For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2018年11月

―問題と解答―

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 11 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

$a,\ b,\ c,\ d$ を正の整数とする．$ab = c^2 + c + 1$ が成立するとき，

$$ax^2 + by^2 = (2c+1)xy + d$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は 6 の倍数であることを示せ．

第 2 章

解答

§ 1　解答

$\zeta = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ と置く．ζ は 1 の複素 6 乗根であり，$\zeta^6 = 1$ を満たす．$\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5$ はすべて異なる．また $\zeta^2 - \zeta + 1 = 0$ が成り立っている．

与式を次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + by^2 = (2c+1)xy + d && (2.1)\\
\iff\quad & a^2x^2 + aby^2 = a(2c+1)xy + ad && (2.2)\\
\iff\quad & \left(ax - \frac{2c+1}{2}y\right)^2 - \frac{4c^2+4c+1}{4}y^2 + (c^2+c+1)y^2 = ad && (2.3)\\
\iff\quad & \left(ax - \frac{2c+1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = ad && (2.4)\\
\iff\quad & \left|ax - \frac{2c+1}{2}y - \frac{\sqrt{3}i}{2}y\right|^2 = ad && (2.5)\\
\iff\quad & |ax - cy - y\zeta|^2 = ad && (2.6)
\end{aligned}
$$

$|\zeta| = 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
& |ax - cy - y\zeta|^2 = ad && (2.7)\\
\iff\quad & |(ax - cy - y\zeta)\zeta|^2 = ad && (2.8)
\end{aligned}
$$

である．そこで $(ax - cy - y\zeta)\zeta = ax' - cy' - y'\zeta$ となる $x',\ y'$ を $x,\ y$ から作ってみよう．

$$(ax - cy - y\zeta)\zeta = (ax - cy)\zeta - y\zeta^2 = (ax - cy)\zeta - y(\zeta - 1) = y + \{ax - (c+1)y\}\zeta \tag{2.9}$$

表し方は一意であるから $\begin{cases} ax' - cy' = y \\ -y' = ax - (c+1)y \end{cases}$ が必要十分である．これより $y' = -ax + (c+1)y$．これを代入して $ax' = cy' + y = c(-ax + cy + y) + y = -acx + (c^2+c+1)y = -acx + aby \iff x' = -cx + by$ が分かる．つまり

$$(x,\ y)\ \text{が}\ (2.1)\ \text{を満たす} \Longrightarrow (x',\ y') = f(x,\ y) = (-cx + by,\ -ax + (c+1)y)\ \text{が}\ (2.1)\ \text{を満たす．}$$

要するに，解が一つ見つかれば，それをもとにして別の解を作ることができるわけである．念のため原始的に検算しておく．

（検算）　$ax^2+by^2-(2c+1)xy=d$ とすると，

$$
\begin{aligned}
& a(x')^2+b(y')^2-(2c+1)x'y' \\
= \ & a(-cx+by)^2+b\{-ax+(c+1)y\}^2-(2c+1)(-cx+by)\{-ax+(c+1)y\} \\
= \ & a(c^2x^2-2bcxy+b^2y^2)+b\{a^2x^2-2a(c+1)xy+(c+1)^2y^2\} \\
& -(2c+1)\{acx^2-(c^2+c+ab)xy+b(c+1)y^2\} \\
= \ & a(c^2+c^2+c+1-2c^2-c)x^2+b(c^2+c+a+c^2+2c+a-2c^2-3c-1)y^2 \\
& -(2c+1)(2ab-c^2-c-ab)xy \\
= \ & ax^2+by^2-(2c+1)xy \\
= \ & d
\end{aligned}
$$

□

もちろんこの作業を繰り返しても無限の解が得られるわけではない．ちょうど 6 回で元に戻ってくる．それは次のようにしてわかる．

$f^0(x,\ y)=(x,\ y)$, $f^{k+1}(x,\ y)=f(f^k(x,\ y))$ $(k=0,\ 1,\ \cdots)$ とする．$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ を $\mathbb{Q}$ 上 2 次元のベクトル空間と見たとき $f^k(x,\ y)$ は $(ax-cy-y\zeta)\zeta^k$ の，1, ζ を基底とする表現と一対一に対応する．

$(x,\ y)$ が (2.1) を満たすとき $ax-cy-y\zeta \fallingdotseq 0$ だから $(x,\ y)$, $f(x,\ y)$, $f^2(x,\ y)$, $f^3(x,\ y)$, $f^4(x,\ y)$, $f^5(x,\ y)$ はすべて異なり，$f^6(x,\ y)=(x,\ y)$ となる．

これは (2.1) の解が周期 6 の軌道の disjoint union に分解できることを意味する．従って証明は完了した．.

（補足）　行列で表すと $f\mapsto F=\begin{pmatrix} -c & b \\ -a & c+1 \end{pmatrix}$ であるが $\det F=-c(c+1)+ab=1$ より $F\in SL(2,\ \mathbb{Z})$ である．従って F は格子点の上の（可逆な）変換を表す．

また $\mathrm{tr}F=1$ より F の最小多項式は $F^2-F+E=O$ である．固有値は $\zeta,\ \zeta^{-1}$ だから，F は 60° の回転を表す行列 $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ の共役で，原点以外の格子点を周期 6 の軌道の disjoint union に分解する，　□