For Tutors

MeBio　数学テキスト

慶応大学医学部入試数学 2018年3番について

—背景—

Edited by kamei

第 1 章

問題と解答

§ 1　問題と解答

+問題 1–1–1　以下の文章の空欄の $\boxed{\text{（け）}}$ には適切な式を，それ以外には適切な数を入れて文章を完成させなさい．

(1)　x を実数として

$$f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

とおく．このとき

$$f(x) = \boxed{\text{（あ）}} \sin 2x + \boxed{\text{（い）}} \sin 4x + \boxed{\text{（う）}} \sin 6x$$

と書くことができる．p を $f(p) = 0$ を満たす最小の正の数とするとき，曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq p)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{（え）}}$ である．

(2)　x を実数として

$$g(x) = -\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x - \sin 3x \sin x$$

とおく．このとき

$$g(x) = \boxed{\text{（お）}} (\cos 2x + \cos 5x) + \boxed{\text{（か）}} \cos 3x + \boxed{\text{（き）}} \cos 4x$$

と書ける．また $g\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = \boxed{\text{（く）}}$ である．

(3)　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を実数として

$$A = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$

$$B = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$$

$$C = \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha$$

とおく．C を $A,\ B$ の式で表すと，$C = \boxed{\text{（け）}}$ である．

以下，$\alpha = \dfrac{\pi}{7},\ \beta = -\dfrac{2\pi}{7},\ \gamma = -\dfrac{3\pi}{7}$ のときを考える．i を虚数単位として，$z = \cos \dfrac{2\pi}{7} + i \sin \dfrac{2\pi}{7}$ とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} z^k = \boxed{\text{（こ）}}$ であり，このことから上記の $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の値に対して B の値を求めると，$B = \boxed{\text{（さ）}}$ である．$g\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = C$ であることと，A の符号に注意すると，A の値は $\boxed{\text{（し）}}$ である．このことから $f\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ の値は $\boxed{\text{（す）}}$ である．

略解

(1) (あ) $\dfrac{1}{4}$ (い) $\dfrac{1}{4}$ (う) $-\dfrac{1}{4}$ (え) $\dfrac{9}{32}$

(2) (お) $-\dfrac{1}{2}$ (か) $\dfrac{1}{2}$ (き) $\dfrac{1}{2}$ (く) 0

(3) (け) $\dfrac{1}{2}A^2+\dfrac{1}{4}B-\dfrac{3}{4}$ (こ) 0 (さ) $-\dfrac{1}{2}$ (し) $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (す) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

解答

(1) 積和の公式より

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x \\ &= \frac{1}{2}\cos x\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\sin 3x=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x)-\frac{1}{4}\sin 6x \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x \end{aligned}$$

$p=\dfrac{\pi}{3}$ は容易にわかるので，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x\right)dx \\ &= \left[-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{8}\cos\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{16}\cos\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{24}\cos 2\pi\right)-\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{24}\right) \\ &= \frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{24} \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

(2) やはり積和の公式より

$$\begin{aligned} g(x) &= -\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x-\sin 3x\sin x \\ &= \frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)+\frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)+\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 5x)+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 4x \end{aligned}$$

すると $g\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2}{7}\pi+\cos\dfrac{5}{7}\pi\right)+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{7}\pi+\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{7}\pi$ ということになるが，$\cos\dfrac{5}{7}\pi=-\cos\dfrac{2}{7}\pi$，$\cos\dfrac{4}{7}\pi=-\cos\dfrac{3}{7}\pi$ であるから $g\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=0$ である．

(3) (け) について

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 \\ &= \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta+2\sin\beta\sin\gamma+2\sin\sin\gamma\sin\alpha \\ &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\frac{1-\cos 2\gamma}{2}+2C \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}B+2C \end{aligned}$$

従って $C=\dfrac{1}{2}A^2+\dfrac{1}{4}B-\dfrac{3}{4}$ であることが分かる．

(こ) はもちろん $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} z^k = z\frac{1-z^7}{1-z}=0$ である．この実部を考えると

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{14\pi}{7}=0$$

ということになるが，$\cos\dfrac{2\pi}{7}=\cos\dfrac{12\pi}{7}=\cos 2\alpha$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}=\cos\dfrac{10\pi}{7}=\cos 2\beta$, $\cos\dfrac{6\pi}{7}=\cos\dfrac{8\pi}{7}=\cos 2\gamma$, $\cos\dfrac{14\pi}{7}=1$ であるから，$B=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．

また

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{7}\right) &= -\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} \\ &= \sin\frac{\pi}{7}\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{7} \\ &= C=0 \end{aligned}$$

