For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2018 年 7 月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 7 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

任意の実数 $x,\ y$ に対して

$$F\left(2x^2,\ 2y^2\right) = F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right)$$

が成立するような，実数係数の x と y の多項式 $F(x,\ y)$ を求めよ．

第 2 章

解答

§ 1　常識

命題 2.1　(1)　x に関する 2 つの多項式 $f(x)$, $g(x)$ の値が無限個の x に対して一致するなら，$f(x)$ と $g(x)$ は同じ多項式である．

(2)　x に関する 2 つの解析関数 $f(x)$, $g(x)$ の値が非可算無限個の x に対して一致するなら，$f(x)$ と $g(x)$ は同じ多項式である．

(3)　$x,\ y$ に関する 2 つの多項式 $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$ の値が $x>0,\ y>0$ の領域で一致するなら，$f(x,\ y)$ と $g(x,\ y)$ は同じ多項式である．

証明　(1), (3) は高校生の知識でも簡単に証明出来るが，$f(x)=g(x)$ や $f(x,\ y)=g(x,\ y)$ の解が Zariski 位相に関して閉集合だということで済ませよう．(2) は関数論の初歩である．

命題 2.2　x に関する多項式 $f(x)$ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすすべての θ に関して $f(\cos\theta)=f(\sin\theta)$ を満たせば，$f(x)$ は $x^2(1-x^2)$ の多項式になっている．

証明　とても当たり前のような気がするが．いざ証明せよと言われると面倒な方法しか思いつかない．

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ と置くと $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ である．$g_1(t)=f(\cos\theta)=f\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, $g_2(t)=f(\sin\theta)=f\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ は $0\leqq t\leqq 1$ に対して値が一致するが，両方解析関数（有理関数）だから命題 (2.1) より関数として完全に一致することになる．$g_1(t)$ は t に関する偶関数だから，$g_2(t)$ もそうである．そのためには $f(x)$ は x の奇数乗の項を含んではいけない．

そこで $f(x)=h(x^2)$ とおく，$f(\cos\theta)=h(\cos^2\theta)$, $f(\sin\theta)=h(\sin^2\theta)=h(1-\cos^2\theta)$ だから $h(x^2)=h(1-x^2)$ が $0\leqq x\leqq 1$ に関して成り立つことになる．命題 (2.1) より $h(x)=h(1-x)$ がすべての x に関して成り立つ．

$y=x(1-x)$ とし, $h(x)$ の x^2 を $x-y$ に置き換えていく（x に関する次数下げを行う）と最終的に $h(x)=p(y)+xq(y)$ の形にすることが出来る．（x に関する 2 次未満の多項式に出来る．）このとき $h(x)=h(1-x)$ より $q(y)=0$ がわかる．

（これらは関数体 $\mathbb{R}(t)$ に対する変換 $t\to -t$ における不変体が $\mathbb{R}(t^2)$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}(x)/\mathbb{R}(x^2))\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であること，関数体 $\mathbb{R}(x)$ に対する変換 $x\to 1-x$ における不変体が $\mathbb{R}(x(1-x))$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}(x)/\mathbb{R}(x(1-x)))\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることを意味する．）

$h(x)=p(x(1-x))$ だから $f(x)=h(x^2)=p(x^2(1-x^2))$ が証明された．　□

§ 2　解答

$G(k,t)=F\left(\dfrac{k(1+t)}{2},\ \dfrac{k(1-t)}{2}\right)$ と置く．$G(k,\ t)$ は $k,\ t$ に関する多項式である．（もっと強く $k,\ kt$ に関する多項式である．）ここで $k>0$, $-1<t<1$ としよう．$\dfrac{k(1+t)}{2}>0$, $\dfrac{k(1-t)}{2}>0$ だから $\dfrac{k(1+t)}{2}=2x^2$,

$\dfrac{k(1-t)}{2}=2y^2$ となる正の実数 $x,\ y$ が取れる．実際 $x=\dfrac{\sqrt{k(1+t)}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{k(1-t)}}{2}$ である．

その場合

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \left(\frac{\sqrt{k(1+t)}}{2}+\frac{\sqrt{k(1-t)}}{2}\right)^2\\ &= \frac{k(1+t)}{4}+\frac{k(1-t)}{4}+\frac{2k\sqrt{(1+t)(1-t)}}{4}\\ &= \frac{k\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{2}\\ (x-y)^2 &= \left(\frac{\sqrt{k(1+t)}}{2}-\frac{\sqrt{k(1-t)}}{2}\right)^2\\ &= \frac{k(1+t)}{4}+\frac{k(1-t)}{4}-\frac{2k\sqrt{(1+t)(1-t)}}{4}\\ &= \frac{k\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)}{2}\end{aligned}$$

