For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2018 年 6 月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 6 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

n は正の整数とし，これを固定する．a, b, c, d は 0 以上の整数，k は整数とし，$a+b+c+d+2k=n$, $a \geqq -k$, $b \geqq -k$, $c \geqq -k$, $d \geqq -k$ を満たす a, b, c, d, k の組 (a, b, c, d, k) の集合を S とするとき，

$$\sum_{(a,b,c,d,k)\in S} \frac{1}{a!b!c!d!(a+k)!(b+k)!(c+d)!(d+k)!}$$

の値を求めよ

第 2 章

解答

§ 1　多項定理

$a+b+c+d+2k=n$ より $a+b+c+d+(a+k)+(b+k)+(c+k)+(d+k)=2n$ である．
8 変数に対する多項定理より

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)^{2n}\\
=&\sum_{a+b+c+d+e+f+g+h=2n}\frac{(2n)!}{a!b!c!d!e!f!g!h!}{x_1}^a{x_2}^b{x_3}^c{x_4}^d{x_5}^e{x_6}^f{x_7}^g{x_8}^h
\end{aligned}$$

が成り立っているが．これに問題の条件をうまく反映させたい．そのためには $x_1=stu,\ x_2=\dfrac{1}{s},\ x_3=\dfrac{1}{t},$ $x_4=\dfrac{1}{u},\ x_5=\dfrac{1}{stu},\ x_6=s,\ x_7=t,\ x_8=u$ とすればうまくいくことがわかる．実際

$$\left(stu+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{stu}+s+t+u\right)^{2n} \tag{2.1}$$

$$= \sum_{a+b+c+d+e+f+g+h=2n}\frac{(2n)!}{a!b!c!d!e!f!g!h!}(stu)^a\left(\frac{1}{s}\right)^b\left(\frac{1}{t}\right)^c\left(\frac{1}{u}\right)^d\left(\frac{1}{stu}\right)^e s^f t^g u^h \tag{2.2}$$

であるが，この展開式の項が定数項になる条件を考えてみると，

$$\begin{aligned}
&(stu)^a\left(\frac{1}{s}\right)^b\left(\frac{1}{t}\right)^c\left(\frac{1}{u}\right)^d\left(\frac{1}{stu}\right)^e s^f t^g u^h \text{ が定数項}\\
\iff\ & a-b-e+f=0 \text{ かつ } a-c-e+g=0 \text{ かつ } a-d-e+h=0\\
\iff\ & a-e=b-f=c-g=d-h\\
\iff\ & {}^{\exists}k\{\ e=a+k,\ f=b+k,\ g=c+k,\ h=d+k\}
\end{aligned}$$

であることがわかる．従って求める値は $\left(stu+\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{stu}+s+t+u\right)^{2n}$ の定数項の $\dfrac{1}{(2n)!}$ 倍ということになる．

§ 2　因数分解に気付く

最初は Laurent 級数の定数項を求める問題だと考えて解いたのだが，それよりもずっとうまい解法があることに気付いた．

(2.1) をじっと眺めていると，次の因数分解に気付く．

$$\left(stu+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{stu}+s+t+u\right)=\left(s+\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{u}\right)\left(u+\frac{1}{s}\right)$$

従って $\left(stu+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{stu}+s+t+u\right)^{2n}$ の定数項は $\left(s+\frac{1}{t}\right)^{2n}\left(t+\frac{1}{u}\right)^{2n}\left(u+\frac{1}{s}\right)^{2n}$ の定数項に一致する．しかしこれは $\left(s+\frac{1}{t}\right)^{2n}$ の $s^n\left(\frac{1}{t}\right)^n$ の項と $\left(t+\frac{1}{u}\right)^{2n}$ の $t^n\left(\frac{1}{u}\right)^n$ の項と $\left(u+\frac{1}{s}\right)^{2n}$ の $u^n\left(\frac{1}{s}\right)^n$ の項の積からしか生成しない．従って定数項は $({}_{2n}\mathrm{C}_n)^3=\frac{\{(2n)!\}^3}{(n!)^6}$ である．

