

MeBio 数学テキスト

東進数学コンクール
2018年2月

—問題と解答—

第 1 章

問題

§ 1 問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に、毎月「東進数学コンクール」が掲載されています。高校生向けの超難問ですが、数学的にも深い意味を持つものばかりで、出題者の能力に感心するばかりです。2018年2月号の問題は次の通りでした。ほったらかしにしておくで完全に忘れてしまうので、メモを残すことにします。

東進の問題 1-1-1

座標平面上の領域 F と点 P について、 F が P を中心とする扇であるとは、適当に平衡移動と回転をして、 F を $\{(x, y \mid y \geq 0, x \geq y)\}$ に、 P を $(0, 0)$ に同時にうつすことができることをいう。

平面上の任意の異なる 8 点 P_1, P_2, \dots, P_8 に対して、次の条件を満たす扇 F_1, F_2, \dots, F_8 が存在することを示せ。

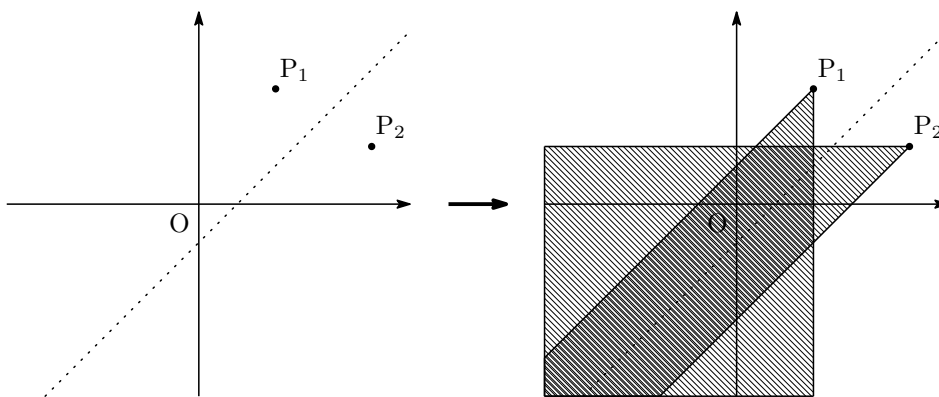
- $i = 1, 2, \dots, 8$ に対して扇 F_i の中心は P_i である。
- F_1, F_2, \dots, F_8 は平面を覆う。つまり、平面のどの点に対しても、その点が F_i に含まれるような i が存在する。

第 2 章

解答

命題 2.1 xy 平面の $x \geq 0, y \geq 0$ の領域に 2 点 P_1, P_2 が存在する場合, これら 2 点を中心とする 2 つの扇 F_1, F_2 で 3 象限の閉包 ($x \leq 0, y \leq 0$) を覆うことが出来る.

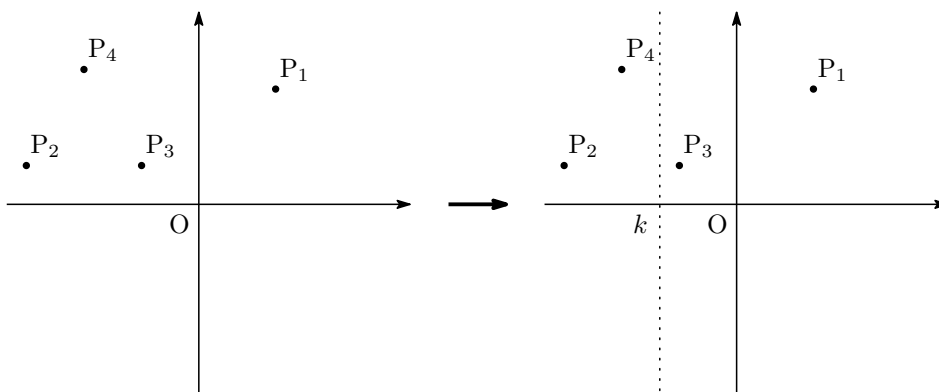
証明 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ とする. 必要なら P_1, P_2 を入れ換えることにより $y_1 - x_1 \geq y_2 - x_2$ としてよい. このとき $F_1 = \{(x, y) \mid x - x_1 \leq 0, y - y_1 \leq x - x_1\}, F_2 = \{(x, y) \mid y - y_2 \leq 0, y - y_2 \geq x - x_2\}$ と置けば, これらは題意を満たす.



□

命題 2.2 xy 平面の $y \geq 0$ の領域に 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 が存在する場合, これら 4 点を中心とする 4 つの扇 F_1, F_2, F_3, F_4 で 3, 4 象限の閉包 ($y \leq 0$) を覆うことが出来る.

証明 うまく k を選ぶことにより, P_1, P_2, P_3, P_4 のうちの 2 点 (以上) が $x \leq k$ の領域に, 2 点 (以上) が $x \geq k$ の領域に存在するように出来る. 境界線 $x = k$ 上に複数の点が配置される場合は, $x = k$ の左右の個数が 2 個ずつになるようにうまく振り分ける.



すると命題 2.1 から, $x \leq k$ の領域に存在する 2 点を中心とする 2 つの扇により $\{(x, y) \mid x \geq k, y \leq 0\}$ の領域が覆われ, $x \geq k$ の領域に存在する 2 点を中心とする 2 つの扇により $\{(x, y) \mid x \leq k, y \leq 0\}$ の領域が覆われることがわかる.

□

定理 2.3 xy 平面に 8 点 P_1, \dots, P_8 が存在する場合, これら 8 点を中心とする 8 つの扇 F_1, \dots, F_8 で全平面を覆うことが出来る.

証明 うまく l を選ぶことにより, P_1, \dots, P_8 のうちの 4 点 (以上) が $y \leq l$ の領域に, 4 点 (以上) が $y \geq l$ の領域に存在するように出来る. 境界線 $y = l$ 上に複数の点が配置される場合は, $y = l$ の左右の個数が 2 個ずつになるようにうまく振り分ける.

すると命題 2.2 から, $y \leq l$ の領域に存在する 4 点を中心とする 4 つの扇により $\{(x, y) \mid y \geq l\}$ の領域が覆われ, $y \geq l$ の領域に存在する 4 点を中心とする 4 つの扇により $\{(x, y) \mid y \leq l\}$ の領域が覆われることがわかる. \square

というわけであっけなく解けてしまったが, n 点に対し中心角 $\frac{2\pi}{n}$ の扇を考えると同じことが成り立つだろうか. これを次の章で考えてみたい.