For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2018 年 9 月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 9 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1
正の整数 n に対し，$|x^2 - y^2|$ が n 以下の奇数であるような整数 $x,\ y$ の組の個数を $f(n)$, $|x^2 - y^2|$ が n 以下の正の偶数であるような整数 $x,\ y$ の組の個数を $g(n)$ で表す．このとき

$$|f(n) - g(n) - (4\log 2)n| < 12\sqrt{n}$$

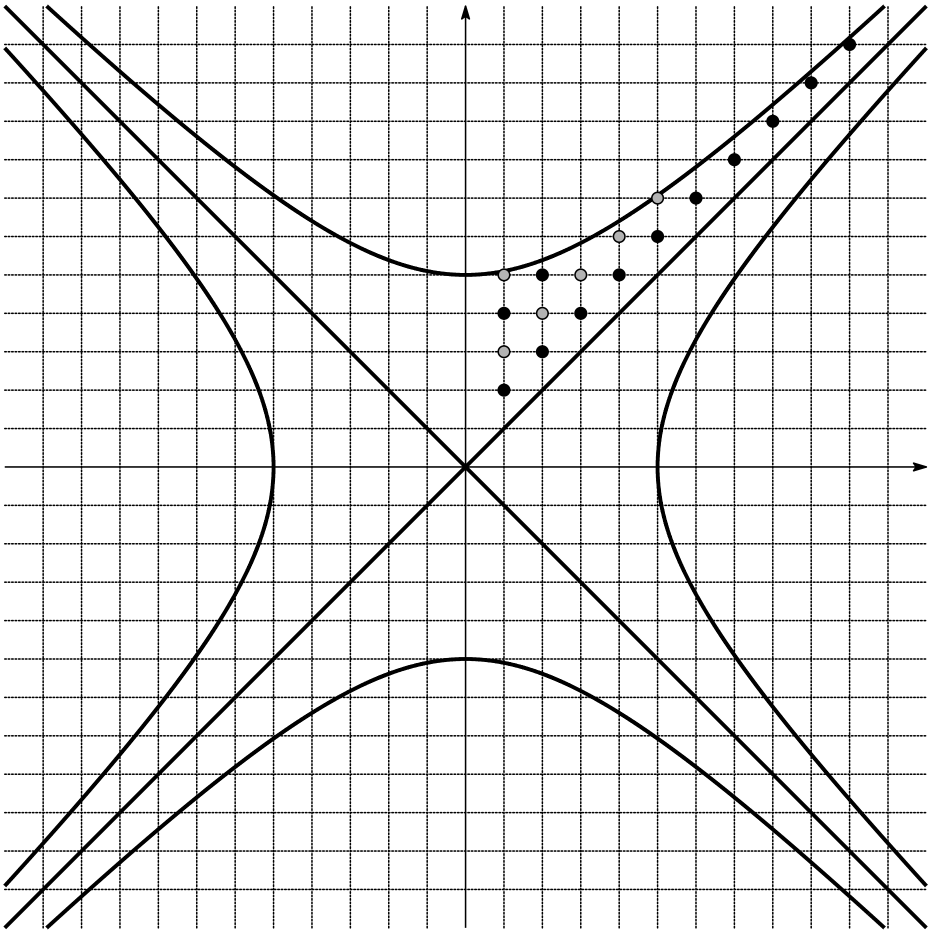
が成り立つことを示せ．

第 2 章

解答

§ 1

$|x^2 - y^2| = n$ は図のように 4 つの双曲線からできている．これら 4 つの双曲線で囲まれた領域に含まれる格子点は無限個存在するが，$y = \pm x$ 上の格子点を除外すると有限個しかない．



本問はそれら有限個の格子点のうち，$x \not\equiv y \pmod 2$ のもの（●）を $f(n)$ 個，$x \equiv y \pmod 2$ のもの（○）を $g(n)$ 個として，その個数の差を評価せよという問題である．

最初は $f(n)$ や $g(n)$ を何らかの面積と比較し上下から挟み込む問題だと思ったのだが，面積評価だと評価のオーダーがどうしても $O(n)$ になってしまう．$O(\sqrt{n})$ にはできそうもない．また $\log 2$ が表れているのもあまり自然な感じがしない．

いろいろ考えて，この $\log 2$ は面積評価ではなく $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ からきているのだということが分かった．

領域 S を $S=\{(x,\ y)\mid x>0,\ y>x,\ |y^2-x^2|\leqq n\}$ と置く．S における (●の数) − (○の数) を考える．この数を $h(n)$ と置く．$|x^2-y^2|=n$ の x 切片，y 切片は $\pm\sqrt{n}$ であるが，$[\sqrt{n}]$ の偶奇によって場合分けして考えよう，ただし後の評価で必要となるので，小さい n に関しては先に調べておく

