For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール 2018年4月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 4 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

平面上に共通点を持たない円 Γ と直線 l がある．n を正の奇数とし，l 上に点 L_1, L_2, $\cdots$, L_n があるとき，次を満たす点 L_{n+1} が l 上に存在することを示せ．

Γ 上の相異なる $n+1$ 個の点 X_1, X_2, $\cdots$, X_{n+1} に対し $\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_{i+1}, \mathrm{L}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が同一直線上にあるならば，$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_{n+1}$ L_{n+1} が同一直線上にあるか，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+1}$ は l と平行である．

第 2 章

解答

考えている性質は明らかに射影不変である．従って，この「円」の部分を「楕円」,「放物線」,「双曲線」などの 2 次曲線で置き換えてもよい．また，「$\cdots$ であるか，平行である」という部分の記述は交点が無限遠点にあることを意味するが．これも適当な射影変換により有限の位置に存在する交点に変換することが出来る．

そこで問題は次のように言い換えることが出来る．

東進の問題の言い換え 2–1

平面上に共通点を持たない円 Γ と直線 l がある．n を正の奇数とし，l 上に点 $\mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_2,\ \cdots,\ \mathrm{L}_n$ がある．Γ 上に点 X_1 を取る．直線 $\mathrm{L}_1\mathrm{X}_1$ が円 Γ と接するときは X_1 を取り直すことにして，直線 $\mathrm{L}_1\mathrm{X}_1$ と円 Γ の X_1 でない方の交点を X_2 と置く．

以下同様に $i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して，(直線 $\mathrm{L}_i\mathrm{X}_i$ が円 Γ と接するときは X_1 を取り直すことにして) 直線 $\mathrm{L}_i\mathrm{X}_i$ と円 Γ の X_i でない方の交点を X_{i+1} と置く．

($\mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_{i+1}$ は写像として全単射だから，X_i がうまく定義出来なくなるような X_1 は有限個しか存在しない．それを避けるように X_1 を取ればよい．)

このようにして定めた X_{n+1} について，$\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{X}_1$ と直線 l が平行になってしまう場合は，平面全体を適当に射影変換して，平行にならないように L_i, X_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, X_{n+1} を取り直す．その上で $\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{X}_1$ と直線 l の交点を L_{n+1} と定める．

問題　L_{n+1} は X_1 の取り方によらず L_i $(i=1,\ 2,\ \cdot,\ n)$ だけで決まることを示せ．　□

証明の方針

(1)　上の「言い換え」の操作により，適当な X_1 からスタートして X_{n+1} を決める．

(2)　全く同様の操作により，適当な Y_1 からスタートして Y_{n+1} を決める．$2n+2$ 個の点 X_i, Y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1)$ はすべて異なるようにすることが出来る．

(3)　直線 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+1}$ と $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_{n+1}$ の交点を L_{n+1} と定める．($\mathrm{X}_1\mathrm{X}_{n+1}$ と $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_{n+1}$ が平行になる状況は，適当な射影変換により避けることが出来る,)

(4)　L_{n+1} が l 上にあることをいう．

これがいえれば，L_{n+1} は $\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{X}_1$ と直線 l の交点でもあり，$\mathrm{Y}_{n+1}\mathrm{Y}_1$ と直線 l の交点でもあることになる，つまり L_{n+1} が，最初の点 X_1 の取り方によらず定まることが証明出来たことになる．

証明しないといけないのは (4) の部分だけである．そのために，円 Γ が複素数平面の単位円であるものとして，パスカル線の存在を証明し，それを利用する．まずは複素数平面における直線の方程式からはじめよう．

命題 2.1　複素数 z に関する方程式 $z+\lambda\overline{z}=\mu$ が複素数平面で直線を表す $\iff \lambda\overline{\lambda}=1,\ \lambda\overline{\mu}=\mu$

証明　与式の共役を考えると

$$z+\lambda\overline{z}=\mu \iff \overline{z}+\overline{\lambda}z=\overline{\mu} \iff \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \overline{\lambda} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu \\ \overline{\mu} \end{pmatrix}$$

この行列の determinant が 0 でなければ z は 1 つに決まってしまう．従って $\lambda\overline{\lambda}=1$.

