 \cos\theta_{23} + S_3 S_1 \cos\theta_{31})$$

が成り立つことを示せ.

解答

四面体を OABC とする．（左手系にとっておく．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は面 OAB の法線ベクトルで，四面体の外部に向かう大きさ 2△OAB のもの.）

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \times (\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}
\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \\
&\quad + 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}) + 2(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + 2(\overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}})
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角は $\pi - \theta_{12}$ である．他も同様なので，題意は成立する.

上の方法は n 次元 $n+1$ 胞体にも有効です．n 次元ベクトル空間に内積が定義されている場合，その内積に関して $V \cong V^*$ と見なせる．$\bigwedge^{n-1} V$ を V の $n-1$ 重外積巾空間とすると，$\bigwedge^{n-1} V \cong V^* \cong V$ であり，その対応によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_{n-1}}}$$

は，V の $n-1$ 次元超平面 $\mathrm{OA_1A_2 \cdots A_{n-1}}$ に垂直で，大きさが $n-1$ 次元胞体 $\mathrm{OA_1A_2 \cdots A_{n-1}}$ の体積の $(n-1)!$ 倍になっているベクトルであると見なせる．このとき

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{\mathrm{A_1A_n}} \\
=\ & (\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}) \wedge (\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}) \wedge \cdots \wedge (\overrightarrow{\mathrm{OA_n}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}) \\
=\ & \quad \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_n}} \\
& + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_n}} \\
& + \cdots \\
& + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \wedge \cdots \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA_{n-1}}}
\end{aligned}$$

が成り立つ．この両辺の大きさの 2 乗を考えればよい.

問題 1–1–5　すべての自然数は高々 4 つの平方数の和で表されることを証明せよ．

解答

ハミルトンの四元数体 $\boldsymbol{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{R}\}$ を考える．（演算規則が $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$ で与えられる斜体.）　$\alpha = a + bi + cj + dk \in \boldsymbol{H}$ に対し，共役写像 * を $\alpha^* = a - bi - cj - dk$ で定めると，* は斜体としての反自己同型になっている．($(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$ などが成り立つ.)

被約ノルム $\mathrm{N} : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{R}_+$ を $\mathrm{N}(a + bi + cj + dk) = (a + bi + cj + dk)(a + bi + cj + dk)^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ で定める．ただし $\boldsymbol{R}_+ = \{r \in \boldsymbol{R} \mid r \geqq 0\}$ である．当たり前だがこの関数は乗法を保つ．つまり

$$\mathrm{N}((x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k)) = \mathrm{N}(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) \times \mathrm{N}(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k)$$

が成り立つ．これを具体的に書き下せば

$$\begin{aligned} & (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\ & +(x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)^2 + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)^2 \\ = \ & ({x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)({y_0}^2 + {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2) \end{aligned}$$

となる．つまり，高々 4 つの平方数の和で表される数の積は，やはり高々 4 つの平方数の和で表される．従って，すべての素数 p に対し p が高々 4 つの平方数の和で表されることが示されれば，題意は証明されたことになる．これを示そう．

$p = 2$ に対しては $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ だから高々 4 つの平方数の和で表される．

$p \equiv 1 \pmod 4$ のとき p は ガウス整数環 $\boldsymbol{Z}[i]$ において分解する，つまり $p = a^2 + b^2$ となる自然数 a, b が存在することは有名である．この場合も p は高々 4 つの平方数の和で表されることがわかる．(証明は，以下で展開する $p \equiv 3 \pmod 4$ のとき類似の方法で，しかもずっと簡単にできる．ポイントは $\boldsymbol{Z}[i]$ がユークリッド整域だから，単項イデアル整域だというところにある.)

$p \equiv 3 \pmod 4$ のとき $p - 1$ つまり -1 は mod p で平方非剰余である．1 はもちろん平方剰余だから，1, 2, 3, $\cdots$, $p - 2$, $p - 1$ のそれぞれが平方剰余であるか平方非剰余であるかをみていけば，(最初の 1 が平方剰余で最後の $p - 1$ が平方非剰余なので）k が平方剰余であり $k + 1$ が平方非剰余であるような k （$1 \leqq k \leqq p - 2$）が存在するはずである．

このとき $-k - 1 = (-1)(k + 1)$ は平方剰余になるので，$k \equiv a^2 \pmod p$, $-k - 1 \equiv b^2 \pmod p$ となる a, b を $0 < a,\ b < p$ にとることができる．必要に応じて a, b を $p - a$, $p - b$ に置き換えることにより，$0 < a,\ b < \dfrac{p}{2}$ としてもよい．

$k \equiv a^2 \pmod p$, $-k-1 \equiv b^2 \pmod p$ を辺々足すと $a^2+b^2+1 \equiv 0 \pmod p$ が得られる．そこで $a^2+b^2+1 = pq$ とおくと，$0 < a,\ b < \dfrac{p}{2}$ より $0 < q < \dfrac{p}{2}$ であることが分かる．

通常この先は無限降下法を使った証明が多いですが，別証明を考えてみました．

四元数体 $\boldsymbol{H}$ の整数環 S, T を

$$S = \left\{ \frac{a + bi + cj + dk}{2} \in \boldsymbol{H} \,\middle|\, a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{Z} \text{ かつ } a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 2 \right\}$$

$$T = \{a + bi + cj + dk \in \boldsymbol{H} \mid a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{Z}\}$$

で定義する．S が積に関して閉じていることは簡単に分かる．(T の方が整数環という感じがするかもしれないが，S の方が数学的に性質がよい.)

