For Tutors

MeBio　数学テキスト

# 日本医科大学入試数学<br>2017年後期5番について

—背景—

*Edited by* kamei

# 第 1 章

# 問題と解答

## § 1　問題と解答

**問題** 1–1–1　以下の各問いに答えよ．

問 1　関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は微分可能，第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続かつ $f''(x) > 0$ を満たすとする．このとき，任意の実数 $x_1$，$x_2$ および $a_1 + a_2 = 1$ を満たす 0 以上の任意の実数 $a_1$，$a_2$ に対して，不等式

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) \leqq a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

が成り立つことを，$t$ の関数 $F(t) = a_1f(t) + a_2f(x_2) - f(a_1t + a_2x_2)$ を考えることにより証明せよ．

問 2　問 1 と同じ条件を満たす関数 $f(x)$ に対して，番号 $n$ $(\geqq 2)$ に関する帰納法により，不等式

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right) \leqq \sum_{j=1}^{n} a_jf(x_j)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$ は任意の実数，また $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ を満たす 0 以上の任意の実数とする．

問 3　$n(\geqq 2)$ 個の実数　$p_1$，$p_2$，$\cdots$，$p_n$ はすべて 1 より大とし，さらに $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$ を満たすとする．問 2 の不等式において，$f(x) = e^x$，$a_j = \dfrac{1}{p_j}$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ と置いて得られる不等式を求めよ ( 答えのみでよい ) ．

問 4　各 $p_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は問 3 で与えられたものとし，また各 $A_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は $n(\geqq 2)$ 個の 0 以上の実数とする．$n(\geqq 2)$ に対して不等式

$$\prod_{j=1}^{n} A_j \leqq \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

が成り立つことを，問 3 で得られた不等式において $x_j = p_j \log A_j$ と置くことにより証明せよ．ここに $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} A_j$ は次で定義される：

$$\prod_{j=1}^{n} A_j = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

問 5　関数 $g(x)$ を，閉区間 $[a,\ b]$ ( ただし $a<b$) で定義された恒等的に 0 でない連続関数とする．問 3 の各 $p_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対し，問 4 の不等式で

$$A_j=\frac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}}\ (j=1,\ \ 2,\ \ \ldots,\ \ n)$$

と置くことにより， $n(\geqq 2)$ に対して不等式

$$\int_a^b\left(\prod_{j=1}^n |g_j(x)|\right)dx\leqq\prod_{j=1}^n\left\{\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}\right\}$$

が成り立つことを証明せよ．

略解

解答

問 1　$a_1=0$ または $a_2=0$ のときは明らかに成り立つ．以下 $a_1>0,\ a_2>0$ とする．$t\ \fallingdotseq a_1t+a_2x_2$ のときは平均値の定理より $\exists c\in(t,\ a_1t+a_2x)$ に対して

$$\begin{aligned}F'(t)&=a_1f'(t)-a_1f(a_1t+a_2x_2)=a_1\{f'(t)-f(a_1t+a_2x_2)\}\\&=a_1\{t-(a_1t+a_2x_2)\}f''(c)=a_1\{(1-(a_1)t-a_2x_2)\}f''(c)\\&=a_1a_2(t-x_2)f''(c)\end{aligned}$$

が成り立つ，$t\ =a_1t+a_2x_2\iff t=x_2$ のときは $F'(t)=0$ である．従って

| $t$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $F'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $F(t)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

これより任意の実数 $t$ に対して $F(t)\geqq 0$ が成り立つことが分かった．等号は $t=x_2$ の時のみである．従って $t=x_1$ として

$$f(a_1x_1+a_2x_2)\leqq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$$

が証明された．等号は $x_1=x_2$ の時のみである．

問 2　$n=2$ のときは問 1 より成立する．$n\leqq k$ ($k$ は 2 以上のある自然数) のとき成り立つと仮定する．$n=k+1$ のときにも成立することを示したい．$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-2},\ (a_k+a_k+1)$ は和が 1 にあるすべて非負の $k$ 個の実数であるから，帰納法の仮定が使える．また，$\dfrac{a_k}{a_k+a_{k+1}},\ \dfrac{a_{k+1}}{a_k+a_{k+1}}$ は和が 1 になる非負の 2 実数である