このとき $\overline{z}+\overline{\lambda}z=\overline{\mu} \iff \lambda\overline{z}+z=\lambda\overline{\mu}$ であるから $\lambda\overline{\mu}\fallingdotseq\mu \Longrightarrow$ 不能, $\lambda\overline{\mu}=\mu \Longrightarrow$ 不定 となる．直線となるのは後者の方である．

□

命題 2.2　$|\alpha|=|\beta|=1,\ \alpha\fallingdotseq\beta$ とする．2 点 $\alpha,\ \beta$ を通る直線の方程式は

$$z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$$

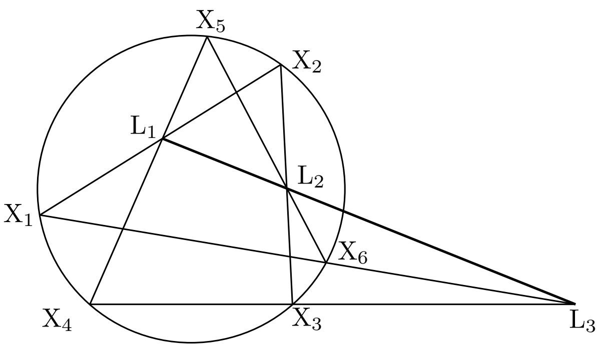
である．

証明

$$\begin{aligned}
& z\text{ が直線 }\alpha\beta\text{上} \\
\iff\quad & \frac{z-\beta}{z-\alpha}=\overline{\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right)} \\
\iff\quad & (z-\beta)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(\overline{z}-\overline{\beta})(z-\alpha) \\
\iff\quad & (\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta \\
\iff\quad & \left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha} \\
\iff\quad & \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta} \\
\iff\quad & z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta
\end{aligned}$$

□

定理 2.3（パスカル線）　図のように円上に異なる 6 点 X_1〜X_6 が存在するとする．（並びの順は任意.）直線 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ と直線 $\mathrm{X}_4\mathrm{X}_5$ の交点を L_1, 直線 $\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3$ と直線 $\mathrm{X}_5\mathrm{X}_6$ の交点を L_2, 直線 $\mathrm{X}_3\mathrm{X}_4$ と直線 $\mathrm{X}_6\mathrm{X}_1$ の交点を L_3 とする．（交点が存在する場合のみ考える.）



このとき $\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3$ は一直線上に並ぶ.

証明　この円は複素数平面上の単位円だとしてもよい．$\mathrm{X}_i(\alpha_i)$ とする．$|\alpha_i|=1$ である．

直線 X_1X_2 の方程式は $z+\alpha_1\alpha_2\overline{z}=\alpha_1+\alpha_2$, 直線 X_4X_5 の方程式は $z+\alpha_4\alpha_5\overline{z}=\alpha_4+\alpha_5$ であるから，辺々引いて $(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)\overline{z}=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5$, つまり $L_1(w_1)$ とすると

$$\overline{w_1}=\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}$$

同様に $L_2(w_2)$, $L_3(w_3)$ とすると

$$\overline{w_2}=\frac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6}$$
$$\overline{w_3}=\frac{\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1}{\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1}$$

であり，

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{w_3}-\overline{w_1}}{\overline{w_2}-\overline{w_1}}\\
=&\frac{\dfrac{\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1}{\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1}-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}}{\dfrac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6}-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}}\\
=&\frac{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)\left\{(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)(\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1)-(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5)\right\}}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)\left\{(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6)-(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5)\right\}}\\
=&\frac{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4-\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_6-\alpha_6\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4-\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_6-\alpha_6\alpha_1)}\\
=&\frac{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_4-\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_5)}
\end{aligned}$$