先の被約ノルムに関しては $\mathrm{N}(S) \subset \boldsymbol{Z}$ であり，S の単数（可逆元）は $\mathrm{N}^{-1}(1)$ で，具体的には

$$S^* = \left\{ \pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\ \frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2} \right\}$$

の 24 個の元である．ここで次の定理が成り立つ（と思う）．

定理

(1)　S の右イデアル A はすべて単項であり，$A = \alpha S$ と書くことができる．

(2)　(1) における生成元 α は $\alpha \in T$ であるようにとることができる．

証明の方針

(1)　$\mathrm{N}(A) - \{0\}$ は自然数の部分集合であり，最小値を持つ．その最小値が $\mathrm{N}(\alpha)$ で実現されるものとする．$(\alpha \in A)$．$A = \alpha S$ であることを示したい．

$A \supset \alpha S$ は自明である．$A \risingdotseq \alpha S$ として $\beta \in A - \alpha S$ をとる．$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}$ 上 4 次元のベクトル空間であり，α, αi, αj, αk は一次独立だから基底をなす．β をこの基底を使って

$$\beta = x_0\alpha + x_1\alpha i + x_2\alpha j + x_3\alpha k$$

と表す．$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \boldsymbol{R}$ である．

x_0 に最も近い整数 y_0 をとって $x_0 = y_0 + z_0$ と表そう．$-\dfrac{1}{2} \leqq z_0 \leqq \dfrac{1}{2}$ であるが，y_0 の取り方を調節することにより $-\dfrac{1}{2} < z_0 \leqq \dfrac{1}{2}$ としてもよい．$x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, $x_3 = y_3 + z_3$ も同様の表し方とする．すると，

$$\beta = (y_0 + z_0)\alpha + (y_1 + z_1)\alpha i + (y_2 + z_2)\alpha j + (y_3 + z_3)\alpha k$$

と表示される．ここで次の式

$$\beta' = \beta - (y_0\alpha + y_1\alpha i + y_2\alpha j + y_3\alpha k) = z_0\alpha + z_1\alpha i + z_2\alpha j + z_3\alpha k = \alpha(z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k)$$

によって定義される β' はイデアル A の（0 でない）元であり，

$$\mathrm{N}(\beta') = \mathrm{N}(\alpha) \times ({z_0}^2 + {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2)$$

を満たす．ところが ${z_0}^2 + {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 \leqq 1$ であるから $\mathrm{N}(\alpha)$ の最小性より ${z_0}^2 + {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = 1$ でなければならない．これは $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = \dfrac{1}{2}$ を意味する．しかしこの場合

$$\beta = \alpha\left(\frac{1 + i + j + k}{2}\right) \in \alpha S$$

となり矛盾する．

(2)　もともと $\alpha \in T$ であれば問題はない．$\alpha \notin T$ のときは S^* の元 $\left\{\dfrac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}\right\}$ の中に, $\alpha \equiv \gamma \pmod{2T}$ を満たす単数 γ が存在する．$\alpha = \gamma + 2\delta$ $(\delta \in T)$ とかくと，$\alpha\gamma^* = \gamma\gamma^* + 2\delta\gamma^*$ は T の元であり，A の生成元でもあることが分かる,

証明終

先ほどの話に戻る．$p \equiv 3 \pmod 4$ のとき p を高々 4 つの平方数の和で表わしたかったのだが，$a^2+b^2+1=pq$, $0<q<\dfrac{p}{2}$ を満たす整数 a, b が存在することまでは分かっていた．

ここで $\rho = a+bi+j$ とおき，S の右イデアル $A = pS + \rho S$ を考える．$\mathrm{N}(\rho) = a^2+b^2+1 = pq$ である．

定理

(1)　$\mathrm{N}(A) \subset p\boldsymbol{Z}_+$ である．（$\boldsymbol{Z}_+ = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ とする．）

(2)　$A = \pi S$ $(\pi \in T)$ と表したとき，$\mathrm{N}(\pi) = p$ である．

証明の方針

(1)　$\alpha \in A$ をとる．$\alpha = p\beta + \rho\gamma$ と表される．（β, $\gamma \in S$）

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\alpha) &= (p\beta+\rho\gamma)(p\beta+\rho\gamma)^* \\ &= (p\beta+\rho\gamma)(p\beta^*+\gamma^*\rho^*) \\ &= p^2\mathrm{N}(\beta) + p(\beta\gamma^*\rho^* + \rho\gamma\beta^*) + \mathrm{N}(\rho)\mathrm{N}(\gamma)\end{aligned}$$

