For Tutors

MeBio　数学テキスト

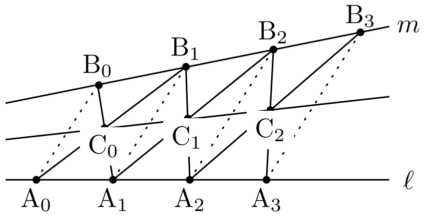
パップスタイプの問題

—算チャレの派生問題—

Edited by kamei

「算数にチャレンジ」の問題を解いていて気になったことがあり，手を動かしているうちに一見自明でない事実にたどり着きました．それは以下の通りです．

命題 **A**



図のように直線 ℓ 上に点 A_0, A_1, $\cdots$ が等間隔に並んでおり，直線 m 上に点 B_0, B_1, $\cdots$ が等間隔に並んでいる．線分 A_nB_{n+1} と線分 B_nA_{n+1} の交点を C_n とする．このとき C_n は一直線上に並ぶ．

命題 **B**　上の命題において，次の同値関係が存在する．

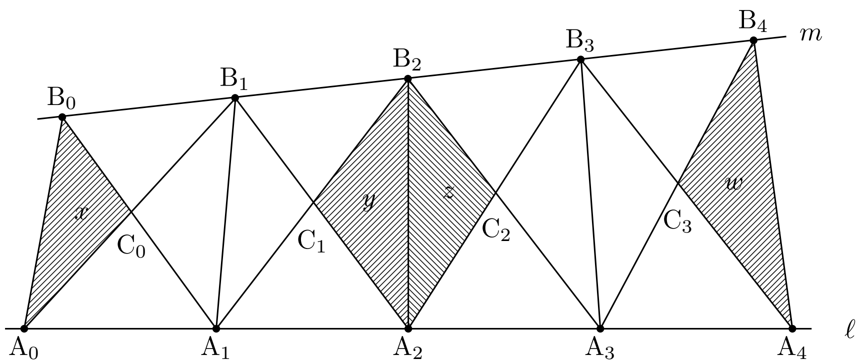
$$C_n \text{ が等間隔に並ぶ} \iff ① \text{ または } ② \text{ または } ③ \text{ のいずれかが成立する．}$$

① $\ell \mathbin{/\!/} m$
② ある n に対して $A_nB_{n+1} \mathbin{/\!/} A_{n+1}B_{n+2}$　（このときすべての n に対して $A_nB_{n+1} \mathbin{/\!/} A_{n+1}B_{n+2}$）
③ ある n に対して $B_nA_{n+1} \mathbin{/\!/} B_{n+1}A_{n+2}$　（このときすべての n に対して $B_nA_{n+1} \mathbin{/\!/} B_{n+1}A_{n+2}$）

命題 A は座標を用いた証明しか出来ていませんし，その意味する内容もよく分かりません．是非とも図形的な証明が欲しいところです．意味に関しても皆さん考えてください．

命題 B は解析的解法でも幾何的解法でも出来ました．また，この条件と同値な面積関係も得られており，そちらも興味深いです．

命題 **C**　図のように直線 ℓ 上に A_0〜A_4 が等間隔に並んでおり，直線 m 上に B_0〜B_4 が等間隔に並んでいる．線分 A_nB_{n+1} と線分 B_nA_{n+1} の交点を C_n とする．斜線部の面積を図のように x, y, z, w とする．

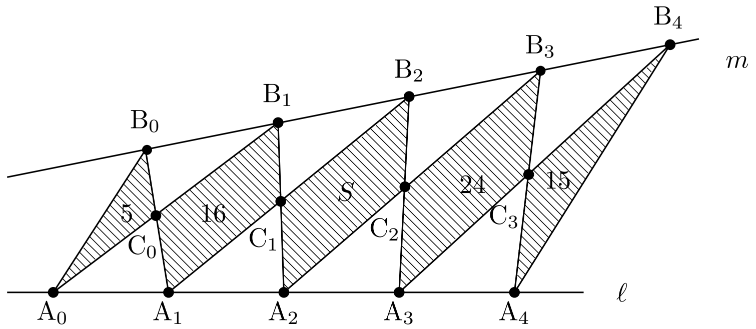


(1) $\dfrac{xy + yz - 2xz}{3z - y} = \dfrac{2yw - yz - zw}{3y - z}$ が成り立つ．

(2) C_n が等間隔に並ぶ $\iff x + 2y = 3z$ かつ $w + 2z = 3y$ かつ $\dfrac{2}{3}z < y < \dfrac{3}{2}z$