(1)　$n=1$ の場合 与式 $\iff |4-0-4\log 2|<12$ でこれは成立している．

(2)　$n=2$ の場合 与式 $\iff |4-0-4\log 2|<12\sqrt{2}$ でこれは成立している．

(3)　$n=3$ の場合 与式 $\iff |12-0-4\log 2|<12\sqrt{3}$ でこれは成立している．

(4)　$n=4$ の場合 与式 $\iff |12-4-4\log 2|<24$ でこれは成立している．

そこで以下では $n\geqq 5$ とする．

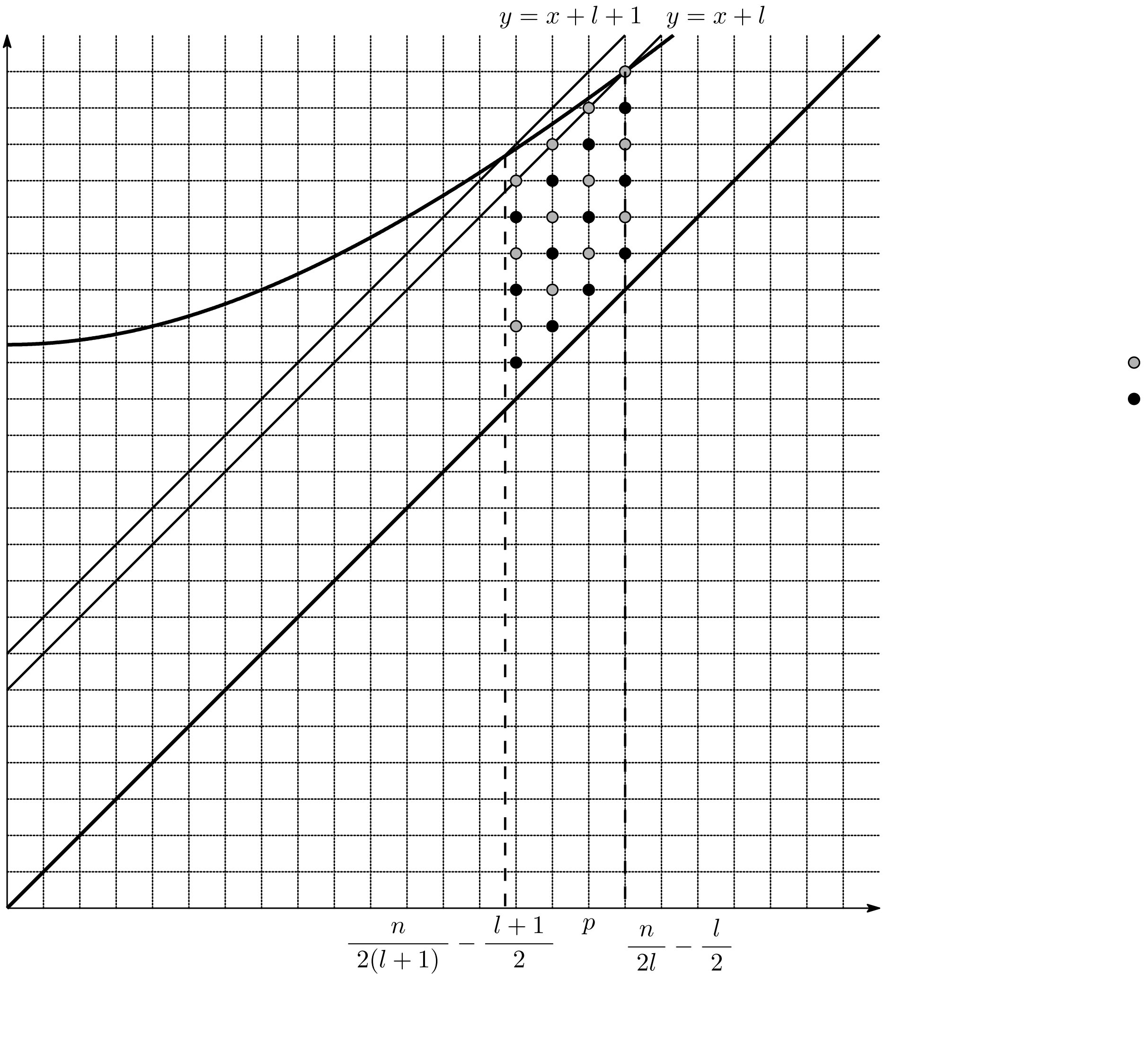
(5)　$[\sqrt{n}]=2m$ の場合．

$n\geqq 5$ であったから $m\geqq 1$ である．

x 軸上に存在する格子点は $(\pm 1,\ 0),\ \cdots,\ (\pm 2m,\ 0)$ だから (●の数) と (○の数) は同数である．y 軸上の格子点も同様．従って $h(n)=\dfrac{f(n)-g(n)}{8}$ である．S の格子点を $y=x+k$ 上の点に分解して数えよう．