が成り立っている．

命題 2.3　$k>0,\ 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対して $G(k,\cos\theta)=G(k,\sin\theta)$ が成り立つ．

証明　$\dfrac{k(1+\cos\theta)}{2}=2x^2,\ \dfrac{k(1-\cos\theta)}{2}=2y^2$ と考える．$F\left(2x^2,\ 2y^2\right)=F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right)$ および上の式変形により

$$\begin{aligned}&G(k,\cos\theta)\\ =\ & F\left(\frac{k(1+\cos\theta)}{2},\ \frac{k(1-\cos\theta)}{2}\right)\\ =\ & F\left(\frac{k(1+\sqrt{1-\cos^2\theta})}{2},\ \frac{k(1+\sqrt{1-\cos^2\theta})}{2}\right)\\ =\ & F\left(\frac{k(1+\sin\theta)}{2},\ \frac{k(1+\sin\theta)}{2}\right)\\ =\ & G(k,\sin\theta)\end{aligned}$$

□

系 2.4　$G(k,\ t)=H(k,\ t^2(1-t^2))$ となるような多項式 $H(x,\ y)$ が存在する．さらに $G(k,\ t)$ は $k,\ kt$ に関する多項式でもあったから，$G(k,\ t)=I\left(k,\ (kt)^2\{k^2-(kt)^2\}\right)$ となるような多項式 $I(x,\ y)$ が存在する．□

さて

$$G(k,t)=F\left(\frac{k(1+t)}{2},\ \frac{k(1-t)}{2}\right)=I\left(k,\ (kt)^2\{k^2-(kt)^2\}\right)$$

において $\dfrac{k+kt}{2}=x,\ \dfrac{k-kt}{2}=y$ と置き換える．$k=x+y,\ kt=x-y$ だから

$$F(x,\ y)=I\left(x+y,\ (x-y)^2\left\{(x+y)^2-(x-y)^2\right\}\right)=I\left(x+y,\ 4xy(x-y)^2\right)$$

$I\left(x+y,\ 4xy(x-y)^2\right)$ の 4 は無駄だから次の様に言える．

命題 2.5 任意の $x,\ y$ に対して $F\left(2x^2,\ 2y^2\right) = F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right)$ が成り立つためには，ある多項式 $J(x,\ y)$ によって

$$F(x,\ y) = J\left(x+y,\ xy(x-y)^2\right)$$

と表されることが必要である． □

これを必要十分条件と言い切っても問題ないような気もするが，一応念のため確認しておこう．

命題 2.6 命題 (2.5) は十分条件にもなっている．
証明

$$\begin{aligned} & F(2x^2,\ 2y^2) \\ = \ & J\left(2x^2+2y^2,\ 2x^2\cdot 2y^2(2x^2-2y^2)^2\right) \\ = \ & J\left(2(x^2+y^2),\ 16x^2y^2(x+y)^2(x-y)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F((x+y)^2,\ (x-y)^2) \\ = \ & J\left((x+y)^2+(x-y)^2,\ (x+y)^2(x-y)^2\{(x+y)^2-(x+y)^2\}^2\right) \\ = \ & J\left(2(x^2+y^2),\ 16x^2y^2(x+y)^2(x-y)^2\right) \end{aligned}$$

□

結論として次が得られた．

定理 2.7 任意の $x,\ y$ に対して $F\left(2x^2,\ 2y^2\right) = F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right)$ が成り立つためには，ある多項式 $J(x,\ y)$ によって

$$F(x,\ y) = J\left(x+y,\ xy(x-y)^2\right)$$

と表されることが必要十分である． □

第 3 章

別解

§ 1　体論による解釈

もう少し数学的な用語を使って問題の本質を探ってみたい．$F(x,\ y)$ が多項式であることは余り本質的ではなく，有理式で考えてから分母を除いたものと思えばよい．そこで有理関数体で考えることにする．

$K = \mathbb{R}(x,\ y)$ と置く．K は $\mathbb{R}$ 上超越次元が 2 の体である．

$$M = \{F(x,\ y) \in K \mid \forall x,\ \forall y,\ F\left(2x^2,\ 2y^2\right) = F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right)\}$$