これは p で割り切れる．（$\beta\gamma^*\rho^* + \rho\gamma\beta^* = \mathrm{tr}(\beta\gamma^*\rho^*)$ 部分も整数であることはほぼ明らか．）

(2)　$p = \pi\alpha$ と書かれるので，$\mathrm{N}(p) = \mathrm{N}(\pi)\mathrm{N}(\alpha)$ である．従って $\mathrm{N}(\pi)$ は $\mathrm{N}(p) = p^2$ の約数である．また，$\rho = \pi\beta$ と書かれるので，$\mathrm{N}(\rho) = \mathrm{N}(\pi)\mathrm{N}(\beta)$ である．従って $\mathrm{N}(\pi)$ は $\mathrm{N}(\rho) = pq$ の約数でもある．(1) も考慮すると $\mathrm{N}(\pi) = p$ であることが分かる．

証明終

$\pi \in T$ だから $\pi = a+bi+cj+dk$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{Z})$ の形をしている．$\mathrm{N}(\pi) = a^2+b^2+c^2+d^2 = p$ となり，p が 4 つの平方数の和で表されることが分かった．

解答終

（感想など）

最初は整数環を T だけで考えていました．イデアルが単項にならない場合をどう処理しようか悩んでいるうちに，$\dfrac{1+i+j+k}{2}$ は整数であるべきだと気づきました．

ここで展開した話はものすごく有名であるべきですね．きっと有名で私が知らないだけなのでしょう．もしくは間違っているとか．

問題 1–1–6　$\dfrac{2^n+1}{n^2}$ が整数となるような 1 より大きい整数 n をすべて求めよ．

解答

n が奇数でなければならないことは明らかなので，以下では n は奇数として話を進める．まず次の補題から．

補題 1

$a,\ b$ を奇数，p を 3 以外の奇素数とする．$(b,\ p-1)=1$ であれば，

$$2^{ab} \equiv -1 \pmod p \Longrightarrow 2^a \equiv -1 \pmod p$$

証明

$(b,\ p-1)=1$ より $bc \equiv\ 1 \pmod{p-1}$ となる自然数 c が存在する．c が奇数であることもすぐに分かる．$2^{ab} \equiv -1 \pmod p$ の両辺を c 乗すると $2^{abc} \equiv (-1)^c \pmod p$ となるが，$(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^* \cong \boldsymbol{Z}/(p-1)\boldsymbol{Z}$ より左辺は 2^a に合同，c が奇数なので右辺は -1 に合同である．

証明終

系 2

奇数 n が 3 を素因数に持たなければ，$\dfrac{2^n+1}{n^2}$ は整数にならない．

証明

$\dfrac{2^n+1}{n^2}$ が整数になったとして矛盾を導こう．n の最小の素因数を p とする．p は 3 より大きい奇素数である．$2^n \equiv -1 \pmod p$ が成り立つが p の最小性より $(n,\ p-1)=1$ である．すると補題 1 より $2^1 \equiv -1 \pmod p$ ということになってしまう．$p>3$ よりこれはあり得ない．

証明終

補題 3

k を自然数とする．m を 3 と素な奇数とする．

(1)　$2^{3^k}+1$ は，3 でちょうど $k+1$ 回割り切れる．

(2)　$2^{3^k m}+1$ は，3 でちょうど $k+1$ 回割り切れる．

証明

(1)　帰納法による．$k=1$ のときは $2^{3^1}+1=+3^2$ だから成立する．

$k=k_0$ のとき $2^{3^{k_0}}+1=3^{k_0+1}\ell_0$　（ℓ_0 は 3 と素）と表されると仮定して $k=k_0+1$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}
2^{3^{k_0+1}} &= (2^{3^{k_0}})^3 \\
&= (-1+3^{k_0+1}\ell_0)^3 \\
&= (-1)^3+3(-1)^2(3^{k_0+1}\ell_0)+3(-1)(3^{k_0+1}\ell_0)^2+(3^{k_0+1}\ell_0)^3 \\
&= -1+3^{k_0+2}\ell_1
\end{aligned}$$

と表すことができる．

(2)　$2^{3^k}=-1+3^{k+1}\ell$　（ℓ は 3 と素）の両辺を m 乗すれば直ちに分かる．

証明終

系 4

k を自然数とする．m を 3 と素な奇数とする．$n=3^k m$ のとき，$\dfrac{2^n+1}{n^2}$ が整数になるのは $k=1$ かつ $m=1$ の場合のみである．

証明

この場合 $2^{3^k m}+1$ が 3^{2k} で割り切れることになるので，補題 3 より $3^{2k}|3^{k+1}\ell$ となり，$2k \leqq k+1$ つまり $k \leqq 1$ が分かる．従って $k=1$ である．

そこで $n=3m$ とする．$m=1$ なら $\dfrac{2^3+1}{3^2}=1$ だから整数になる．$m \fallingdotseq 1$ として m の最小の素因数を p としよう．$p \geqq 5$ である．

この場合 $2^{3m} \equiv -1 \pmod p$ が成り立つが，$(m,\ p-1)=1$ なので補題 1 より $2^3 \equiv -1 \pmod p$ が得られる．これはあり得ない．

証明終

以上系 3 と系 4 より，$\dfrac{2^n+1}{n^2}$ が整数となるような 1 より大きい整数 n は 3 のみであることが分かった．

問題 1–1–7　凸 n 角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_n}$ の内部に一点 P をとる．このとき n 個の角 $\angle\mathrm{PA_1A_2}$, $\angle\mathrm{PA_2A_3}$, $\cdots$, $\angle\mathrm{PA_nA_1}$ のうち，少なくとも一つは $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$ 以下であることを示せ.