§ 1　オリジナルの問題

問題 1–1



図のように直線 ℓ 上に A_0〜A_4 が等間隔に並んでおり，直線 m 上に B_0〜B_4 が等間隔に並んでいる． 線分 A_nB_{n+1} と線分 B_nA_{n+1} の交点を C_n とする．斜線部の面積が図のように 5, 16, S, 24, 15 となっている．S を求めよ．

解答 ℓ に対する B_n の高さが等差数列をなすので，

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \triangle A_0B_0A_1, \\
S_1 &= \triangle A_0B_1A_1 = \triangle A_1B_1A_2, \\
S_2 &= \triangle A_1B_2A_2 = \triangle A_2B_2A_3, \\
S_3 &= \triangle A_2B_3A_3 = \triangle A_3B_3A_4, \\
S_4 &= \triangle A_3B_4A_4
\end{aligned}
$$

とおくと S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 が等差数列となる．その公差を d とすると

$$
\begin{aligned}
d &= \triangle A_1B_1C_0 - \triangle A_0B_0C_0 \\
&= \triangle A_2B_2C_1 - \triangle A_1B_1C_1 \\
&= \triangle A_3B_3C_2 - \triangle A_2B_2C_2 \\
&= \triangle A_4B_4C_3 - \triangle A_3B_3C_3
\end{aligned}
$$

がわかり，

$$
\triangle A_2B_2C_1 = \triangle A_1B_1C_1 + \triangle A_1B_1C_0 - \triangle A_0B_0C_0 = 16 - 5 = 11,
$$
$$
\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_3B_3C_2 + \triangle A_3B_3C_3 - \triangle A_4B_4C_3 = 24 - 15 = 9.
$$

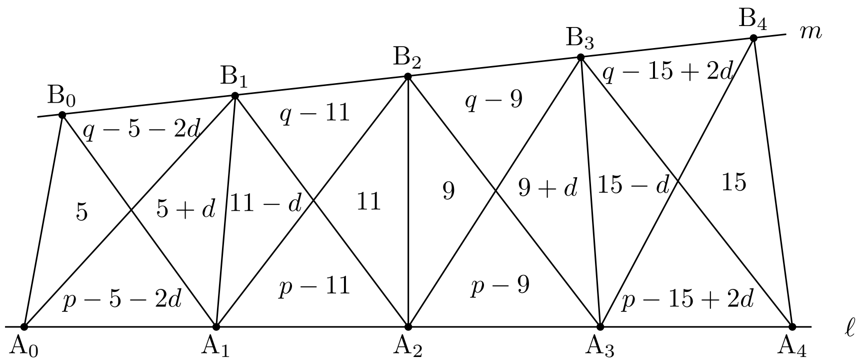
従って $S = 11 + 9 = 20$ が得られる．

証明終

解き終わった後，違和感が残りました．それは，この問題は成立しているのか，つまりこの状態が実現可能なのかどうかが明らかではなかったからです．

追加問題 1–2　先ほどの問題が成立していることを証明せよ．

証明



$\triangle A_1B_2A_2 = \triangle A_2B_2A_3 = p$, $\triangle B_1A_2B_2 = \triangle B_2A_2B_3 = q$ とおく，先ほどのように公差を d とおくと，各部分の面積は図に書き込んだようになる．

一般に凸四角形 ABCD に対しその対角線 AC, BD の交点を E とすると，$\triangle ABE \cdot \triangle CDE = \triangle DAE \cdot \triangle BCE$ であることは容易に分かるので，

$$\begin{aligned}
(p-5-2d)(q-5-2d) &= 5(5+d) & \cdots ① \\
(p-11)(q-11) &= 11(11-d) & \cdots ② \\
(p-9)(q-9) &= 9(9+d) & \cdots ③ \\
(p-15+2d)(q-15+2d) &= 15(15-d) & \cdots ④
\end{aligned}$$

②, ③ より $p+q=10d$, $pq=99d$ が分かる．これを ① の展開式に代入すると $d(d-4)=0$ つまり $d=0,\ 4$ が得られる．$d=0$ だと $p=q=0$ となり不適なので $d=4$ である．その場合 $pq=40$, $p+q=396$ より $(p,\ q)=(18,\ 22),\ (22,\ 18)$ となる．これらの数値は ④ も満たす．