問題の答は $\frac{\{(2n)!\}^2}{(n!)^6}$．

§ 3　検算

$\left(stu+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{stu}+s+t+u\right)^{2n}$ の定数項は $\left(s+\frac{1}{t}\right)^{2n}\left(t+\frac{1}{u}\right)^{2n}\left(u+\frac{1}{s}\right)^{2n}$ の定数項に一致することを $n=2$ の場合に確かめてみよう．

まず左辺の定数項には次の様なものがある．

	stu (a)	$\frac{1}{s}$ (b)	$\frac{1}{t}$ (c)	$\frac{1}{u}$ (d)	$\frac{1}{stu}$ $(a+k)$	s $(b+k)$	t $(c+k)$	u $(d+k)$	k	係数
①	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	$\frac{4!}{1!1!1!1!0!0!0!0!}=24$
②	0	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{4!}{0!0!0!0!1!1!1!1!}=24$
③	2	0	0	0	2	0	0	0	0	$\frac{4!}{2!0!0!0!2!0!0!0!}=6$
④	0	2	0	0	0	2	0	0	0	$\frac{4!}{0!2!0!0!0!2!0!0!}=6$
⑤	0	0	2	0	0	0	2	0	0	$\frac{4!}{0!0!2!0!0!0!2!0!}=6$
⑥	0	0	0	2	0	0	0	2	0	$\frac{4!}{0!0!0!2!0!0!0!2!}=6$
⑦	1	1	0	0	1	1	0	0	0	$\frac{4!}{1!1!0!0!1!1!0!0!}=24$
⑧	1	0	1	0	1	0	1	0	0	$\frac{4!}{1!0!1!0!1!0!1!0!}=24$
⑨	1	0	0	1	1	0	0	1	0	$\frac{4!}{1!0!0!1!1!0!0!1!}=24$
⑩	0	1	1	0	0	1	1	0	0	$\frac{4!}{0!1!1!0!0!1!1!0!}=24$
⑪	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$\frac{4!}{0!1!0!1!0!1!0!1!}=24$
⑫	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$\frac{4!}{0!0!1!1!0!0!1!1!}=24$
計										216

一方右辺の定数項は ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=6^3=216$ であり，左辺の定数項と一致する

$n=3$ の場合は次の通り．

	stu (a)	$\frac{1}{s}$ (b)	$\frac{1}{t}$ (c)	$\frac{1}{u}$ (d)	$\frac{1}{stu}$ $(a+k)$	s $(b+k)$	t $(c+k)$	u $(d+k)$	k	係数
① 並べ換え	2	1	1	1	1	0	0	0	-1	$\frac{6!}{2!1!1!1!1!0!0!0!}=360$ ① を含めて 360×4 個
② 並べ換え	1	0	0	0	2	1	1	1	1	$\frac{6!}{1!0!0!0!2!1!1!1!1!}=360$ ② を含めて 360×4 個
③ 並べ換え	3	0	0	0	3	0	0	0	0	$\frac{6!}{3!0!0!0!3!0!0!0!}=20$ ③ を含めて 20×4 個
④ 並べ換え	2	1	0	0	2	1	0	0	0	$\frac{6!}{2!1!0!0!2!1!0!0!}=180$ ④ を含めて 180×12 個
⑤ 並べ換え	1	1	1	0	1	1	1	0	0	$\frac{6!}{1!1!1!0!1!1!1!0!}=720$ ⑤ を含めて 720×4 個

総数は

$$360\times 4+360\times 4+20\times 4+180\times 12+720\times 4=8000$$

である．一方右辺の定数項は ${}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3=20^3=8000$ であり，左辺の定数項と一致する

§ 4　最初の解法

最初は Laurent 級数の定数項を求める問題だと考えた．(2.1) の展開式は s の正数乗，負数乗の両方を含む．整関数 $f(z)=\sum_{k=0}^{N}a_kz^k$ の定数項なら $f(0)$ であり $z=0$ を代入するだけで済む．$f(z)=\sum_{k=-N}^{0}a_kz^k$ の定数項なら $\lim_{z\to\infty}f(z)$ である．$f(z)=\sum_{k=-N}^{N}a_kz^k$ の場合は留数解析により $a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z}dz$ で求めることになるだろう．ここで C は原点を反時計計回りに一周する閉経路である．$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と置くと $dz=(-r\sin\theta+ir\cos\theta)d\theta=izd\theta$ であるから，これは次の様にも表すことが出来る．