解答

$$\angle\mathrm{PA_1A_2}=\alpha_1,\ \angle\mathrm{PA_2A_3}=\alpha_2,\ \cdots,\ \angle\mathrm{PA_nA_1}=\alpha_n,$$
$$\angle\mathrm{PA_2A_1}=\beta_1,\ \angle\mathrm{PA_3A_2}=\beta_2,\ \cdots,\ \angle\mathrm{PA_1A_n}=\beta_n$$

とおく.

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=(n-2)\pi$$

である.

正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA_2}}{\sin\alpha_1}=\frac{\mathrm{PA_1}}{\sin\beta_1},\ \frac{\mathrm{PA_3}}{\sin\alpha_2}=\frac{\mathrm{PA_2}}{\sin\beta_2},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{PA_1}}{\sin\alpha_n}=\frac{\mathrm{PA_n}}{\sin\beta_n}$$

が成り立つので，これらを辺々かけると

$$\sin\alpha_1\times\sin\alpha_2\times\cdots\times\sin\alpha_n=\sin\beta_1\times\sin\beta_2\times\cdots\times\sin\beta_n$$

が成り立っていることがわかる．ここですべての k に対し $\alpha_k>\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$ と仮定すると,

$$\sin\alpha_1\times\sin\alpha_2\times\cdots\times\sin\alpha_n>\sin\beta_1\times\sin\beta_2\times\cdots\times\sin\beta_n$$

となってしまい矛盾することを示そう.

推論をスムーズにするために，すこし条件をゆるめて考える.（図形から離れる.）次の条件を満たす $2n$ 個の実数の組の集合 X を考える.

$$X=\{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n)\mid\alpha_1,\ \cdots,\ \beta_n\ \text{は次の条件 (i)〜(iii) を満たす}\}$$

条件 (i)　すべての k に対し $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}<\alpha_k<\pi$

条件 (ii)　すべての k に対し $0<\beta_k\leqq\pi-\alpha_k$　（等号が成り立ってもよい）

条件 (iii)　$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=(n-2)\pi$

命題

あらゆる X の元 $S=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n)\in X$ に対し

$$\sin\alpha_1\times\sin\alpha_2\times\cdots\times\sin\alpha_n>\sin\beta_1\times\sin\beta_2\times\cdots\times\sin\beta_n$$

が成り立つ.

証明

$X_1\subset X$ を，この命題の反例になっているものの集合としよう．つまり

$$\begin{aligned}&S=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n)\in X\ \text{が}\ S\in X_1\ \text{である}\\ \iff\ &\sin\alpha_1\times\sin\alpha_2\times\cdots\times\sin\alpha_n\leqq\sin\beta_1\times\sin\beta_2\times\cdots\times\sin\beta_n\end{aligned}$$

で定義する．$X_1 = \phi$ を示すのが目標である．そこで $X_1 \fallingdotseq \phi$ として矛盾を導こう．

$S = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n) \in X_1$ をとる．条件 (i) より α_k の平均 $\overline{\alpha}$ は

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

を満たす．また，(iii) より β_k の平均 $\overline{\beta}$ は

$$\overline{\beta} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n} - \overline{\alpha} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

を満たす．

$\gamma_k = \pi - \alpha_k - \beta_k$ を考えよう．（S が凸多角形から作られている場合は $\gamma_k = \angle \mathrm{A}_k\mathrm{PA}_{k+1}$ を意味している．）(ii) より $\gamma_k \geqq 0$ である．また (iii) より γ_k の平均 $\overline{\gamma}$ は

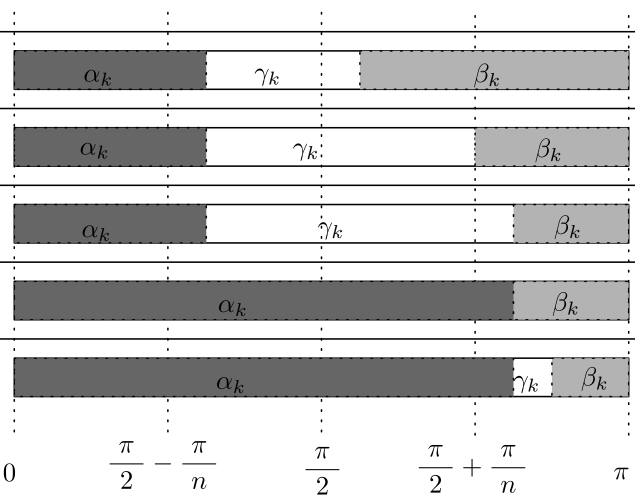
$$\overline{\gamma} = \frac{2\pi}{n}$$

であることがわかる．

ここで添え字の集合 $I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ を，次の（disjoint な）５つの集合に分割する．