これが実現できることは簡単にわかる．実際 $A_0B_1 \,/\!/\, A_1B_2 \,/\!/\, A_2B_3 \,/\!/\, A_3B_4$ としてやればよい．（実現可能性については発展問題でも扱います．後述）

証明終

さらに凶悪な問題を作ってみました．

根性問題 1–3　先ほどの問題の図で，面積 5, 16, S, 24, 15 であった値を面積 2772, 10692, S, 17500, 11340 に変更する．このとき S および $\triangle C_0A_0A_1 \sim \triangle C_3A_3A_4$ を求めよ．

解答　$\triangle C_1A_2B_2 = 10692-2772 = 7920$, $\triangle C_2A_2B_2 = 17500-11340 = 6160$ より $S=14080$ である．

先ほどと同じように $\triangle A_1B_2A_2 = \triangle A_2B_2A_3 = p$, $\triangle B_1A_2B_2 = \triangle B_2A_2B_3 = q$, 公差を d とおく．

$$\begin{aligned}
(p-2772-2d)(q-2772-2d) &= 2772(2772+d) & \cdots ① \\
(p-7920)(q-7920) &= 7920(7920-d) & \cdots ② \\
(p-6160)(q-6160) &= 6160(6160+d) & \cdots ③ \\
(p-11340+2d)(q-11340+2d) &= 11340(11340-d) & \cdots ④
\end{aligned}$$

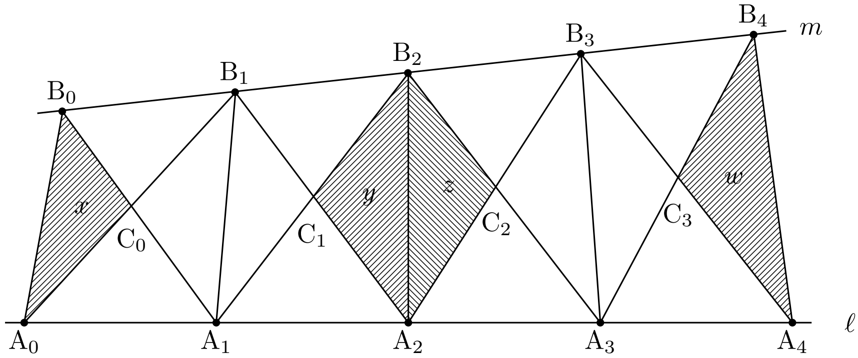
②, ③ より $p+q=8d$, $pq=55440d$ が分かる．これを ① の展開式に代入すると $d(d-3465)=0$ つまり $d=0,\ 3465$ が得られる．$d=0$ だと $p=q=0$ となり不適なので $d=3465$ である．その場合 $pq=192099600$, $p+q=27720$ より $p=q=13860$ となる．これらの数値は ④ も満たす．（これが実現できることは後述する．）

従って $\triangle C_0A_0A_1 = p-2772-2d = 4158$, $\triangle C_1A_1A_2 = p-7920 = 5940$, $\triangle C_2A_2A_3 = p-6160 = 7700$, $\triangle C_3A_3A_4 = p-11340+2d = 9450$ となる．

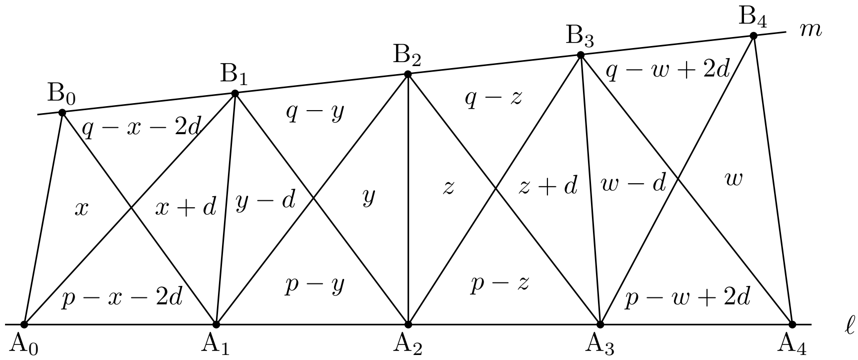
解答終

実現可能性についてです．最初は「面積 5, 16, S, 24, 15 であった値を面積 S_1, S_2, S, S_3, S_4 と読み変えるとき，図が実現可能である為の S_1〜S_4 の条件を求めよ．」という問題を作ったのですが．いろいろやってみた結果，次の設定が答えやすいという結論に達しました．

