For Tutors

MeBio　数学テキスト

$(x+y)^3 = xy$ の Riemann 面

—

Edited by M.Kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

問題 1–1–1　　$(x+y)^3 = xy$ の Riemann 面 $\mathcal{R}$ は Riemann 球面 $\mathcal{S}$ であることを示せ.

$\boxed{\text{証明}}$

$R = C[x,\ y]/((x+y)^3 - xy)$ を，2 変数多項式環 $C[x,\ y]$ を素イデアル $((x+y)^3 - xy)$ で割った剰余環，K をその商体とする．$y = tx$ とおいて $(x+y)^3 = xy$ に代入すると $x = \dfrac{t}{(1+t)^3}$, $y = \dfrac{t^2}{(1+t)^3}$ が得られる．つまり体の同型 $K \cong C[t]$ が得られる.

というわけで他愛もなく解決するが，これは Riemann 球面に同型だったから天下りに通用する議論であって，同型でないときにパラメータが見つからないからといって Riemann 球面に同型でないとはいえないだろう．Riemann 面の構造を調べる方法はいろいろあるはずだが，ここでは $C[x] \hookrightarrow R$ から誘導される Riemann 面の 3 次の分岐被覆 $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ の種数が 0 であることを調べてみよう.

補題 1–1–2　$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ は $x = 0,\ \dfrac{4}{27},\ \infty$ 以外では分岐しない．

$\boxed{\text{証明}}$

$y + x = z$ と変数変換すると $(x+y)^3 - xy = 0$ は $z^3 - xz + x^2 = 0$ となる．$f(z) = z^3 - xz + x^2$ とおく．$f(z) = 0,\ f'(z) = 0$ の終結式 (resultant) $\mathrm{R}(f,\ f')$ を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}(f,\ f') &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x & x^2 & \\ & 1 & 0 & -x & x^2 \\ 3 & 0 & -x & & \\ & 3 & 0 & -x & \\ & & 3 & 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x & x^2 & \\ & 1 & 0 & -x & x^2 \\ 0 & 0 & 2x & -3x^2 & \\ & 0 & 0 & 2x & -3x^2 \\ & & 3 & 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -3x^2 & \\ 0 & 2x & -3x^2 \\ 3 & 0 & -x \end{vmatrix} \\
&= -4x^3 + 27x^4 = 27x^3\left(x - \frac{4}{27}\right)
\end{aligned}
$$

補題 1–1–3　$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ は $x = 0$ 上では二重分岐被覆と正則被覆に分かれる．

$\boxed{\text{証明}}$

$(x+y)^3 - xy = 0$ に $x = 0$ を代入すると $y = 0$ が三重解であることがわかる．そこで $y = O(x^n)$ $(n > 0)$ とする．

(1)　$0 < n < 1$ の場合

$O((x+y)^3) = O(x^3 n)$, $O(xy) = O(x^{1+n})$ より $3n = 1 + n \iff n = \dfrac{1}{2}$．これは $y = \pm\sqrt{x} + \mathrm{higher}$ の二重分岐に対応する．

(2)　$1 < n$ の場合

$O((x+y)^3) = O(x^3)$, $O(xy) = O(x^{1+n})$ より $3 = 1 + n \iff n = 2$．これは $y = x^2 + \mathrm{higher}$ の正則被覆に対応する．

(3)　$n = 1$ の場合

order_x左辺 $= \mathrm{order}_x(x+y)^3 \geqq 3$, order_x右辺 $= \mathrm{order}_x(xy) = 2$ よりあり得ない．

（$y = O(x^n)$ のとき $\mathrm{order}_x y = n$ と書くことにする．）

補題 1–1–4　$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ は $x = \dfrac{4}{27}$ 上では二重分岐被覆と正則被覆に分かれる．

$\boxed{\text{証明}}$

$(x+y)^3 - xy = 0$ に $x = \dfrac{4}{27}$ を代入すると $\left(y + \dfrac{4}{27}\right)^3 - \dfrac{4}{27}y = 0 \iff \left(y - \dfrac{2}{27}\right)^2\left(y + \dfrac{16}{27}\right) = 0$ である．従って $y = -\dfrac{16}{27}$ の枝は正則被覆である．

$(x,\ y) = \left(\dfrac{4}{27},\ \dfrac{2}{27}\right)$ の付近の様子を見るために $x = \dfrac{4}{27} + s$ $y = \dfrac{2}{27} + t$ と置き換えると

$(x+y)^3 - xy = \left(\dfrac{4}{27} + s + \dfrac{2}{27} + t\right)^3 - \left(\dfrac{4}{27} + s\right)\left(\dfrac{2}{27} + t\right) = 0$ となる．

分母をなくすために $9s = S,\ 9t = T$ と置き換えると $(T+S)^3 + (6T^2 + 3ST + 6S^2) + 6S = 0$ が得られる．$(S,\ T) = (0,\ 0)$ で $T = O(S^n)$ $(n > 0)$ とする．