$$\begin{aligned}
A(S) &= \left\{ k \;\middle|\; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} < \alpha_k < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n},\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} < \beta_k < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \right\} \\
B(S) &= \left\{ k \;\middle|\; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} < \alpha_k < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n},\ \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right\} \\
C(S) &= \left\{ k \;\middle|\; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} < \alpha_k < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n},\ \beta_k < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right\} \\
D(S) &= \left\{ k \;\middle|\; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \leqq \alpha_k,\ \beta_k = \pi - \alpha_k \right\} \\
E(S) &= \left\{ k \;\middle|\; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \leqq \alpha_k,\ \beta_k < \pi - \alpha_k \right\}
\end{aligned}$$

図で説明すると，次のようになっている．



	$\sin\alpha_k,\ \sin\beta_k$ の大小	γ_k の大きさ
$k \in A(S) \Longleftrightarrow$	不明	$\gamma_k < \dfrac{2\pi}{n}$
$k \in B(S) \Longleftrightarrow$	$\sin\alpha_k > \sin\beta_k$	$\gamma_k < \dfrac{2\pi}{n}$
$k \in C(S) \Longleftrightarrow$	$\sin\alpha_k > \sin\beta_k$	不明
$k \in D(S) \Longleftrightarrow$	$\sin\alpha_k = \sin\beta_k$	$\gamma_k = 0$
$k \in E(S) \Longleftrightarrow$	$\sin\alpha_k > \sin\beta_k$	不明

$A(S) = \phi$ だとしよう．$B(S),\ C(S),\ E(S)$ のすべてが ϕ だとすると $I = D(S)$ となり $\overline{\gamma} = 0$ ということになって $\overline{\gamma} = \dfrac{2\pi}{n}$ に反する．従って $B(S),\ C(S),\ E(S)$ のいずれかは ϕ ではない．ところがその場合

$$\sin\alpha_1 \times \sin\alpha_2 \times \cdots \times \sin\alpha_n > \sin\beta_1 \times \sin\beta_2 \times \cdots \times \sin\beta_n$$

となり，$S \in X_1$ の仮定に反する．つまり $A(S) = \phi$ ではあり得ない．

以下では次の方針に従って命題を証明していく．

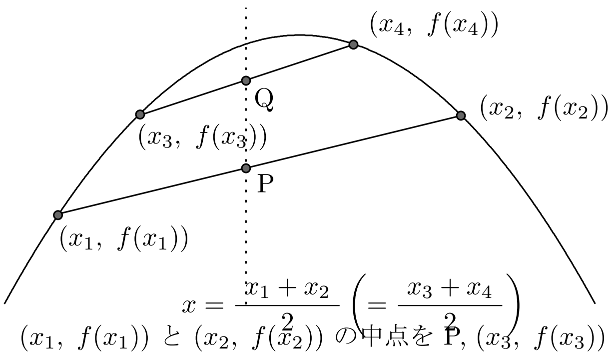
「$A(S) \fallingdotseq \phi$ であるような $S \in X_1$ が与えられたとき，β_k をうまく調節していって $A(S') = \phi$ であるような $S' \in X_1$ を作り，矛盾を導く.」

そのためにまず次の補題を示そう．

補題

$f(x)$ を上に凸な関数とする．4 つの数 x_1, x_2, x_3, x_4 が $x_1 < x_3 \leqq x_4 < x_2,\ \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{x_3+x_4}{2}$ を満たすとき，$f(x_1) + f(x_2) < f(x_3) + f(x_4)$ が成り立つ．

証明



$(x_1,\ f(x_1))$ と $(x_2,\ f(x_2))$ の中点を P, $(x_3,\ f(x_3))$ と $(x_4,\ f(x_4))$ の中点を Q とする．Q は P の真上にある．

補題の証明終

命題の証明続き

$A(S) = \phi$ だと矛盾するので $A(S) \fallingdotseq \phi$ である．このとき，$C(S) = E(S) = \phi$ だと $\overline{\gamma} < \dfrac{2\pi}{n}$ になってしまうので，$\overline{\gamma} = \dfrac{2\pi}{n}$ であるためには $C(S) \fallingdotseq \phi$ または $E(S) \fallingdotseq \phi$ でなければならない．

Case 1.　$A(S) \fallingdotseq \phi$ かつ $C(S) \fallingdotseq \phi$ の場合：

$k \in A(S), \ell \in C(S)$ とする．$\beta_\ell < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n} < \beta_k < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{n}$ が成り立っている．ここで ${\beta_k}', {\beta_\ell}'$ を次のようにとる．（とることができる.）

1°　$\beta_\ell < {\beta_\ell}' \leqq \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n} \leqq {\beta_k}' < \beta_k$

2°　$\dfrac{\beta_k + \beta_\ell}{2} = \dfrac{{\beta_k}' + {\beta_\ell}'}{2}$

3°　${\beta_k}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ または ${\beta_\ell}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ の少なくとも一方が成り立つ．