発展問題 1–4　図のように直線 ℓ 上に A_0〜A_4 が等間隔に並んでおり，直線 m 上に B_0〜B_4 が等間隔に並んでいる．　線分 A_nB_{n+1} と線分 B_nA_{n+1} の交点を C_n とする．斜線部の面積を図のように x, y, z, w とするとき，実現可能なための x, y, z, w の条件を求めよ．



解答　先ほどと同様に，次の様に面積をおくことが出来る．



このとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(p-x-2d)(q-x-2d) &= x(x+d) &\cdots ①\\ (p-y)(q-y) &= y(y-d) &\cdots ②\\ (p-z)(q-z) &= z(z+d) &\cdots ③\\ (p-w+2d)(q-w+2d) &= w(w-d) &\cdots ④\end{aligned}$$

②, ③ より $(y-z)(p+q)=(y+z)d$, $(y-z)pq=2yzd$ が得られる．

(i)　$y=z$ だと $d=0$ であるが，この場合 $x=y=z=w$ となり，これは明らかに実現可能である．（$x=y=z=w \iff \ell \,//\, m$ は容易に分かる．）

(ii)　$y \fallingdotseq z$ の場合．

$p+q=\dfrac{y+z}{y-z}d\ \cdots$ ⑤, $pq=\dfrac{2yz}{y-z}d\ \cdots$ ⑥ となる．これを ① の展開式に代入すると．

$$\frac{2yz}{y-z}d-(x+2d)\frac{y+z}{y-z}d+(x+2d)^2=x^2+xd\ \cdots\ ⑦$$

$d=0$ だと $y=z$ になってしまうので $d \fallingdotseq 0$ である．すると ⑦ を整理して $(3z-y)d=xy+yz-2xz$ を得る．

$y=3z$ の場合 $0=xz+3z^2$ となりこれは不適.

$y \fallingdotseq 3z$ の場合 $d=\dfrac{xy+yz-2xz}{3z-y}$. この場合この d が $-x<d<y$ を満たすことと，この d を ⑤, ⑥ に代入して解いた $p,\ q$ が正の実数であり，$p>y,\ q>y,\ p>x+2d,\ q>x+2d$ を満たすことが必要である. 逆にそれを満たせば図の五角形 $\mathrm{A_0A_2C_2B_2B_0}$ までは実現可能である.

同様に ⑤, ⑥ を ④ に代入することにより $z=3y$ の場合不適，$z \fallingdotseq 3y$ の場合 $d=\dfrac{2yw-yz-zw}{3y-z}$ が得られる.

以上をまとめると次の結論を得る.

(i) $y=z$ の場合. $x=y=z=w$ なら実現可能，それ以外なら実現不可能

(ii) $y=3z$ の場合. 実現不可能

(iii) $z=3y$ の場合. 実現不可能

(iv) $y \fallingdotseq z,\ y \fallingdotseq 3z,\ z \fallingdotseq 3y$ の場合.

(ア) $\dfrac{xy+yz-2xz}{3z-y} \fallingdotseq \dfrac{2yw-yz-zw}{3y-z}$ なら実現不可能.

(イ) $\dfrac{xy+yz-2xz}{3z-y} = \dfrac{2yw-yz-zw}{3y-z}$(= d とおく) のとき

$p+q=\dfrac{y+z}{y-z}d,\ pq=\dfrac{2yz}{y-z}d$ が正の実数解 $p,\ q$ を持ち，$d,\ p,\ q$ が

$-x<d<y,\ p>y,\ q>y,\ p>x+2d,\ q>x+2d,$

$-z<d<w,\ p>z,\ q>z,\ p>w-2d,\ q>w-2d$

をすべて満たせば実現可能，そうでなければ実現不可能.

解答終

$$\boxed{\text{実現可能} \Longrightarrow \frac{xy+yz-2xz}{3z-y} = \frac{2yw-yz-zw}{3y-z}}$$

最後の (iv) の条件がもっとすっきりかけるかどうかはよく分かっていません，少なくとも $\dfrac{y}{2}<z<2y$ が必要であることは分かります. 後で使うので証明しておきます.

命題 1–5 発展問題 1–4 の結論 (iv)（イ）が成り立っているとき $\dfrac{y}{2}<z<2y$ である.