(1)　$1 < n$ の場合

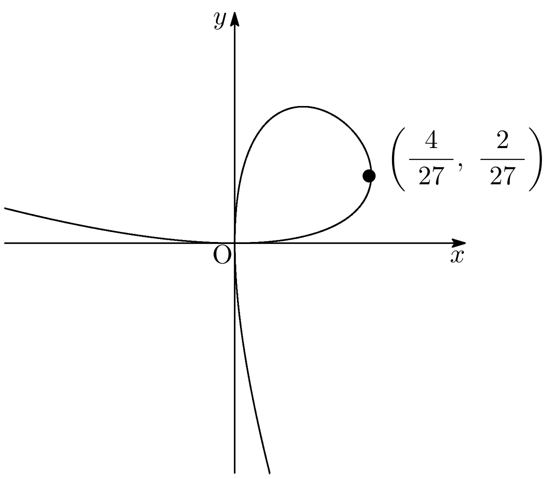
$\mathrm{order}_S(T+S)^3 = 3,\ \mathrm{order}_S(6T^2 + 3ST + 6S^2) = 2,\ \mathrm{order}_S S = 1$ よりこれはあり得ない．

(2)　$1 = n$ の場合

$\mathrm{order}_S(T+S)^3 \geqq 3,\ \mathrm{order}_S(6T^2 + 3ST + 6S^2) \geqq 2,\ \mathrm{order}_S S = 1$ よりこれもあり得ない．

(3)　$0 < n < 1$ の場合

$\mathrm{order}_S(T+S)^3 = 3n,\ \mathrm{order}_S(6T^2 + 3ST + 6S^2) \geqq 2n,\ \mathrm{order}_S S = 1$ より $2n = 1$ である．これはこの分岐が二重分岐被覆であることを表す．



実座標平面に $(x+y)^3 = xy$ を図示すると左のようになる．この図で原点付近では $y \fallingdotseq x^2$ と $y^2 \fallingdotseq x$ になっていることがわかる．また $x = \dfrac{4}{27}$ のとき $y = -\dfrac{16}{27}$ が正則な枝で $y = \dfrac{2}{27}$ が二重分岐であることが図からわかる．

補題 1–1–5　$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ は $x = \infty$ 上では三重分岐被覆になっている．

$\boxed{\text{証明}}$

無限遠点を見るために $x - \dfrac{1}{X}$, $y - \dfrac{1}{Y}$ と置き換えると，

$$(x+y)^3 = xy \Rightarrow \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right)^3 = \frac{1}{XY} \Rightarrow (X+Y)^3 = X^2Y^2$$

$X = 0$ を代入すると $Y = 0$ が三重解になっている．$Y = O(X^n)$ とする．

(1)　$1 < n$ の場合

$\mathrm{order}_X(X+Y)^3 = 3$, $\mathrm{order}_X X^2Y^2 = 2+2n$ より $3 = 2+2n \iff n = \dfrac{1}{2}$ これは $1 < n$ に矛盾する．

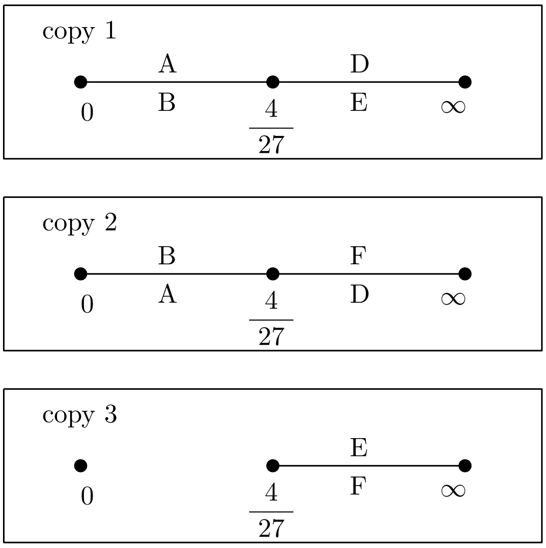
(2)　$0 < n < 1$ の場合

$\mathrm{order}_X(X+Y)^3 = 3n$, $\mathrm{order}_X X^2Y^2 = 2+2n$ より $3n = 2+2n \iff n = 2$ これは $n < 1$ に矛盾する．

従って $n = 1$ である．このとき $\mathrm{order}_X(X+Y)^3 = 4$ より $Y \fallingdotseq -X + X^{\frac{4}{3}}$ とわかる．これは三重分岐被覆になっていることを表す．

命題 1–1–6　$(x+y)^3 = xy$ の Riemann 面 $\mathcal{R}$ の種数は 0 である．

証明



Riemann 球面 $\mathcal{S}$ のコピーを 3 枚用意する．それぞれの $\left[0,\ \frac{4}{27}\right]$ および $\left[\frac{4}{27},\ \infty\right]$ を結ぶ線分に切り込みを入れる．copy 3 の $\left[0,\ \frac{4}{27}\right]$ の切れ込みはそのまま貼り戻す．

copy 1 の A と copy 2 の A, copy 1 の B と copy 2 の B を貼り合わせる．$x = \frac{4}{27}$ の不分岐の枝は copy 3 ではあり得ないので A の隣の D をそのまま貼る．分岐する枝があるので E と E, F と F を貼る．これで $x = \infty$ が三重分岐になっている．

copy 1, copy 2 の A, B, D を貼り合わせた時点で球面に穴を一つ開けた構造になっている．これと copy 3 の穴を貼り合わせると，種数は 0 である．