$f(x) = \log(\sin x)$ は $0 < x < \pi$ において上に凸なので，補題により $f(\beta_k) + f(\beta_\ell) < f({\beta_k}') + f({\beta_\ell}')$ が成り立つ．つまり $\sin\beta_k \times \sin\beta_\ell < \sin{\beta_k}' \times \sin{\beta_\ell}'$ が成り立つ．すると，

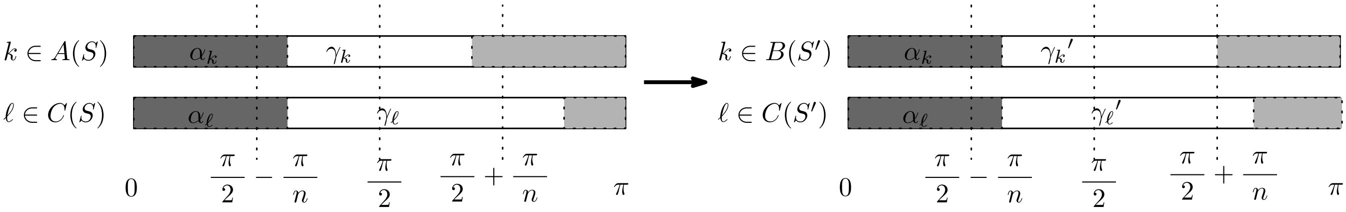
$$
\begin{aligned}
& \sin\alpha_1 \times \sin\alpha_2 \times \cdots \times \sin\alpha_n \\
\leqq\ & \sin\beta_1 \times \sin\beta_2 \times \cdots \times \sin\beta_k \times \cdots \times \sin\beta_\ell \times \cdots \times \sin\beta_n
\end{aligned}
$$

$$\leqq \quad \sin\beta_1 \times \sin\beta_2 \times \cdots \times \sin{\beta_k}' \times \cdots \times \sin{\beta_\ell}' \times \cdots \times \sin\beta_n$$

従って，S の成分のうち β_k，β_ℓ を ${\beta_k}'$，${\beta_\ell}'$ に置き換えてできる S' はやはり X_1 の元である．

図で説明すると，次のようになっている．

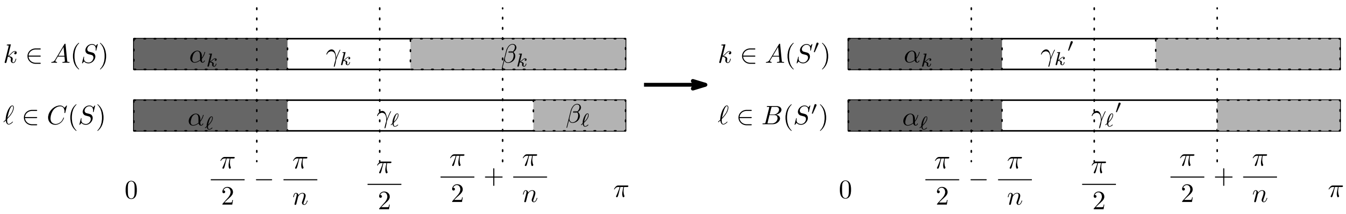
(1)　$\beta_k{}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ になる場合．



この場合 $k \in A(S)$ だったものが $k \in B(S')$ に変わり，$|A(S')| = |A(S)| - 1$ になる．（集合 T に対し $|T|$ は T の要素数を表す．）

図では $\beta_\ell{}' < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ つまり $\ell \in C(S')$ となっているが，$\beta_\ell{}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ つまり $\ell \in B(S')$ かもしれない．従って $|C(S')| = |C(S)|$ または $|C(S')| = |C(S)| - 1$ であるが，いずれにせよ $|C(S')| \leqq |C(S)|$ である．$|E(S')| = |E(S)|$ は明らかである．これらのことより，$|A(S')| + |C(S')| + |E(S')| < |A(S)| + |C(S)| + |E(S)|$ であることが分かる．

(2)　$\beta_\ell{}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ になる場合．



この場合 $\ell \in C(S)$ だったものが $\ell \in B(S')$ に変わり，$|C(S')| = |C(S)| - 1$ になる．$|A(S')| \leqq |A(S)|$, $|E(S')| = |E(S)|$ は明らかである．この場合も $|A(S')| + |C(S')| + |E(S')| < |A(S)| + |C(S)| + |E(S)|$ が成り立っていることがわかる．