から，帰納法の仮定が使える．これより

$$\begin{aligned}
& f\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j x_j\right) \\
= & f\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{k-1}x_{k-1} + a_kx_k + a_{k+1}x_{x+1}\right) \\
= & f\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{k-1}x_{k-1} + (a_k + a_{k+1})\left(\frac{a_k}{a_k + a_{k+1}}x_k + \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}}x_{k+1}\right)\right) \\
\leqq & a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_{k-1}f(x_{k-1}) + (a_k + a_{k+1})f\left(\frac{a_k}{a_k + a_{k+1}}x_k + \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}}x_{k+1}\right) \\
\leqq & a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_{k-1}f(x_{k-1}) + (a_k + a_{k+1})\left\{\frac{a_k}{a_k + a_{k+1}}f(x_k) + \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}}f(x_{k+1})\right\} \\
= & a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_{k-1}f(x_{k-1}) + a_kf(x_k) + a_{k+1}f(x_{k+1}) \\
= & \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)
\end{aligned}$$

以上により証明された．

問 3　$e^{\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{p_j}} \leqq \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{x_j}}{p_j}$ である．$\sum$ を使わずに書くと

$$e^{\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\cdots+\frac{x_n}{p_n}} \leqq \frac{e^{x_1}}{p_1} + \frac{e^{x_2}}{p_2} + \cdots + \frac{e^{x_n}}{p_n}$$

指数法則を使って左辺の無限和を無限積に書き換えると $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} e^{\frac{x_j}{p_j}} \leqq \sum_{j=1}^{n}\frac{e^{x_j}}{p_j}$ となる．書き下すと

$$e^{\frac{x_1}{p_1}} \cdot e^{\frac{x_2}{p_2}} \cdot \ \cdots \ \cdot e^{\frac{x_n}{p_n}} \leqq \frac{e^{x_1}}{p_1} + \frac{e^{x_2}}{p_2} + \cdots + \frac{e^{x_n}}{p_n}$$

問 4　$x_j = p_j \log A_j$ のとき $e^{\frac{x_j}{p_j}} = e^{\log A_j} = A_j$, $e^{x_j} = e^{p_j \log A_j} = A_j^{p_j}$ であるから代入すると

$$\prod_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

となる．

問 5　問 4 の不等式に $A_j = \dfrac{|g_j(x)|}{\left(\displaystyle\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}}}$ を代入すると次の式を得る．

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{|g_j(x)|}{\left(\displaystyle\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}}} \leqq \sum_{j=1}^{n}\frac{\dfrac{|g_j(x)|^{p_j}}{\displaystyle\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx}}{p_j}$$

$$\iff \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}|g_j(x)|}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}}} \leqq \sum_{j=1}^{n}\frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j\displaystyle\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx}$$

両辺の分子は $x$ の連続関数なので，区間 $[a,\ b]$ で定積分する．分母は $x$ に関係のない正の定数であることに注意．

$$\frac{\displaystyle\int_a^b \left(\prod_{j=1}^n |g_j(x)|\right) dx}{\displaystyle\prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}} \leqq \sum_{j=1}^n \frac{\displaystyle\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx}{\displaystyle p_j \int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx}$$

ところが 右辺 $= \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1$ である．従って

$$\int_a^b \left(\prod_{j=1}^n |g_j(x)|\right) dx \leqq \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

の成立することがわかった．

【17 日医】M_nichii_2017B_05.mdf

## § 2 解説

問 1,2 は 凸関数に関する Jensen の不等式である．証明も有名だが，帰納法を使って $n$ 変数に拡張する方法は慣れておかないと難しい．$n$ 文字に関する AM–GM 不等式の証明はこれで行うことが多い．その際重み付き AM–GM 不等式に拡張しておくほうがいろいろと便利が良い．

実際，本問の問 4 も $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$ のもとで

$$\frac{1}{p_1} A_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} A_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} A_n^{p_n} \geqq (A_1^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} (A_1^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \cdot \cdots \cdot (A_1^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}$$

が成り立つと言っているのだから，重み付き AM–GM 不等式に他ならない．

後半は関数空間の $L^p$ ノルムに関する Hölder の不等式の証明である．Hölder の不等式は普通次のように定式化される．

**定理 1.1**　文字はすべて正の実数，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ とする．次が成り立つ．

$$||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{p}} \cdot ||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{q}} \geqq ||\boldsymbol{uv}||_{\boldsymbol{r}}$$

ただし $||u||_p$ はベクトル $u$ に対する $L_p$ ノルムである． □

本問の問 5 の証明も，まず $n=2$ の場合を片付け，それを利用して $n$ 文字に拡張するほうが自然だと思われる．$n=2$ の場合は問題は次のようになる．

**問題 1–2–1**　$f(x),\ g(x)$ を恒等的に 0 ではない連続関数とする．正数 $p,\ q,\ r$ が $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ を満たすとき，次の不応式が成り立つ．

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \geqq \left(\int_a^b |f(x)g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