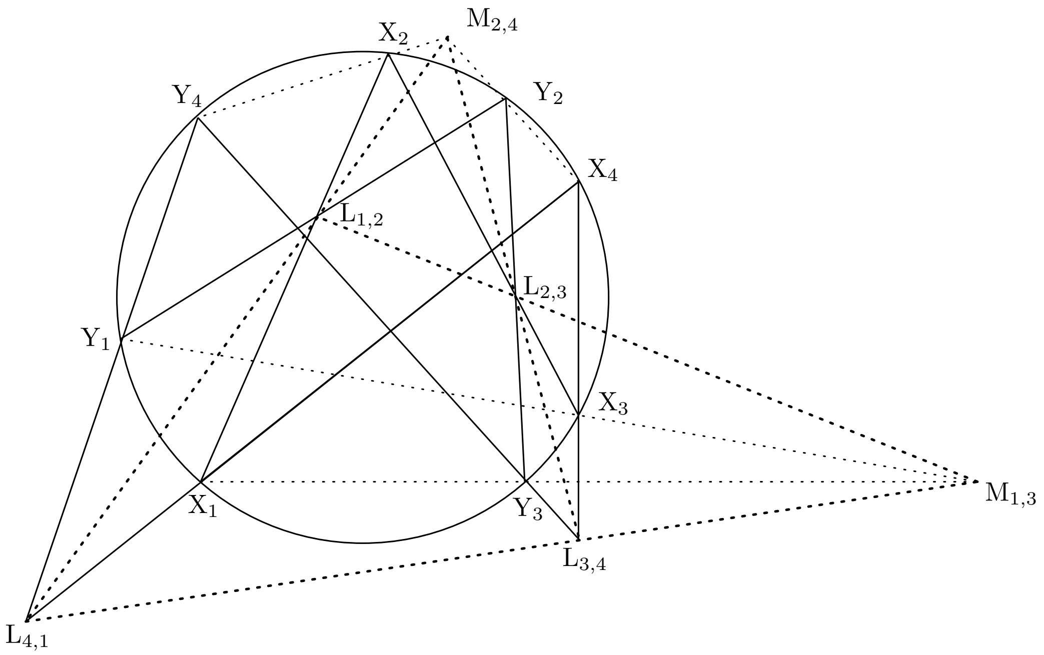
すると

$$\begin{aligned}
&\overline{\left(\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\right)}\\
=&\overline{\left\{\frac{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_4-\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_5)}\right\}}\\
=&\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha_2}\dfrac{1}{\alpha_3}-\dfrac{1}{\alpha_5}\dfrac{1}{\alpha_6}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha_4}-\dfrac{1}{\alpha_1}\right)}{\left(\dfrac{1}{\alpha_3}\dfrac{1}{\alpha_4}-\dfrac{1}{\alpha_6}\dfrac{1}{\alpha_1}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha_2}-\dfrac{1}{\alpha_5}\right)}\\
=&\frac{(\alpha_5\alpha_6-\alpha_2\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}{(\alpha_6\alpha_1-\alpha_3\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_2)}\\
=&\frac{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_4-\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_5)}\\
=&\frac{\overline{w_3}-\overline{w_1}}{\overline{w_2}-\overline{w_1}}
\end{aligned}$$

これより $\dfrac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ が実数であることがわかった．つまり L_1, L_2, L_3 は一直線上にある． □