k を $1\leqq k\leqq 2m$ を満たす自然数とする．$y=x+k$ と $y^2-x^2=n$ の 1 象限の交点は $\left(\dfrac{n}{2k}-\dfrac{k}{2},\ \dfrac{n}{2k}+\dfrac{k}{2}\right)$ である．

p が $\dfrac{n}{2(l+1)}-\dfrac{l+1}{2}<p\leqq\dfrac{n}{2l}-\dfrac{l}{2}$ を満たす自然数である場合，S の領域内で $x=p$ 上には ●, ○が下からこの順に交互に l 個並ぶ．l が奇数であれば (●の数) − (○の数) $=1$ であり，l が偶数であれば (●の数) − (○の数) $=0$ である．



従って $h(n)$ は次のように（誤差なく）表される．

$$\begin{aligned} h(n) &= \left(\left[\frac{n}{2\cdot 1}-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2\cdot 2}-\frac{2}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2\cdot 3}-\frac{3}{2}\right]-\left[\frac{n}{2\cdot 4}-\frac{4}{2}\right]\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\left[\frac{n}{2\cdot(2m-1)}-\frac{2m-1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2\cdot 2m}-\frac{2m}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

この式を上下から評価しよう．一般に $a-1<[a]\leqq a$ であるから

$$a-b-1<[a]-[b]<a-b+1$$

が成り立つ．従って上からの評価は

$$\begin{aligned} h(n) &< \left(\left(\frac{n}{2\cdot 1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{n}{2\cdot 2}-\frac{2}{2}\right)+1\right)+\left(\left(\frac{n}{2\cdot 3}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{n}{2\cdot 4}-\frac{4}{2}\right)+1\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\left(\frac{n}{2\cdot(2m-1)}-\frac{2m-1}{2}\right)-\left(\frac{n}{2\cdot 2m}-\frac{2m}{2}\right)+1\right) \\ &= \left(\frac{n}{2\cdot 1}-\frac{n}{2\cdot 2}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{n}{2\cdot 3}-\frac{n}{2\cdot 4}+\frac{3}{2}\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\frac{n}{2\cdot(2m-1)}-\frac{n}{2\cdot 2m}+\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)+\frac{3}{2}m \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m} \\ =\ & \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}<\int_m^{2m}\frac{1}{x}dx=\log 2 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} & h(n)<\frac{n}{2}\log 2+\frac{3}{2}m=\frac{n}{2}\log 2+\frac{3}{2}\cdot\frac{[\sqrt{n}]}{2}\leqq\frac{n}{2}\log 2+\frac{3}{4}\sqrt{n} \\ \Longrightarrow\ & f(n)-g(n)-(4\log 2)n<6\sqrt{n} \\ \Longrightarrow\ & f(n)-g(n)-(4\log 2)n<12\sqrt{n} \end{aligned}$$

次に下からの評価であるが

$$\begin{aligned} h(n) &> \left(\left(\frac{n}{2\cdot 1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{n}{2\cdot 2}-\frac{2}{2}\right)-1\right)+\left(\left(\frac{n}{2\cdot 3}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{n}{2\cdot 4}-\frac{4}{2}\right)-1\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\left(\frac{n}{2\cdot(2m-1)}-\frac{2m-1}{2}\right)-\left(\frac{n}{2\cdot 2m}-\frac{2m}{2}\right)-1\right) \\ &= \left(\frac{n}{2\cdot 1}-\frac{n}{2\cdot 2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{n}{2\cdot 3}-\frac{n}{2\cdot 4}-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\frac{n}{2\cdot(2m-1)}-\frac{n}{2\cdot 2m}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)-\frac{1}{2}m \end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\\
=\ &\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\\
=\ &\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m-1}+\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{m}\right)\\
>\ &\int_m^{2m}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2m}\\
=\ &\log 2-\frac{1}{2m}
\end{aligned}
$$