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(r(\cos\theta+\sin\theta)\right)d\theta$$

そこで (2.1) 式を s に関して整理して

$$\left(stu+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{stu}+s+t+u\right)^{2n}=\sum_{k=-2n}^{2n}f_k(t,\ u)s^k$$

とする．$s=\frac{1}{\sqrt{tu}}e^{i\theta}$ と置換すると

$$\begin{aligned}
& stu+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{stu}+s+t+u\\
=\ & (tu+1)s+\frac{tu+1}{tu}\cdot\frac{1}{s}+\frac{t+u}{tu}+t+u\\
=\ & \frac{tu+1}{\sqrt{tu}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+\frac{(t+u)(1+tu)}{tu}\\
=\ & \frac{tu+1}{\sqrt{tu}}\left(2\cos\theta+\frac{t+u}{\sqrt{tu}}\right)\\
=\ & \left(\sqrt{tu}+\frac{1}{\sqrt{tu}}\right)\left(2\cos\theta+\sqrt{\frac{t}{u}}+\sqrt{\frac{u}{t}}\right)
\end{aligned}$$

従って先程の結果より

$$f_0(t,\ u) \tag{2.3}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\sqrt{tu}+\frac{1}{\sqrt{tu}}\right)\left(2\cos\theta+\sqrt{\frac{t}{u}}+\sqrt{\frac{u}{t}}\right)\right\}^{2n}d\theta \tag{2.4}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{tu}+\frac{1}{\sqrt{tu}}\right)^{2n}\int_0^{2\pi}\left(2\cos\theta+\sqrt{\frac{t}{u}}+\sqrt{\frac{u}{t}}\right)^{2n}d\theta \tag{2.5}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\sqrt{tu}\right)^k\left(\frac{1}{\sqrt{tu}}\right)^{2n-k}\right\} \tag{2.6}$$

$$\times\left\{\sum_{(l,\ m)}\frac{(2n)!}{l!m!(2n-l-m)!}\left(\sqrt{\frac{t}{u}}\right)^l\left(\sqrt{\frac{u}{t}}\right)^m\int_0^{2\pi}(2\cos\theta)^{2n-l-m}\ d\theta\right\} \tag{2.7}$$

この $f_0(t,\ u)$ の $t,\ u$ に関する定数項を求めたい．(2.6) の展開項の $t,\ u$ の次数は等しいから，(2.7) の展開項のうち $t,\ u$ の次数の等しい項だけを考えればよい．それは $l=m$ に対応する項である．

ところが $l = m$ の場合，$\left(\sqrt{\dfrac{t}{u}}\right)^{l}\left(\sqrt{\dfrac{u}{t}}\right)^{m} = 1$ になってしまうから，(2.6) の展開項のうち必要な項は $k = 2n - k$ つまり $k = n$ だけということになる．

結局次がわかった．

$$f_0(t,\ u)\ \text{の定数項} \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\,{}_{2n}\mathrm{C}_n \times \left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!}{l!l!(2n-2l)!} \int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n-2l}\ d\theta\right\} \tag{2.8}$$

よく知られているように

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}}\pi$$

であるから (2.8) は次の様になる．

$$f_0(t,\ u)\ \text{の定数項} \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,{}_{2n}\mathrm{C}_n \times \left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!}{l!l!(2n-2l)!} \times 4 \times 2^{2n-2l}\,\frac{{}_{2n-2l}\mathrm{C}_{n-l}}{2^{2n-2l+1}}\pi\right\} \tag{2.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,{}_{2n}\mathrm{C}_n \times \left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!}{l!l!(2n-2l)!} \times 2\pi \times \frac{(2n-2l)!}{(n-l)!(n-l)!}\right\} \tag{2.11}$$

$$= {}_{2n}\mathrm{C}_n \times \left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{n!}{l!(n-l)!}\right\} \tag{2.12}$$

$$= {}_{2n}\mathrm{C}_n \times {}_{2n}\mathrm{C}_n \times \left\{\sum_{l=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_l \times {}_{n}\mathrm{C}_l\right\} \tag{2.13}$$

$$= {}_{2n}\mathrm{C}_n \times {}_{2n}\mathrm{C}_n \times {}_{2n}\mathrm{C}_n \tag{2.14}$$

以上により最初の答と一致する結果が得られた．