が K の部分体であることは明らかであるが，問題はこの体の生成元を決定することに等しい．

y を $-y$ に置き換えると $F\left(2x^2,\ 2y^2\right) = F\left((x-y)^2,\ (x+y)^2\right)$ となる，従って $F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right) = F\left((x-y)^2,\ (x+y)^2\right)$ がわかる．これは $F\left(x,\ y\right) = F\left(y,\ x\right)$ であることを意味する．

（ここの証明がしっくりこない．解析性や Zariski 位相など持ち出さずにいいたいのだが．そもそも関数 $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$ が一致するとは値が一致することであろう．それに対し多項式 $f(x,\ y), g(x,\ y)$ が一致するとは各項の係数が一致することであろう．標数が 0 ならこれらはほとんど同値であるが，標数 p だとややこしくなる．今の場合は問題なし．）

$\sigma(x) = y, \sigma(y) = x$ で定義される体 K の自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ を考える．$G = \{e,\ \sigma\} \subset \mathrm{Aut}(K)$ と置く．$F(x,\ y) = F(y,\ x)$ は F が G 不変体 L に含まれることを意味する．（ $F(x,\ y) \in L = K^G$ ）

ここで $L = \mathbb{R}(x+y,\ xy)$ であり，$\mathrm{Gal}(K/L) = G$ であることは Galois 理論の基本である．$x+y = z,\ xy = w$ とおけば $L = \mathbb{R}(z,\ w), K = L(x)$ であり，x の L 上の定義方程式は $x^2 - zx + w = 0$ ということになる．

そこで $F(x,\ y) = S(x+y,\ xy) = S(z,\ w)$ とすると

$$F\left(2x^2,\ 2y^2\right) = F\left((x+y)^2,\ (x-y)^2\right) \iff S\left(2x^2+2y^2,\ 4x^2y^2\right) = S\left(2x^2+2y^2,\ (x^2-y^2)^2\right)$$

$2x^2+2y^2,\ 4x^2y^2$ は $\mathbb{R}$ 上代数的独立である．$(x^2-y^2)^2 = (x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2$ であるから $S(z,\ w) = S\left(z,\ \dfrac{1}{4}z^2 - w\right)$ が $(z,\ w)$ の通常位相におけるある開集合上で成立する．ということはすべての $(z,\ w)$ に対し $S(z,\ w) = S\left(z,\ \dfrac{1}{4}z^2 - w\right)$ がなり立たないといけない．

$\tau(w) = w, \tau(w) = \dfrac{1}{4}z^2 - w$ で定義される体 L の自己同型 $\tau \in \mathrm{Aut}(L)$ を考える．$H = \{e,\ \tau\} \subset \mathrm{Aut}(L)$ と置く．$S(z,\ w) = S\left(z,\ \dfrac{1}{4}z^2 - w\right)$ は S が H 不変体 M に含まれることを意味する．（ $S(z,\ w) \in M = L^H$ ）

ここで $M = \mathbb{R}\left(z,\ w\left(\dfrac{1}{4}z^2 - w\right)\right) = \mathbb{R}\left(z,\ w\left(z^2 - 4w\right)\right)$ であり，$\mathrm{Gal}(L/M) = H$ である．$q = w\left(z^2 - 4w\right)$ とおけば $M = \mathbb{R}(z,\ q), L = M(w)$ であり，w の L 上の定義方程式は $4w^2 - z^2w + q = 0$ ということになる．

$x,\ y$ で表すと $M = \mathbb{R}(z,\ q) = \mathbb{R}(x+y,\ xy\{(x+y)^2 - 4xy\}) = \mathbb{R}(x+y,\ xy(x-y)^2)$ であるから $F(x,\ y)$ は $x+y,\ xy(x-y)^2)$ の多項式で表されることがわかった．

§ 2 体の包含関係

$K=\mathbb{R}(x,\ y)$ は $M=\mathbb{R}(z,\ q)=\mathbb{R}(x+y,\ xy\{(x+y)^2-4xy\})=\mathbb{R}(x+y,\ xy(x-y)^2)$ の 4 次 (代数) 拡大であるが，Galois 拡大ではない．x の $L=\mathbb{R}(x+y,\ xy)=\mathbb{R}(z,\ w)$ 上の定義多項式は $f(X)=X^2-zX+w=0$ であるが，これに τ を作用させると $f^{\tau}(X)=X^2-zX+\dfrac{1}{4}z^2-w=0$ となる．この 2 解は $X=\dfrac{z\pm2\sqrt{w}}{2}=\dfrac{x+y\pm2\sqrt{xy}}{2}$ であり，x の M 上の共役元は $x,\ y,\ \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{2},\ \dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}$ の 4 つである．