証明 $x+d=x+\dfrac{xy+yz-2xz}{3z-y}=\dfrac{xz+xy}{3z-y}>0$ だから $3z-y>0$ とわかる.

また $y-d=y-\dfrac{xy+yz-2xz}{3z-y}=\dfrac{(2z-y)(x+y)}{3z-y}>0$ だから $2z-y>0$ を得る.

同様に $w-d=w-\dfrac{2yw-yz-zw}{3y-z}=\dfrac{y(z+w)}{3y-z}>0$ より $3y-z>0$，ついで $z+d=z+\dfrac{2yw-yz-zw}{3y-z}=\dfrac{(2y-z)(z+w)}{3y-z}$ より $2y-z>0$ を得る.

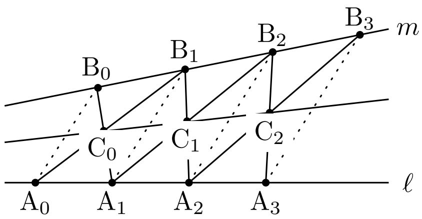
解答終

§ 2　派生した問題

ところで C_0, C_1, C_2, C_3 は一直線上にあるのでしょうか．またその場合等間隔に並んでいるのでしょうか．問題 1–1 の場合は一直線上等間隔にありました，数値がきれいだということはこれを強く示唆します．ところが根性問題 1–3 の数値は余りきれいではありません，実際この問題では一直線上にはありますが，等間隔には並んでいません．（そういう問題を作るとこのような数値になってしまいます.）

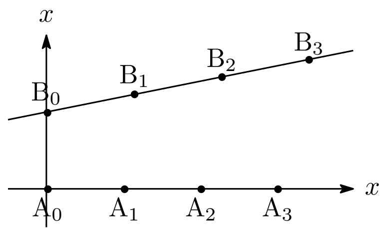
これに関して次の結果を得ました．

命題 2–1



図のように直線 ℓ 上に点 A_0, A_1, $\cdots$ が等間隔に並んでおり，直線 m 上に点 B_0, B_1, $\cdots$ が等間隔に並んでいる．線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}$ と線分 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の交点を C_n とする．このとき C_n は一直線上に並ぶ

証明　命題はアフィン不変な性質に関するものなので，適当なアフィン変換を施すことにより，$\mathrm{A}_n(n,\ 0)$, $\mathrm{B}_0(0,\ 1)$ としてよい．$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}=(a,\ b)$ とおく．この場合 $\mathrm{B}_n(na,\ nb+1)$ である．



このとき直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}$ の方程式は $y=\dfrac{nb+b+1}{na+a-n}(x-n)$, 直線 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$ の方程式は $y=\dfrac{nb+1}{na-n-1}(x-n-1)$ となる．この交点を $\mathrm{C_n}(x_n,\ y_n)$ とすると $(x_n,\ y_n)=\left(\dfrac{n^2(b+ab)+n(2a+b+ab)+a}{2nb+a+b+1},\ \dfrac{(nb+b+1)(nb+1)}{2nb+a+b+1}\right)$ であることが計算により分かる．このとき $(a+1)y_n-bx_n=1$ であることが確かめられる．

別証　A_t, B_t を xy–平面内で等速直線運動をする点と見なし，時刻 t における位置を $\mathrm{A}_t(at+b,\ ct+d)$, $\mathrm{B}_t(et+f,\ gt+h)$ と置こう．直線 $\mathrm{A}_s\mathrm{B}_t$ と $\mathrm{A}_t\mathrm{B}_s$ の交点を $\mathrm{C}_{s,t}$ とする．$\mathrm{C}_{s,t}$ が定直線上にあることがいえればよい．（題意は $\mathrm{C}_{n,n+1}$ が定直線上にあるという主張である.）

直線 $\mathrm{A}_s\mathrm{B}_t$	$\{(gt+h)-(cs+d)\}x-(gt+h)(as+b)$	$=$	$\{(et+f)-(as+b)\}y-(et+f)(cs+d)$
直線 $\mathrm{A}_t\mathrm{B}_s$	$\{(gs+h)-(ct+d)\}x-(gs+h)(at+b)$	$=$	$\{(es+f)-(at+b)\}y-(es+f)(ct+d)$
辺々引いて	$\{g(t-s)-c(s-t)\}x-gb(t-s)-ah(s-t)$	$=$	$\{e(t-s)-a(s-t)\}y-ed(t-s)-cf(s-t)$
$t-s$ で割って	$(g+c)x-gb+ah$	$=$	$(e+a)y-ed+cf$