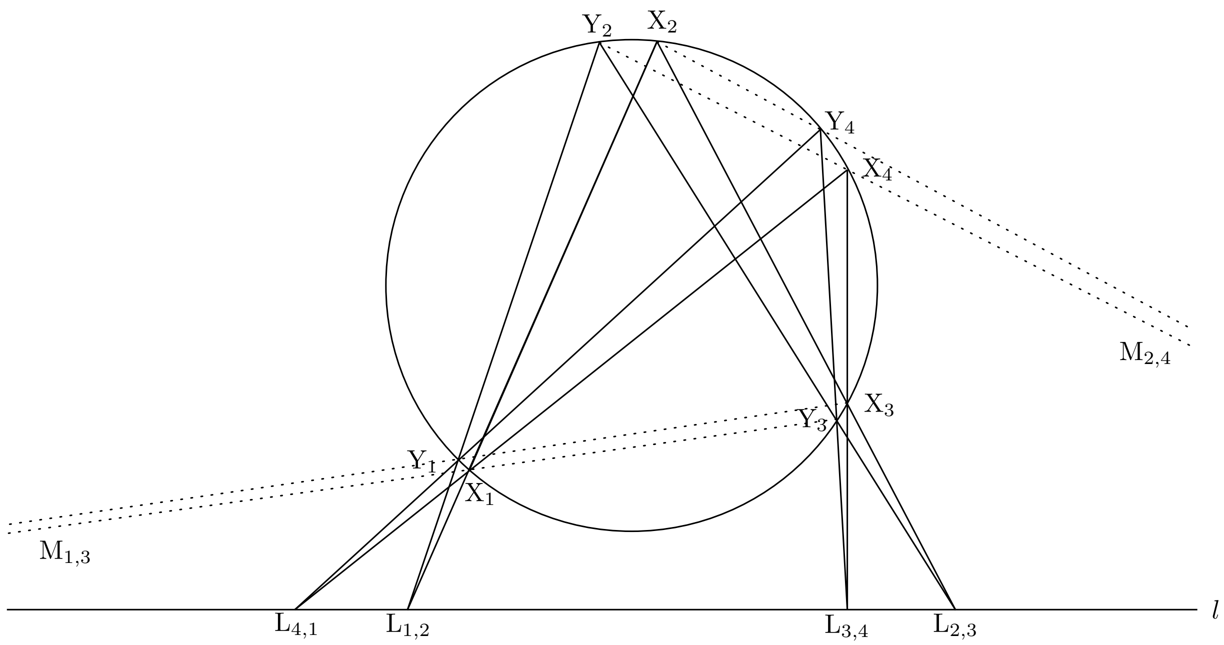
命題 2.4　円周上に異なる 8 点 X_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, Y_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ がある．（並びの順は任意でよい.）
$i\neq j$ に対し，直線 X_iX_j と直線 Y_iY_j の交点を $L_{i,j}(=L_{j,i})$, 直線 X_iY_j と直線 Y_iX_j の交点を $M_{i,j}(=M_{j,i})$ とする．（交点が存在する状況のみを考える.）

このとき異なる 3 数 $i,\ j,\ k$ に対して $L_{i,j}$, $L_{j,k}$, $M_{i,k}$ は一直線上に並ぶ.



証明　$X_i, X_j, X_k, Y_i, Y_j, Y_k$ を命題 (2.3) の $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ と見なすと，$L_{i,j}, L_{j,k}, M_{i,k}$ が一直線上にあることがわかる．　□

系 2.5　上の命題 (2.4) において $L_{1,2}, L_{2,3}, L_{3,4}$ が直線 l 上にある場合，$L_{4,1}$ も l 上にある．



証明　$L_{1,2}, L_{2,3}, M_{1,3}$ が一直線上にあるので，$M_{1,3}$ は l 上にある．$L_{3,4}, L_{4,1}, M_{1,3}$ が一直線上にあるので，$M_{4,1}$ も l 上になければならない．　□

系 2.6「東進の問題の言い換え」は $n=3$ の場合正しい．
証明　L_1, L_2, L_3 をそれぞれ $L_{1,2}, L_{2,3}, L_{3,4}$ とし，うまく X_1 を選んで順次 X_2, X_3, X_4 を選べば，X_1X_4 と l の交点が $L_{4,1}$ になっており，目標の L_4 とすればよいことがわかる，　□

定理 2.7「東進の問題の言い換え」は 5 以上の奇数 n の場合も正しい．
証明　数学的帰納法で示す．$n=k$ (奇数) の場合まで正しいと仮定して $n=k+2$ の場合を証明する．