従って，K/M は Galois 拡大ではなく K の M 上の Galois 閉包は $N=K\left(\sqrt{xy}\right)$ であるとわかる．N/M は 8 次拡大であるが，x の 4 つの共役元の置換として表現されるから S_4 の部分群である．従って S_4 の 2–Sylow 群であり $\mathrm{Gal}(N/M)\simeq D_4$ (2 面体群) と決定される．

$x=\alpha,\ y=\beta,\ \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{2}=\gamma,\ \dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\delta$ とし，$\mathrm{Gal}(N/M)$ を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ の置換群と考えよう，

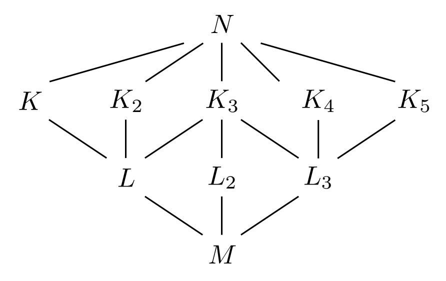
まず $N=K(\sqrt{xy})$ だから $\rho=(\gamma,\ \delta)\in\mathrm{Gal}(N/K)$ (γ と δ の互換) があって，$K=N^{\langle\rho\rangle}$ である．$\sigma\in\mathrm{Gal}(K/L)$ は $\mathrm{Gal}(N/L)$ の元として $(\alpha,\ \beta)$ もしくは $(\alpha,\ \beta)(\gamma,\ \delta)$ として延長されるが，必要であれば $\alpha\rho$ と交換することにより $\sigma=(\alpha,\ \beta)$ と思ってよい．,

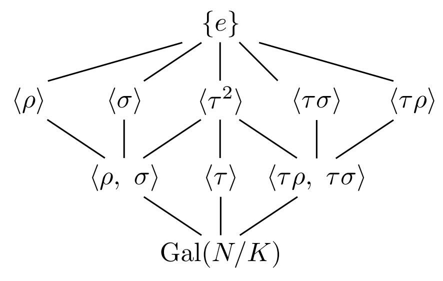
さて $\mathrm{Gal}(N/M)$ は二面体群だから位数 4 の元を含む，それを (1234) とするとその 2 乗 $(13)(24)$ は $\mathrm{Gal}(N/L)$ に含まれるから $\sigma\rho=(\alpha,\ \beta)(\gamma,\ \delta)$ でなければならない．そこでその位数 4 の元は $\tau=(\alpha,\ \gamma,\ \beta,\ \delta)$ としてよい．

以上より $\mathrm{Gal}(N/M)=\langle\tau,\ \sigma\rangle=\langle\tau,\ \rho\rangle$ であって，

$$
\begin{aligned}
\tau^4=\sigma^2=\rho^2 &= e\\
\tau &= (\alpha,\ \gamma,\ \beta,\ \delta)\\
\tau^3 &= (\alpha,\ \delta,\ \beta,\ \gamma)\\
\sigma &= (\alpha,\ \beta)\\
\rho &= (\gamma,\ \delta)\\
\tau^2=\sigma\rho=\rho\sigma &= (\alpha,\ \beta)(\gamma,\ \delta)\\
\tau\sigma=\sigma\tau^3=\rho\tau=\tau^3\rho &= (\alpha,\ \delta)(\beta,\ \gamma)\\
\tau\rho=\rho\tau^3=\sigma\tau=\tau^3\sigma &= (\alpha,\ \gamma)(\beta,\ \delta)
\end{aligned}
$$