これが求める直線の方程式である．当たり前のことであるが，直線 $\mathrm{A}_s\mathrm{B}_t$ の方程式と直線 $\mathrm{A}_t\mathrm{B}_s$ の方程式は s, t を入れ替えただけの違いしか無いので，辺々引けば $t-s$ で割り切れるに決まっているのである．　証明終

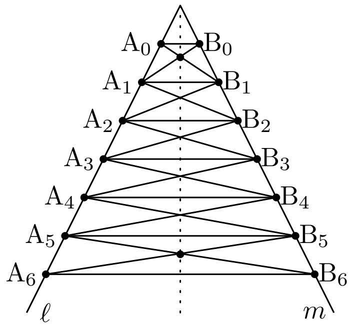
・この命題がどうも腑に落ちない．何を意味するのだろう？
・座標によらない証明はないだろうか.

命題 2–2　命題 2–1 において，次の同値関係が存在する．

$$\mathrm{C}_n \text{ が等間隔に並ぶ} \iff ① \text{ または } ② \text{ または } ③ \text{ のいずれかが成立する．}$$

① $\ell \,/\!/\, m$
② ある n に対して $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1} \,/\!/\, \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+2}$　（このときすべての n に対して $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1} \,/\!/\, \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+2}$）
③ ある n に対して $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1} \,/\!/\, \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$　（このときすべての n に対して $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1} \,/\!/\, \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$）

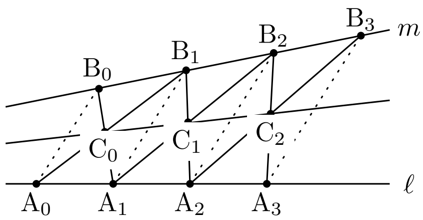
注：　$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \,/\!/\, \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$ ではだめである．右図で C_0 は $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ と $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ の間のかなり上寄りにあるが，$n \to \infty$ のとき中央に収束する．



証明

（$\Leftarrow$ について）　① のとき C_n が等間隔に並ぶのは明らかである．

② のときを考えよう．次の図で $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 \,/\!/\, \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ だとする．



$\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1$ と $\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$ は相似比 $2:1$ の三角形であることが分かる．すると $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_1\mathrm{A}_2$ となり，$\triangle\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$ と $\triangle\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_2$ も相似比 $2:1$ の三角形であることが示され，$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 \,/\!/\, \mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$ が分かる．以下同様にしてすべての n に対して $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1} \,/\!/\, \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+2}$ が成り立つ．

このとき $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$, $\cdots$ は等差数列であり，$\mathrm{C}_0\mathrm{B}_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$, $\mathrm{C}_1\mathrm{B}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$, $\mathrm{C}_2\mathrm{B}_3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{A}_3\mathrm{B}_4$, $\cdots$ も等差数列であるから，C_n は等間隔に並ぶ．

③ は ② と同じである．以上より証明された．

（$\Rightarrow$ について）　命題 2–1 における $x_n = \dfrac{n^2(b+ab)+n(2a+b+ab)+a}{2nb+a+b+1}$ が n に関する一次式になることが必要十分である．

(i)　$b=0$ の場合

$x = \dfrac{2na+a}{a+1}$ となり，一次式になっている．この場合は $\ell \,/\!/\, m$ となり，十分条件も満たされている．

(ii)　$b \fallingdotseq 0$ の場合

分子が分母で割りきれることが必要．これは n の方程式として $n = -\dfrac{a+b+1}{2b}$ を代入したときに 分子 $=0$ が成立することを意味する．実際代入すると 分子 $= \dfrac{1}{4b}(a^3-a^2-a-ab^2-b^2+1) = \dfrac{1}{4b}(a+1)(a+b-1)(a-b-1)$ となるので $a+1=0$ または $a+b-1=0$ または $a-b-1=0$ がわかる．

（ア）　$a+1=0$ は（図的に）不適である．

（イ）　$a+b-1=0$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{B_nA_{n+1}}} = (n+1, 0) - (na,\ nb+1) = (-na+n+1,\ -nb-1) = (nb+1,\ -nb-1) \mathbin{/\!/} (1,\ -1)$ なので，③ が成り立っている．また C_n の座標に関しては $\left(\dfrac{n(2-b)+(1-b)}{2},\ \dfrac{nb+b+1}{2}\right)$ となるので，一直線上等間隔であることも確認できた．

