For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2018 年 10 月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 10 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

$[0,\ 1]$ で定義された連続な実数値関数 f が，$(0,\ 1)$ で連続な導関数 f' をもち，$f(0)=0,\ f(1)=1$ を満たすとき．

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx$$

のとり得る最小値を求めよ．

第 2 章

解答

§ 1　仮定を強めた場合の解

$f(x) \in C^2[0,\ 1]$ を仮定しないと解きにくい．以下ではそれを仮定して解いてみよう．

最小値を実現する関数を $f_0(x)$ とする．$g(x)$ を，$g(0)=g(1)=0$ を満たす C^2 級の関数とすると，任意の実数 k に対して $f(x)=f_0(x)+kg(x)$ も $f(0)=0,\ f(1)=1$ を満たす C^2 級の関数であるから，最小性より

$$\int_0^1 \left\{\{f_0(x)+kg(x)\}^2+\{f_0'(x)+kg'(x)\}^2\right\}dx \geqq \int_0^1 \left\{\{f_0(x)\}^2+\{f_0'(x)\}^2\right\}dx$$

が成り立つ．これを展開整理すると

$$2k\int_0^1 \{f_0(x)g(x)+f_0'(x)g'(x)\}\,dx + k^2\int_0^1 \left\{\{g(x)\}^2+\{g'(x)\}^2\right\}dx \geqq 0$$

任意の k に対してこれが成立するには $\displaystyle\int_0^1\{f_0(x)g(x)+f_0'(x)g'(x)\}dx=0$ であることが必要十分である．ところがこれは次のように変形される．

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\{f_0(x)g(x)+f_0'(x)g'(x)\}dx\\
=\ &\int_0^1 f_0(x)g(x)dx+[f_0'(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f_0''(x)g(x)dx\\
=\ &\int_0^1\{f_0(x)-f_0''(x)\}g(x)dx
\end{aligned}$$

これが常に 0 になるには $f_0(x)-f_0''(x)=0$ でなければならない．この微分方程式の一般解は $f_0(x)=se^x+te^{-x}$ であるが，$f_0(0)=0,\ f_0(1)=1$ より $f_0(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e-e^{-1}}$ となる．このとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{\{f_0(x)\}^2+\{f_0'(x)\}^2\right\}dx\\
=\ &\frac{1}{(e-e^{-1})^2}\int_0^1\left\{\left(e^x-e^{-x}\right)^2+\left(e^x+e^{-x}\right)^2\right\}dx\\
=\ &\frac{1}{(e-e^{-1})^2}\int_0^1\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)dx\\
=\ &\frac{1}{(e-e^{-1})^2}\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]_0^1=\frac{e^2-e^{-2}}{(e-e^{-1})^2}=\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}
\end{aligned}$$

§ 2　C^1 の解

$f''(x)$ の存在を仮定しない場合の最小値が，先ほどの結果よりも小さいとする．その場合の関数を $f_1(x)$ とする．

任意の ε に対し，ある $f(x) \in C^2[0,\ 1]$ で，あらゆる $x \in [0,\ 1]$ に対し，$|f(x) - f_1(x)| < \varepsilon$, $|f'(x) - f_1'(x)| < \varepsilon$ を満たすものが存在する．（厳密には $\varepsilon - \delta$ 論法を使って，コンパクト集合 $[0,\ 1]$ を有限個の開集合で覆い，$f(x)$ の存在を示すことになるが，大変面倒である．）

従って $\displaystyle\int_0^1 \left\{\{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2\right\} dx$ の値は $\displaystyle\int_0^1 \left\{\{f_1(x)\}^2 + \{f_1'(x)\}^2\right\} dx$ にいくらでも近づけることができる．これは矛盾．

こんな感じで証明になっているだろうか．