もわかっている．これらを $C=\dfrac{1}{2}A^2+\dfrac{1}{4}B-\dfrac{3}{4}$ に代入すると $0=\dfrac{1}{2}A^2+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{4} \iff A^2=\dfrac{7}{4}$ を得る．つまり $A=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ であるが，明らかに $A<0$ であるから $A=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ とわかる．

(1) の結果より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}\right)=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right) \\ &= -\frac{A}{4}=\frac{\sqrt{7}}{8} \end{aligned}$$

とわかった．

【18 慶應】M_keiou_2018_03.mdf

§ 2　気になった点

誘導に従えば自動的に答えにたどり着くが，いったい何を目標にして何が分かったのかが非常にわかりにくい．そこを考えてみた．

$\zeta_7=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とする．$\mathbb{Q}(\zeta_7)$ は $\mathbb{Q}$ 上の 6 次巡回拡大であり，2 次の部分体として $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ を持つ．実際 $\sqrt{-7}$ は Gauss 和 として $-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^5+(\zeta_7)=\sqrt{-7}$ のように表される．

しかし $\sqrt{7}$ は $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ の元ではない．$\sqrt{7}$ を三角関数の和で表そうと思えば $K=\mathbb{Q}(\zeta_7,\ i)$ を考えないといけない．

そうすると $\sqrt{7}$ を K の元として表示することができるわけだが，$\sqrt{7}$ は実数だから $K\cap\mathbb{R}$ の元になっている．そして $K\cap\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ の 6 次拡大，$\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ の 3 次拡大であり，$\mathbb{Q}$ のベクトル空間の基底として $\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}$, $\cos\dfrac{6\pi}{7}$, $\sin\dfrac{2\pi}{7}$, $\sin\dfrac{4\pi}{7}$, $\sin\dfrac{6\pi}{7}$ が取れる．だから $\sqrt{7}$ はこの 6 つの有理数係数の線形和で一意的に表されるのである．

真の問題

$\sqrt{7}$ を $\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}$, $\cos\dfrac{6\pi}{7}$, $\sin\dfrac{2\pi}{7}$, $\sin\dfrac{4\pi}{7}$, $\sin\dfrac{6\pi}{7}$ の有理数係数の線形和で表せ．　□

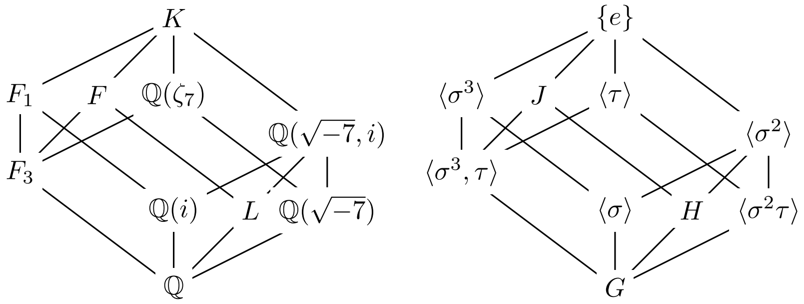
最初は $K=\mathbb{Q}(\zeta_7,\ i)$ を考えようとしたのだが，よくよく考えれば $i=(\zeta_{28})^7$ であり，$K=\mathbb{Q}(\zeta_{28})$ に過ぎないと気づいた．そして $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})=(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times\simeq(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ が $\mathbb{Q}(\zeta_28)=\mathbb{Q}(\zeta_7,\ i)$ であることに対応している．

$\zeta=\zeta_{28}=\cos\dfrac{2\pi}{28}+i\sin\dfrac{2\pi}{28}$ とおく．$\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})=(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times\ni\overline{k}$ は $\zeta\to\zeta^k$ で定義される．$\zeta_7=\zeta^4,\ i=\zeta^7$ である．

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は $\sigma:\zeta_7\to(\zeta_7)^3$ で生成されるが，これを $\mathbb{Q}(i)$ には自明に作用するように延長する．つまり $\sigma:\zeta_7\to(\zeta_7)^3,\ i\to i$ であり，これは $\overline{17}\in(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ に対応する．

また $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})=\{e,\ \tau\}$ とし， τ を $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ を不変にするように延長する．つまり $\sigma:\zeta_7\to\zeta_7,\ i\to -i$ であり，これは $\overline{15}\in(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ に対応する．

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})=\langle\sigma,\tau|\sigma^6=\tau^2=e,\ \sigma\tau=\tau\sigma\rangle$ であり，体と群の対応は次のようになっている．