Case 2.　$A(S) \fallingdotseq \phi$ かつ $E(S) \fallingdotseq \phi$ の場合：

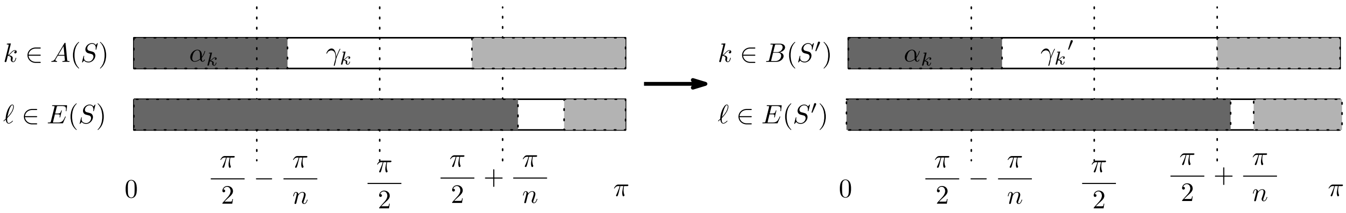
$k \in A(S), \ell \in E(S)$ とする．$\beta_\ell < \pi - \alpha_\ell < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n} < \beta_k < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{n}$ が成り立っている．ここで $\beta_k{}', \beta_\ell{}'$ を次のようにとる．（とることができる．）

1°　$\beta_\ell < \beta_\ell{}' \leqq \pi - \alpha_\ell$ かつ $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n} \leqq \beta_k{}' < \beta_k$
2°　$\dfrac{\beta_k + \beta_\ell}{2} = \dfrac{\beta_k{}' + \beta_\ell{}'}{2}$
3°　$\beta_k{}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ または $\beta_\ell{}' = \pi - \alpha_\ell$ の少なくとも一方が成り立つ．

この場合も Case 1. と同じ議論によって S の成分のうち β_k, β_ℓ を $\beta_k{}'$, $\beta_\ell{}'$ に置き換えてできる S' はやはり X_1 の元である．

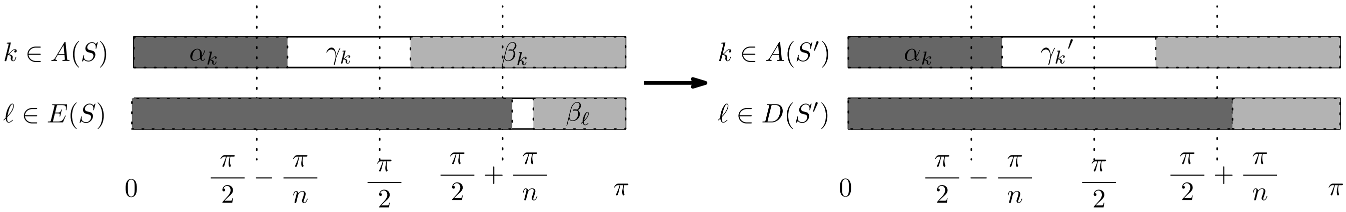
図で説明すると，次のようになっている．

(3)　$\beta_k{}' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ になる場合．



この場合 $k \in A(S)$ だったものが $k \in B(S')$ に変わり，$|A(S')| = |A(S)| - 1$ になる．$|C(S')| = |C(S)|$, $|E(S')| \leqq |E(S)|$ は明らかである．この場合も $|A(S')| + |C(S')| + |E(S')| < |A(S)| + |C(S)| + |E(S)|$ が成り立っていることがわかる．

(4)　${\beta_\ell}' = \pi - \alpha_\ell$ になる場合．



この場合 $\ell \in E(S)$ だったものが $\ell \in D(S')$ に変わり，$|E(S')| = |E(S)| - 1$ になる．$|A(S')| \leqq |A(S)|$, $|C(S')| = |C(S)|$ は明らかである．この場合も $|A(S')| + |C(S')| + |E(S')| < |A(S)| + |C(S)| + |E(S)|$ が成り立っていることがわかる．

Case 1. および Case 2. により，$S \in X_1$ が $A(S) \fallingdotseq \phi$ を満たす限り

$$|A(S')| + |C(S')| + |E(S')| < |A(S)| + |C(S)| + |E(S)|$$

となる $S' \in X_1$ をとることができる．従ってこの操作を繰り返せば $A(S_n) = \phi$ であるような $S_n \in X_1$ にたどり着くはずである．しかし先に示したように，$A(S_n) = \phi$ であれば $S_n \in X_1$ ではあり得ない．つまり命題は証明された．

結論

凸 n 角形 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A_n}$ の内部に一点 P をとる．このとき n 個の角 $\angle \mathrm{PA_1A_2}$, $\angle \mathrm{PA_2A_3}$, $\cdots$, $\angle \mathrm{PA_nA_1}$ のうち，少なくとも一つは $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ 以下である．

問題 1–1–8　自然数の k 乗数和の公式に表れる多項式を $S_k(x)$ とする．

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

k が奇数のとき $S_k'(x) = kS_{k-1}(x)$ となることを示せ．ただし，$S_k'(x)$ は $S_k(x)$ の導関数とする．

解答

$S_k(x)$ の存在は自明である．一意性については次より明らか．

補題

2 つの多項式 $f(x)$, $g(x)$ が無限個の x_i に対し $f(x_i) = g(x_i)$ であれば，関数として等しい．

理由は無限個の零点を持つ多項式が 0 に限るからで，もちろん多項式でなければ成り立たない．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \sin n\pi$ などという馬鹿げた表示がある．