（ウ）　$a-b-1=0$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{A_nB_{n+1}}} = (na+a,\ nb+b+1) - (n,\ 0) = (na+a-n,\ nb+b+1) = (nb+b+1,\ nb+b+1) \mathbin{/\!/} (1,\ 1)$ なので，② が成り立っている．また C_n の座標に関しては $\left(\dfrac{nb+2n+1}{2},\ \dfrac{nb+1}{2}\right)$ となるので，一直線上等間隔であることも確認できた．

証明終

さて発展問題 1–4 の設定で C_n が等間隔に並ぶ為の必要十分条件を $x,\ y,\ z\ (,\ w)$ で表そう．

命題 2–3　　発展問題 3–1 の設定において

$$\mathrm{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3}\text{ が等間隔に並ぶ} \iff x+2y=3z \text{ かつ } w+2z=3y \text{ かつ } \frac{2}{3}z<y<\frac{3}{2}z$$

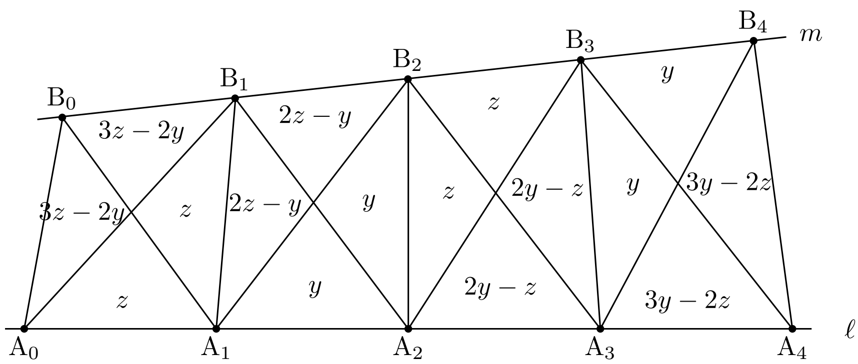
証明　$x=y=z=w$ の場合は明らかである．以下 $y \fallingdotseq z$ とする．命題 2–1 により $\mathrm{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3}$ が一直線上に並ぶことは分かっている．その直線は ℓ に平行ではないので，題意を示すためには $\mathrm{C_n}$ の ℓ に対する高さが等差数列であることをいえばよい．つまり，$\triangle\mathrm{A_0C_0A_1}, \triangle\mathrm{A_1C_1A_2}, \triangle\mathrm{A_2C_2A_3}, \triangle\mathrm{A_3C_3A_4}$ が等差数列であることが必要十分である．

最初の三つが等差数列となるのは

$$2(p-y) = (p-x-2d)+(p-z) \iff 2y = x+z+2d$$
$$\iff (2y-x-z)(3z-y) = 2(xy+yz-2xz) \iff (y-z)(x+2y-3z) = 0$$

が成立するときだが，$y \fallingdotseq z$ より $x+2y=3z$ となる．同様に後ろ三つが等差数列となるのは $w+2z=3y$ のときである．この 2 式が成り立っているときは，$d = \dfrac{xy+yz-2xz}{3z-y} = \dfrac{2yw-yz-zw}{3y-z} = 2y-2z$ となり，

$\begin{cases} p+q=2(y+z) \\ pq=4yz \end{cases}$　を解いて $(p,\ q)=(2y,\ 2z)$ も分かる．すると発展問題 1–4 の解答の図は次の様になる．



この図が実現可能である為には，書き込まれた面積がすべて正であればよく，その条件は $\dfrac{2}{3}z<y<\dfrac{3}{2}z$ だとわかる．

証明終

注 2–4　　上の図のようになっているとき $\mathrm{A_0C_0} = \mathrm{C_0B_1}, \mathrm{A_0A_1} = \mathrm{A_1A_2}$ などから $\mathrm{A_1B_0} \mathbin{/\!/} \mathrm{A_2B_1} \mathbin{/\!/} \mathrm{A_3B_2} \mathbin{/\!/} \mathrm{A_4B_3}$ が分かる．つまり命題 2–2 が座標計算によらずに証明できたことになる．

系 2–5 問題 1–1 では C_n は一直線上に並ぶ．根性問題 1–3 では C_n は一直線上には並ばない．