であることがわかった，体と群の包含関係は次の様になっている．





群	体
$\{e\}$	$N = K(\sqrt{xy}) = \mathbb{R}(x,\ y,\ \sqrt{xy})$
$\langle\rho\rangle$	$K = L(x-y) = \mathbb{R}(x,\ y)$
$\langle\sigma\rangle$	$K_2 = L\left(\sqrt{xy}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ \sqrt{xy}\right)$
$\langle\tau^2\rangle$	$K_3 = L\left(\sqrt{q}\right) = L\left((x-y)\sqrt{xy}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ xy,\ (x-y)\sqrt{xy}\right)$
$\langle\tau\sigma\rangle$	$K_4 = L_3\left(\sqrt{z^2-4\sqrt{q}}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ x-y-2\sqrt{xy}\right)$
$\langle\tau\rho\rangle$	$K_5 = L_3\left(\sqrt{z^2+4\sqrt{q}}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ x-y+2\sqrt{xy}\right)$
$\langle\rho,\ \sigma\rangle$	$L = M(w) = M\left(\sqrt{z^4-16q}\right) = \mathbb{R}(x+y,\ xy)$
$\langle\tau\rangle$	$L_2 = M\left(\sqrt{q(z^4-16q)}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ xy(x-y)^2,\ (x^2+y^2-6xy)(x-y)\sqrt{xy}\right)$
$\langle\tau\rho,\ \tau\sigma\rangle$	$L_3 = M\left(\sqrt{q}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ (x-y)\sqrt{xy}\right)$
$\mathrm{Gal}(N/M)$	$M = \mathbb{R}(z,\ q) = \mathbb{R}\left(x+y,\ xy(x-y)^2\right)$

表の対応が正しいことは以下のようにしてわかる．

(1) $L = M(w)$ であるが $q = (x-y)^2xy = (z^2-4w)w$ であるから $4w^w - z^2w + q = 0$ より $w = \dfrac{z^2 \pm \sqrt{z^4-16q}}{2}$ である．従って $L = M\left(\sqrt{z^4-16q}\right)$ となるが,

$$\begin{aligned}\sqrt{z^4-16q} &= \sqrt{(x+y)^2-16(x-y)^2xy} = \sqrt{(x+y)^2-16\{(x+y)^2-4xy\}xy}\\ &= \sqrt{(x+y)^2-16xy(x+y)^2+64x^2y^2} = (x+y)^2-8xy\\ &= \alpha^2+\beta^2-6\alpha\beta\end{aligned}$$

である．これが σ や ρ で不変なのは明らかだが，τ を作用させてみると

$$\tau(\alpha^2+\beta^2-6\alpha\beta) = (\gamma^2+\delta^2-6\gamma\delta) = 2(\gamma-\delta)^2-(\gamma+\delta)^2 = 8xy-(x+y)^2 = -(\alpha^2+\beta^2-6\alpha\beta)$$

となり，共役な元に写っていることがわかる．(x^2+y^2-6xy が $-x^2-y^2+6xy$ に写るところが意外に感じられた．よくよく考えればそうなるように作ってあるのだが.)

(2) $\alpha-\beta = x-y$, $\gamma-\delta = 2\sqrt{xy}$ より $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = 2(x-y)\sqrt{xy} = 2\sqrt{q}$ である．

$$\tau((\alpha-\beta)(\gamma-\delta)) = (\gamma-\delta)(\beta-\alpha) = -(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$$

であるから $\sqrt{q}$ は τ 不変ではない．これより $L_3 = M\left(\sqrt{q}\right)$, $L_2 = M\left(\sqrt{q(z^4-16q)}\right)$

(3) $K_3 = L\cdot L_3 = L\left(\sqrt{q}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ xy,\ (x-y)\sqrt{xy}\right)$ である．

(4) K_4 は $\tau\sigma = (\alpha,\ \delta)(\beta,\ \gamma)$ 不変な元の集合だから L_3 上 $\alpha+\delta-\beta-\gamma = x-y-2\sqrt{xy}$ で生成される．その L_3 上の共役元は $\beta+\gamma-\beta-\delta) = -(x-y-2\sqrt{xy})$ である．実際

$$(x-y-2\sqrt{xy})^2 = (x-y)^2-4(x-y)\sqrt{xy}+4xy = (x+y)^2-4(x-y)\sqrt{xy} = z^2-4\sqrt{q}$$

であるから $x-y-2\sqrt{xy} = \sqrt{z^2-4\sqrt{q}}$ ということになり,

$$K_4 = L_3\left(\sqrt{z^2-4\sqrt{q}}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ (x-y)\sqrt{xy},\ x-y-2\sqrt{xy}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ x-y-2\sqrt{xy}\right)$$

であることがわかった．

(5) 同様に考えると

$$K_5 = L_3\left(\sqrt{z^2+4\sqrt{q}}\right) = \mathbb{R}\left(x+y,\ x-y+2\sqrt{xy}\right)$$

である.

$$L_3\left(\sqrt{(z^2-4\sqrt{q})\,(z^2+4\sqrt{q})}\right)=L_3\left(\sqrt{z^4-16q}\right)=L_3\left((x+y)^2-8xy\right)=L_3\,(xy)$$

となるからこれは先程の結果に矛盾しない.