以上より

$$h(n)>\frac{n}{2}\log 2-\frac{n}{4m}-\frac{1}{2}m$$

後は $\dfrac{n}{4m}+\dfrac{1}{2}m<\dfrac{3}{2}\sqrt{n}$ さえいえれば $f(n)-g(n)-(4\log 2)n>-12\sqrt{n}$ が示せたことになる．評価が甘いのでこれは容易．実際 $5\leqq n$ かつ $2m\leqq\sqrt{n}<2m+1$ なので

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{4m}+\frac{1}{2}m<\frac{4m^2+4m+1}{4m}+\frac{1}{2}m=\frac{3}{2}m+1+\frac{1}{4m}\\
\leqq\ &\frac{3}{2}m+\frac{5}{4}\leqq\frac{3}{2}m+\frac{3}{2}m=3m\leqq\frac{3}{2}\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

(6)　$[\sqrt{n}]=2m+1$ の場合．

$n\geqq 5$ であったが，この場合に当てはまるのは $n\geqq 9$ である．$m\geqq 1$ も成り立っている．

x 軸上に存在する格子点は $(\pm 1,\ 0),\ \cdots,\ (\pm(2m+1),\ 0)$ だから (●の数) $=$ (○の数) $+2$ である．y 軸上の格子点も同様．従って $h(n)=\dfrac{f(n)-g(n)-4}{8}$ である．

先ほどと同様に考えて

$$
\begin{aligned}
h(n)\ =\ &\left(\left[\frac{n}{2\cdot 1}-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2\cdot 2}-\frac{2}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2\cdot 3}-\frac{3}{2}\right]-\left[\frac{n}{2\cdot 4}-\frac{4}{2}\right]\right)\\
&+\cdots+\left(\left[\frac{n}{2\cdot(2m-1)}-\frac{2m-1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2\cdot 2m}-\frac{2m}{2}\right]\right)+\left[\frac{n}{2\cdot(2m+1)}-\frac{2m+1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$[\sqrt{n}]=2m$ の場合と違うのは，最後の項が正で単独に表れているところである．

この最終項に関しては $2m+1\leqq\sqrt{n}<2m+2$ より

$$
\begin{aligned}
0\ \leqq\ &\left[\frac{n}{2(2m+1)}-\frac{2m+1}{2}\right]<\frac{n}{2(2m+1)}-\frac{2m+1}{2}<\frac{4m^2+8m+4}{2(2m+1)}-\frac{4m^2+4m+1}{2(2m+1)}\\
=\ &\frac{4m+3}{2(2m+1)}=1+\frac{1}{2(2m+1)}\leqq\frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

先ほどの結果と合わせて上からの評価 $h(n)<\dfrac{n}{2}\log 2+\dfrac{3}{2}m+\dfrac{7}{6}$ を得る．これより

$$
\begin{aligned}
& h(n) < \frac{n}{2}\log 2 + \frac{3}{2}m + \frac{7}{6} \\
\iff\quad & \frac{f(n)-g(n)-4}{8} < \frac{n}{2}\log 2 + \frac{3}{2}m + \frac{7}{6} \\
\iff\quad & f(n)-g(n) < 4n\log 2 + 12m + \frac{40}{3} \\
\implies\quad & f(n)-g(n)-(4\log 2)n < 24m+12 \qquad \left(\because\ 12m > \frac{4}{3}\right) \\
\implies\quad & f(n)-g(n)-(4\log 2)n < 12\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

最終項が 0 以上なので下からの評価は先ほどと同じ $h(n) > \dfrac{n}{2}\log 2 - \dfrac{n}{4m} - \dfrac{1}{2}m$ が使える．

$$
\begin{aligned}
& h(n) > \frac{n}{2}\log 2 - \frac{n}{4m} - \frac{1}{2}m \\
\iff\quad & \frac{f(n)-g(n)-4}{8} > \frac{n}{2}\log 2 - \frac{n}{4m} - \frac{1}{2}m \\
\iff\quad & f(n)-g(n) > 4n\log 2 - \frac{2n}{m} - 4m + 4
\end{aligned}
$$

ここで $2m+1 \leqq \sqrt{n} < 2m+2$ より

$$
\frac{2n}{m} + 4m - 4 < \frac{8m^2+16m+8}{m} + 4m - 4 = 12m + 12 + \frac{8}{m} < 24m + 12 \leqq 12\sqrt{n}
$$

従って $f(n)-g(n)-(4\log 2)n > -12\sqrt{n}$ が証明された．

以上より問題は解決したが，途中の式変形を見る限り右辺は半分の $6\sqrt{n}$ 近くにできそうである．（$7\sqrt{n}$ や $6\sqrt{n}+O(1)$ など．）$6\sqrt{n}$ でも不等式は成り立つであろうが，証明はもっと精密なものが必要となるだろう．