群	体
$\{e\}$	$K=\mathbb{Q}(\zeta)=\mathbb{Q}(\zeta_7,\ i)$
$\langle\tau\rangle$	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$
$J=\langle\sigma^3\tau\rangle$ 複素共役	$F=\mathbb{Q}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7},\sqrt{7}\right)=K\cap\mathbb{R}$ 最大実部分体
$\langle\sigma^3\rangle$	$F_1=\mathbb{Q}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7},\ i\right)$
$\langle\sigma^2\rangle$	$\mathbb{Q}\left(\sqrt{-7},\ i\right)$
$\langle\sigma^3,\ \tau\rangle$	$F_3=\mathbb{Q}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}\right)=\mathbb{Q}(\zeta_7)\cap\mathbb{R}$
$\langle\sigma\rangle$	$\mathbb{Q}(i)$
$\langle\sigma^2\tau\rangle$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$
$H=\langle\sigma\tau\rangle$	$\mathbb{Q}(\sqrt{7})$
G	$\mathbb{Q}$

これで問題がはっきりしてきた．$\sin\dfrac{2\pi}{7}=\dfrac{\zeta_7-\overline{\zeta_7}}{2i}\in\mathbb{Q}(\zeta_7,\ i)\cap\mathbb{R}=F$ であるが，$L=\mathbb{Q}\left(\sqrt{7}\right)$ には含まれない（後述）．そこで 3 次拡大 F/L における共役元やノルム，トレースを考えようというのが背景である．

$H=\langle\sigma\tau\rangle$ なので，作用させてみよう．

$$\sigma\tau\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)=\sigma\tau\left(\frac{\zeta_7-\overline{\zeta_7}}{2i}\right)=\frac{(\zeta_7)^3-\overline{(\zeta_7)^3}}{-2i}=-\sin\frac{6\pi}{7}$$

$$(\sigma\tau)^2\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)=\sigma^2\left(\frac{\zeta_7-\overline{\zeta_7}}{2i}\right)=\frac{(\zeta_7)^9-\overline{(\zeta_7)^9}}{2i}=\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$(\sigma\tau)^3\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)=\sigma^3\tau\left(\frac{\zeta_7-\overline{\zeta_7}}{2i}\right)=\frac{(\zeta_7)^{27}-\overline{(\zeta_7)^{27}}}{-2i}=\frac{(\zeta_7)^{-1}-\overline{(\zeta_7)^{-1}}}{-2i}=\frac{\overline{\zeta_7}-\zeta_7}{-2i}=\sin\frac{2\pi}{7}$$

実際 $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ に関する Gauss 和は $-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^5+(\zeta_7)=\sqrt{-7}$ なので，

$$\mathrm{Tr}_{F/L}\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)=\frac{(\zeta_7)-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^5}{2i}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

である．

§ 3　別解

$-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^5+(\zeta_7)=\sqrt{-7}$ であったから

$$\sqrt{7}=\frac{-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^5+(\zeta_7)}{i}$$

である．$\zeta_7=\zeta^4$, $i=\zeta^7$ を代入して変形していく．（$\zeta^{14}=-1$ に注意）

$$\begin{aligned}
&\sqrt{7}\\
=\ &\frac{-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^5+(\zeta_7)}{i}\\
=\ &\frac{-\zeta^{12}+\zeta^8-\zeta^{24}+\zeta^{16}-\zeta^{20}+\zeta^4}{\zeta^7}\\
=\ &-\zeta^5+\zeta-\zeta^{17}+\zeta^9-\zeta^{13}+\zeta^{-3}\\
=\ &-\zeta^5+\zeta+\zeta^3-\zeta^{-5}+\zeta^{-1}+\zeta^{-3}\\
=\ &(\zeta+\zeta^{-1})-(\zeta^5+\zeta^{-5})+(\zeta^3+\zeta^{-3})\\
=\ &2\cos\frac{\pi}{14}-2\cos\frac{5\pi}{14}+2\cos\frac{3\pi}{14}\\
=\ &2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)\\
=\ &2\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\\
=\ &2\sin\frac{4\pi}{7}-2\sin\frac{6\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}
\end{aligned}$$

§ 4　猛反省

ここまで書いて実は全く自明であることに気づいた．Gauss 和

$$-(\zeta_7)^3+(\zeta_7)^2-(\zeta_7)^6+(\zeta_7)^4-(\zeta_7)^5+(\zeta_7)=\sqrt{7}i$$

の虚部を比較すると

$$
\begin{aligned}
& -\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{12\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{10\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}=\sqrt{7} \\
\iff\quad & -\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}=\sqrt{7} \\
\iff\quad & \sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}
\end{aligned}
$$

である．以上，おしまい．（チャンチャン）