For Tutors

MeBio　数学テキスト

関西医科大学入試数学
2018年後期4番について

—背景—

Edited by kamei

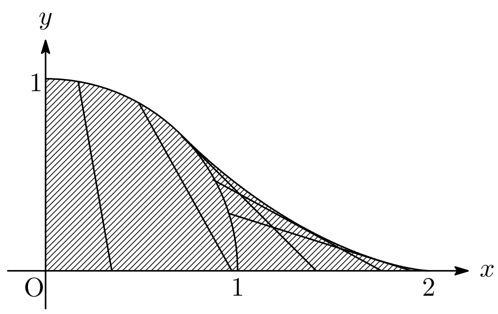
第 1 章

問題と解答

§ 1　問題と解答

(4) の要点だけ抜き出すと次のようになる．「座標平面上で $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と $(2\cos\theta,\ 0)$ を結ぶ線分の通過領域の面積を求めよ．」

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分だけを図にすると，次のようになる．



境界線の上部が円であることはわかるが，下部の裾野はアステロイドであろう．これを受験生の解答としてどう記述するかが問題．

§ 2 解答

解法 1 包絡線を普通に求める．

1 象限で考える．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

$(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(2\cos\theta,\ 0)$ を結ぶ直線 l_θ の方程式は $y = -x\tan\theta + 2\sin\theta$ である．すべての l_θ に接する曲線（包絡線）を C とする．C と l_θ の接点を $\mathrm{P}(\theta)\,(x(\theta),\ y(\theta))$ と置く．

$\mathrm{P}(\theta)$ は l_θ 上の点だから

$$y(\theta) = -x(\theta)\tan\theta + 2\sin\theta \tag{1.1}$$

が成り立っている．また $\mathrm{P}(\theta)$ における C の傾きは l_θ の傾きに等しいので

$$\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = -\tan\theta \iff y'(\theta) = -x'(\theta)\tan\theta \tag{1.2}$$

が成り立っている．(1.1) を θ で微分すると

$$y'(\theta) = -x'(\theta)\tan\theta - x(\theta)\frac{1}{\cos^2\theta} + 2\cos\theta \tag{1.3}$$

これに (1.2) を代入すると $x(\theta) = 2\cos^3\theta$ を得る．従って $y(\theta) = 2\sin^3\theta$ となり，C はサイクロイドだとわかる．後はこれをパラメータで表された曲線として面積を求めればよい．

解法 2 近接する 2 直線の交点を求める．

$\rho \to \theta$ とすると，l_θ と l_ρ の交点は $\mathrm{P}(\theta)$ に近づくであろう，この方法で $\mathrm{P}(\theta)$ を求めてみよう．

$l_\theta : y = -x\tan\theta + 2\sin\theta$ と $l_\rho : y = -x\tan\rho + 2\sin\rho$ の交点は

$$(x,\ y) = \left(2\frac{\sin\rho - \sin\theta}{\tan\rho - \tan\theta},\ 2\frac{\sin\theta\tan\rho - \sin\rho\tan\theta}{\tan\rho - \tan\theta}\right) \tag{1.4}$$

である．

$$\lim_{\rho\to\theta} x = \lim_{\rho\to\theta} 2\frac{\sin\rho - \sin\theta}{\tan\rho - \tan\theta} = \lim_{\rho\to\theta} 2\frac{\dfrac{\sin\rho - \sin\theta}{\rho - \theta}}{\dfrac{\tan\rho - \tan\theta}{\rho - \theta}} \tag{1.5}$$

$$= 2\frac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = 2\cos^3\theta \tag{1.6}$$

$$\lim_{\rho\to\theta} y = \lim_{\rho\to\theta} 2\frac{\sin\theta\tan\rho - \sin\rho\tan\theta}{\tan\rho - \tan\theta} \tag{1.7}$$

$$= \lim_{\rho\to\theta} 2\frac{\sin\theta\dfrac{\tan\rho - \tan\theta}{\rho - \theta} - \tan\theta\dfrac{\sin\rho - \sin\theta}{\rho - \theta}}{\dfrac{\tan\rho - \tan\theta}{\rho - \theta}} \tag{1.8}$$

$$= 2\frac{\sin\theta\dfrac{1}{\cos^2\theta} - \tan\theta\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} \tag{1.9}$$

$$= 2\sin\theta(1 - \cos^2\theta) = 2\sin^3\theta \tag{1.10}$$

以下同様．

解法 3　直線群の通過領域として求める．

やはり 1 象限で考える．

$$\begin{aligned}
& 1\text{ 象限の点 } (X,\ Y) \text{ が求める領域に含まれる} && (1.11)\\
\iff\ & (X,\ Y) = t(\cos\theta,\ \sin\theta) + (1-t)(2\cos\theta,\ 0) = ((2-t)\cos\theta,\ t\sin\theta) && (1.12)\\
& \text{が } 0 < t \leqq 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ に解 } (t,\ \theta) \text{ を持つ}) && (1.13)\\
\iff\ & \left(\frac{X}{2-t}\right)^2 + \left(\frac{Y}{t}\right)^2 = 1 \text{ が } 0 < t \leqq 1 \text{ に解を持つ} && (1.14)
\end{aligned}$$