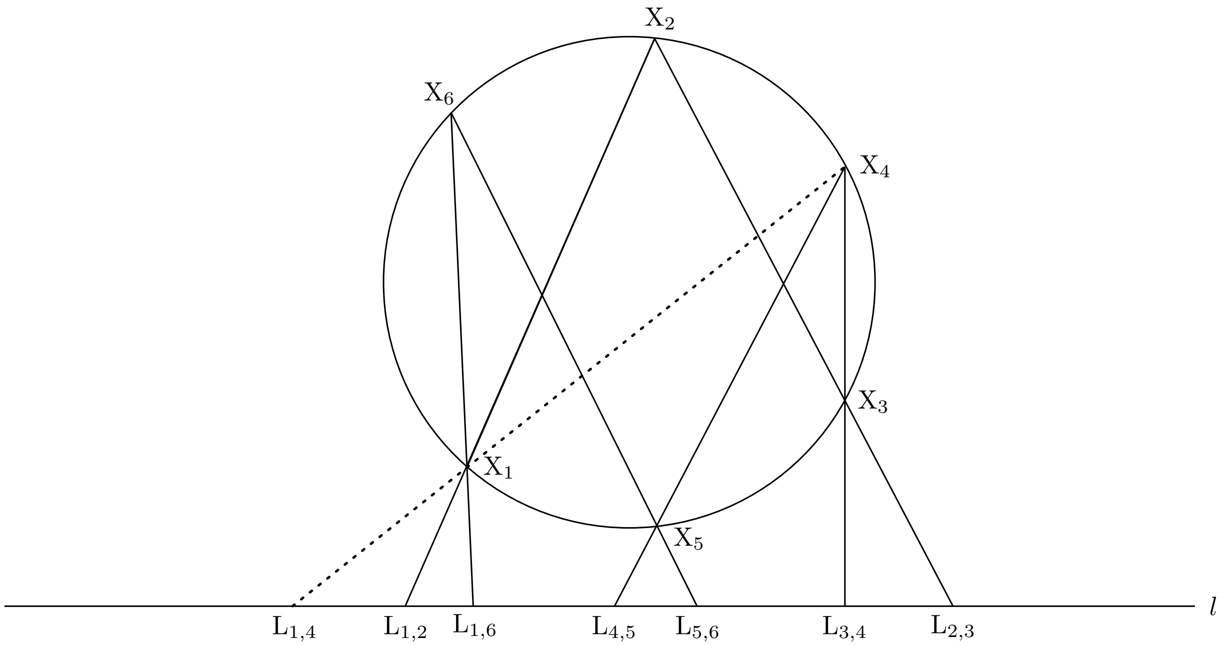
$L_1=L_{1,2}, L_2=L_{2,3}, \cdots, L_{k+2}=L_{k+1,k+2}$ と置く．X_1 をうまく取って，$L_{i,i+1}$，X_i，X_{i+1} が共線となるように円 Γ 上の点 X_i を決めていく．X_1，X_{k+3} と l の交点 $L_{1,k+3}$ が X_1 に依存せず定まることを言いたい．

$n=3$ のときの命題の成立により $\mathrm{L}_{1,4}$ は X_1 に依存せず定まる．

すると $\mathrm{L}_{1,k+3}$ は，k 個の点 $\mathrm{L}_{1,4}, \mathrm{L}_{4,5}, \cdots \mathrm{L}_{k+2,k+3}$, から定まる $k+1$ 番目の点に一致する．これは帰納法の仮定により X_1 に依存しないから，$n=k+2$ の場合も成立することが証明出来た．

以上により題意は成立する．

下の図は $n=5$ の場合である．$\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_{1,2}, \mathrm{L}_2=\mathrm{L}_{2,3}, \cdots, \mathrm{L}_5=\mathrm{L}_{5,6}$ と置く．X_1 を適当にとり，X_2〜X_6 を決めていく．$\mathrm{L}_{1,6}$ が目標の L_6 であるが，この点が X_1 に依存しないことは，$\mathrm{L}_{1,4}$ を考えて，$\mathrm{L}_{1,2}, \mathrm{L}_{2,3}, \mathrm{L}_{3,4}, \mathrm{L}_{1,4}$ の系列と，$\mathrm{L}_{1,4}, \mathrm{L}_{4,5}, \mathrm{L}_{5,6}, \mathrm{L}_{1,6}$ の系列に分割して考えればわかる．



□