$S_k(n)$ の定義より $S_k(n) - S_k(n-1) = n^k$ が 2 以上の自然数 n について成り立つが，上の補題により $S_k(x) - S_k(x-1) = x^k$ が関数の恒等式として成り立つ．$S_k(1) = 1$ なので，$x = 1$ を代入すると $S_k(0) = 0$ が分かる．さらに $x = 0$ を代入すると $S_k(-1) = 0$ も分かる．（$S_k(n)$ は $n(n+1)$ を因数に持つ．）

さらに負の整数値を順次代入していくと，次のことが分かる．

$$y = S_k(x) \text{ は } k \text{ が奇数のときは } x = -\frac{1}{2} \text{ に関して線対称であり，}$$
$$k \text{ が偶数のときは } (x,\ y) = \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \text{ に関して点対称である．}$$

$S_k(x) - S_k(x-1) = x^k$ を x で微分すると $S_k'(x) - S_k'(x-1) = kx^{k-1}$ となる．一方 $S_{k-1}(x) - S_{k-1}(x-1) = x^{k-1}$ も成り立っている．これより $S_k'(x) - kS_{k-1}(x) =$ 定数 となるが，k が奇数のとき左辺は $x = -\dfrac{1}{2}$ に関して奇関数になるので，この定数は 0 でなければならない．

解答終

はじめは次のように考えていました．

$f(x)$ が多項式の場合の $f'(x)$ とは $f(x+y) - f(x)$ を y で割って（割り切れる！）その後 $y = 0$ を代入すると考えればよい．

$S_k(m+n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m+n)^k$, $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ なので，辺々引いて

$$\begin{aligned}
S_k(m+n) - S_k(m) &= (m+1)^k + (m+2)^k + \cdots + (m+n)^k \\
&= \quad m^k + {}_k\mathrm{C}_1 m^{k-1} \cdot 1 + {}_k\mathrm{C}_2 m^{k-2} \cdot 1^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} m \cdot 1^{k-1} + 1^k \\
&\quad + m^k + {}_k\mathrm{C}_1 m^{k-1} \cdot 2 + {}_k\mathrm{C}_2 m^{k-2} \cdot 2^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} m \cdot 2^{k-1} + 2^k \\
&\qquad \cdots \\
&\quad + m^k + {}_k\mathrm{C}_1 m^{k-1} \cdot n + {}_k\mathrm{C}_2 m^{k-2} \cdot n^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} m \cdot n^{k-1} + n^k \\
&= n \cdot m^k + {}_k\mathrm{C}_1 m^{k-1} S_1(n) + {}_k\mathrm{C}_2 m^{k-2} S_2(n) + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} m \cdot S_{k-1}(n) + S_k(n)
\end{aligned}$$

左辺の $S_k(m)$ と右辺の $S_k(n)$ を入れ替え，m で一回割る．

$$S_k(m+n) - S_k(n) = n \cdot m^k + {}_k\mathrm{C}_1 m^{k-1} S_1(n) + {}_k\mathrm{C}_2 m^{k-2} S_2(n) + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} m \cdot S_{k-1}(n) + S_k(m)$$

$$\frac{S_k(m+n)-S_k(n)}{m} = n\cdot m^{k-1} + {}_k\mathrm{C}_1 m^{k-2} S_1(n) + {}_k\mathrm{C}_2 m^{k-3} S_2(n) + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1}\cdot S_{k-1}(n) + \frac{S_k(m)}{m}$$

m に 0 を代入する．

$$\lim_{m\to 0}\frac{S_k(m+n)-S_k(n)}{m} = {}_k\mathrm{C}_{k-1}\cdot S_{k-1}(n) + \lim_{m\to 0}\frac{S_k(m)}{m}$$

つまり

$$S_k'(n) = k\cdot S_{k-1}(n) + \lim_{m\to 0}\frac{S_k(m)}{m}$$

この $\lim\limits_{m\to 0}\dfrac{S_k(m)}{m}$ の部分（実はベルヌイ数）が，k が奇数のときに消えるといいたかったのですが，うまくいきませんでした．これは $S_k(m)$ が m^2 で割り切れることと同値ですが，その証明のためだけにもっと難しいことを引っ張り出すのもどうかと思われたので，初等的にいいたかったのです．

というわけで最初の証明にたどり着きました．（これにより k が奇数の場合に $S_k(m)$ が m^2 で割り切れることも証明できたことになります．）

追：ベルヌイ多項式を知っていれば，ほとんど明らかですね．ちょっと勉強し直して，ベルヌイ数およびベルヌイ多項式の本質的な考えが分かってきました．$f(x)-f(x-1)=x^k$ となる関数をいかに作るか？ だけが問題だと理解しています．また $S_k(x)$ を作る（Excel 程度で）実行可能なアルゴリズムも習得しました．

追々：$t^m(t+1)^m$ の階差や $t^m(t+1)^m(2m+1)$ の階差を考えるという方法があるようです．（東大 2006 後期）なぜこれでうまくいくのかを考えました．要するに $t+\dfrac{1}{2}$ に関する偶関数は $t^m(t+1)^m$ の多項式であり，奇関数は $t^m(t+1)^m(2t+1)$ の関数であるというだけのことでした．