**証明** 両辺を $r$ 乗した次の不等式を示そう．$\left(\dfrac{r}{p}+\dfrac{r}{q}=1 \text{ に注意.}\right)$

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} \geqq \int_a^b |f(x)g(x)|^r dx$$

重み付き AM–GM 不等式より

$$|f(x)g(x)|^r = (|f(x)|^p)^{\frac{r}{p}}(|g(x)|^q)^{\frac{r}{q}} \leqq \frac{r}{p}|f(x)|^p + \frac{r}{q}|g(x)|^q$$

なのだが，こう進むと証明できない．左辺を取り込む必要がある．簡単のため $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx = F$, $\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q dx = G$ と置こう．

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)g(x)|^r}{F^{\frac{r}{p}}G^{\frac{r}{q}}} &= \frac{(|f(x)|^p)^{\frac{r}{p}}(|g(x)|^q)^{\frac{r}{q}}}{F^{\frac{r}{p}}G^{\frac{r}{q}}} = \left(\frac{|f(x)|^p}{F}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{|g(x)|^q}{G}\right)^{\frac{r}{q}} \\ &\leqq \frac{r}{p}\left(\frac{|f(x)|^p}{F}\right)+\frac{r}{q}\left(\frac{|g(x)|^q}{G}\right)\end{aligned}$$

この両辺を区間 $[a,\ b]$ で定積分する．

$$\begin{aligned}\int_a^b \text{左辺}\, dx &= \int_a^b \frac{|f(x)g(x)|^r}{F^{\frac{r}{p}}G^{\frac{r}{q}}}dx = \frac{1}{F^{\frac{r}{p}}G^{\frac{r}{q}}}\int_a^b |f(x)g(x)|^r dx \\ \int_a^b \text{右辺}\, dx &= \int_a^b \left\{\frac{r}{p}\left(\frac{|f(x)|^p}{F}\right)+\frac{r}{q}\left(\frac{|g(x)|^q}{G}\right)\right\}dx \\ &= \frac{r}{pF}\int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{r}{qG}\int_a^b |g(x)|^q dx \\ &= \frac{r}{pF}F + \frac{r}{qG}G = \frac{r}{p}+\frac{r}{q} = 1\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_a^b \text{左辺}\, dx \leqq \int_a^b \text{左辺}\, dx$ より $F^{\frac{r}{p}}G^{\frac{r}{q}} \geqq \displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|^r dx$ が従う．従って証明できた．　□

この結果を繰り返し使えば $n>2$ の場合に容易に拡張できる．（具体的には数学的帰納法）

上記の証明がピンとこない人は，数列の $L^p$ ノルムに関する Hölder の不等式証明の例を見てもらえれば様子が分かりやすいと思う．

**定理 1.2**　文字はすべて正の実数，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ とする．次が成り立つ．

$$(a^p+b^p+c^p)^{\frac{1}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{1}{q}} \geqq ((ax)^r+(by)^r+(cz)^r)^{\frac{1}{r}}$$

**証明**　まず与式の両辺を $r$ 乗する．

$$\begin{aligned}&(a^p+b^p+c^p)^{\frac{1}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{1}{q}} \geqq ((ax)^r+(by)^r+(cz)^r)^{\frac{1}{r}} \\ \Longleftrightarrow\quad &(a^p+b^p+c^p)^{\frac{r}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{r}{q}} \geqq (ax)^r+(by)^r+(cz)^r\end{aligned}$$

この不等式を示そう．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\text{右辺}}{\text{左辺}} \\
=\ & \frac{(ax)^r+(by)^r+(cz)^r}{(a^p+b^p+c^p)^{\frac{r}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{r}{q}}} \\
=\ & \left(\frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{x^q}{x^q+y^q+z^q}\right)^{\frac{r}{q}} \\
&+\left(\frac{b^p}{a^p+b^p+c^p}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{y^q}{x^q+y^q+z^q}\right)^{\frac{r}{q}} \\
&+\left(\frac{c^p}{a^p+b^p+c^p}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{z^q}{x^q+y^q+z^q}\right)^{\frac{r}{q}} \\
\leqq\ & \left(\frac{r}{p}\cdot\frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}+\frac{r}{q}\cdot\frac{x^q}{x^q+y^q+z^q}\right) \\
&+\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{b^p}{a^p+b^p+c^p}+\frac{r}{q}\cdot\frac{y^q}{x^q+y^q+z^q}\right) \\
&+\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{c^p}{a^p+b^p+c^p}+\frac{r}{q}\cdot\frac{z^q}{x^q+y^q+z^q}\right) \\
=\ & 1
\end{aligned}
$$

□