最後の式は $X^2t^2 + Y^2(t-2)^2 = t^2(t-2)^2$ と同値である．$f(t) = t^2(t-2)^2 - t^2X^2 - (t-2)^2Y^2$ と置く．$f(t) = 0$ が $0 < t \leqq 1$ に解を持つ条件を求めたい．$f(0) = -4Y^2 < 0$, $f(2) = -4X^2 < 0$ に注意しておく．

$f'(t) = 2t(t-2)^2 + 2t^2(t-2) - 2tX - 2(t-2)Y$ である．$f'(t)$ は最高次の係数が正の 3 次関数であり $f'(0) = 4Y^2 > 0$, $f'(2) = -4X^2 < 0$ であるから，中間値の定理より $f'(t) = 0$ の解は $0 < t < 2$ にただ一つ存在する．それを α と置く．$0 < t < \alpha$ においては $f'(t) > 0$, $\alpha < t < 2$ においては $f'(t) < 0$ であることがわかる．

$f'(1) = 2 - 2 - 2X^2 + 2Y^2 = 2(Y+X)(Y-X)$ である．

(i)　$Y \geqq X$ のとき

$f'(1) \geqq 0$ であるから $\alpha \geqq 1$ である．従って $0 < t < 1$ において $f'(t) > 0$ となり $f(t)$ は単調増加となるから $f(1) \geqq 0$ が必要十分条件となる．$f(1) = 1 - X^2 - Y^2 \geqq 0 \iff X^2 + Y^2 \leqq 1$ よりこれは単位円の内部を表す．

(ii)　$Y < X$ のとき

$f'(1) < 0$ であるから $\alpha < 1$ である．従って $f(t)$ は $t = \alpha$ で極大となるから $f(\alpha) \geqq 0$ が必要十分となる．$f'(\alpha) = 0 \iff \alpha(\alpha-2)^2 + \alpha^2(\alpha-2) - \alpha X^2 - (\alpha-2)Y^2 = 0$ であることに注意すると．

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \alpha^2(\alpha-2)^2 - \alpha^2X^2 - (\alpha-2)^2Y^2 && (1.15)\\
&= \alpha(\alpha-2)Y^2 - \alpha^3(\alpha-2) - (\alpha-2)^2Y^2 && (1.16)\\
&= (\alpha-2)\{\alpha Y^2 - \alpha^3 - (\alpha-2)Y^2\} && (1.17)\\
&= (\alpha-2)(2Y^2 - \alpha^3) && (1.18)\\
&\geqq 0 && (1.19)
\end{aligned}$$

これは $2Y^2 \leqq \alpha^3$ つまり $\alpha \geqq \sqrt[3]{2Y^2}$ と同値であるが，中間値の定理からすると $f'(\sqrt[3]{2Y^2}) \geqq 0$ とも同値である．$\beta = \sqrt[3]{2Y^2}$ と置いて計算する．$Y^2 = \dfrac{\beta^3}{2}$ である．

$$
\begin{aligned}
f'(\beta) &= 2\beta(\beta-2)^2 + 2\beta^2(\beta-2) - 2\beta X^2 - 2(\beta-2)Y^2 && (1.20)\\
&= 2\beta(\beta-2)^2 + 2\beta^2(\beta-2) - 2\beta X^2 - \beta^3(\beta-2) && (1.21)\\
&\geqq 0 && (1.22)\\
\iff 2\beta X^2 &\leqq 2\beta(\beta-2)^2 + 2\beta^2(\beta-2) - \beta^3(\beta-2) && (1.23)\\
&= \beta(\beta-2)\{2(\beta-2) + 2\beta - \beta^2\} && (1.24)\\
&= \beta(2-\beta)^3 && (1.25)\\
\iff \sqrt[3]{2X^2} &\leqq 2-\beta && (1.26)\\
\iff \sqrt[3]{2X^2} &\leqq 2-\sqrt[3]{2Y^2} && (1.27)
\end{aligned}
$$

これを少し変形すると $\left(\dfrac{X}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{Y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \leqq 1$ となり，アステロイドの内側を表していることが分かる．

以上より求める領域の 1 象限の部分は，1/8 円と 1/8 アステロイドを合体させたものとなる．

解法 4　知識

$(\cos\theta,\ 0)$, $(0,\ \sin\theta)$ を結ぶ線分の通過領域がアステロイドの内部であることは有名である．本問はそれを 2 倍に拡大したものの一部分を表すが，幾何的に考えれば大体わかる．