For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール 2018年1月

―問題と解答―

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2018 年 1 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

f を 0 でない実数に対して定義され，0 以上の実数値を取る関数とする．0 でない任意の実数 x, y, z に対して

$$\{f(x)\}^3 - \{f(y)\}^2 f(z) = f\left(\frac{y}{x}\right) f(y) f(z) \left\{ f\left(\frac{z}{y}\right) - f\left(\frac{x}{z}\right) \right\}$$

が成り立つような関数 f をすべて求めよ．

第 2 章

解答

問題文の式にラベルを付けておく．

$$\{f(x)\}^3 - \{f(y)\}^2 f(z) = f\left(\frac{y}{x}\right) f(y) f(z) \left\{ f\left(\frac{z}{y}\right) - f\left(\frac{x}{z}\right) \right\} \tag{2.1}$$

ある実数 a に対し $f(a) = 0$ だとする．(2.1) に $z = a$ を代入すると $\{f(x)\}^3 = 0$ となる．これよりすべての実数 x に対し $f(x) = 0$ であることになるが，これは題意を満たす．これは最もつまらない例である．

以下ではこの例を除いて考えよう．つまり，すべての実数 x に対し $f(x) \fallingdotseq 0$ とする．その場合問題文の条件より $f(x) > 0$ ということになる．

$f(x)$ が定数関数である場合，つまり $^{\exists}k > 0,\ ^{\forall}x,\ f(x) = k$ である場合，(2.1) の左辺は $\{f(x)\}^3 - \{f(y)\}^2 f(z) = k^3 - k^2 k = 0$．また，右辺は $f\left(\frac{y}{x}\right) f(y) f(z) \left\{ f\left(\frac{z}{y}\right) - f\left(\frac{x}{z}\right) \right\} = kkk(k-k) = 0$ となり確かに成り立っている．これは 2 番目につまらない例である．

以下ではこの例も除いて考えよう．つまり f が定数関数でない場合を考える．$f(1) = k$ とする．f の値域は $\{k\}$ だけではないので，$f(a) \fallingdotseq k$ である a が存在する．$f(a) = X$, $f\left(\frac{1}{a}\right) = Y$ と置く．$X \fallingdotseq k$ である．

(2.1) に $x = a,\ y = z = 1$ を代入すると

$$\{f(a)\}^3 - \{f(1)\}^3 = f\left(\frac{1}{a}\right) f(1) f(1) \{f(1) - f(a)\} \tag{2.2}$$

$$\iff \quad X^3 - k^3 = Y k^2 (k - X) \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

これだと左辺と右辺が異符号になって矛盾してしまう．

以上により $f(x)$ は定数関数しかないというつまらない結論が得られた．

第 3 章

問題の修正とその結果

先程の結論は面白くない．出題ミスではないだろうか．条件を修正して考えてみた．

§ 1　値域を限定しない場合

$f(x)$ が「0 以上の実数値を取る関数」という条件を「0 以上に限らない実数値を取る関数」に改めてみる．

定数関数は題意を満たすことがわかっているので，それ以外の解を探す．その場合前章で見たように，すべての x に対して $f(x) \fallingdotseq 0$ が成り立っている．

命題 3.1 a を実数とする．

$$f(a) \fallingdotseq f(1) \iff f\left(\frac{1}{a}\right) \fallingdotseq f(1) \tag{3.1}$$

が成り立つ．

証明　(2.1) に $x = 1,\ y = z = \dfrac{1}{a}$ を代入する．

$$\{f(1)\}^3 - \left\{f\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^3 = f\left(\frac{1}{a}\right)^3 \{f(1) - f(a)\} \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

これより明らかに成り立つ．□

$f(a) \fallingdotseq f(1)$ が成り立っているとする．$f(a) = X,\ f\left(\dfrac{1}{a}\right) = Y,\ f(1) = k$ と置く．命題 3.1 より $X \fallingdotseq k, Y \fallingdotseq k$ である．

(2.1) に $x = a,\ y = z = 1$ を代入する．

$$\{f(a)\}^3 - \{f(1)\}^3 = f\left(\frac{1}{a}\right) f(1)^2 \{f(1) - f(a)\} \tag{3.4}$$

$$\iff X^3 - k^3 = Yk^2(k - X) \tag{3.5}$$

$$\iff X^2 + kX + k^2 = -Yk^2 \tag{3.6}$$

$$\implies Y < 0 \tag{3.7}$$

(2.1) に $x=\dfrac{1}{a}$, $y=z=1$ を代入する.

$$
\begin{aligned}
& \left\{f\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^3-\{f(1)\}^3=f(a)\,f(1)^2\left\{f(1)-f\left(\frac{1}{a}\right)\right\} && (3.8)\\
\iff\quad & Y^3-k^3=Xk^2(k-Y) && (3.9)\\
\iff\quad & Y^2+kY+k^2=-Xk^2 && (3.10)\\
\implies\quad & X<0 && (3.11)
\end{aligned}
$$

ここから場合分けをする.

(i) $X \fallingdotseq Y$ の場合

(3.6), (3.10) を辺々引く.

$$X^2+kX-Y^2-kY=k^2(X-Y)\implies X+Y+k=k^2 \tag{3.12}$$

X, Y ともに負であったから, $k^2-k<0$ つまり $0<k<1$ である.

今度は (3.5), (3.9) を辺々引く.

$$X^3-Y^3=k^3(Y-X)\implies X^2+XY+Y^2=-k^3 \tag{3.13}$$

左辺は正であるから k は負でなければならない. これは矛盾である. つまり $X \fallingdotseq Y$ ではあり得ないことがわかった.

(ii) $X=Y$ の場合

(3.6) より $X^2+kX+k^2=-kX^2$ つまり

$$X^2+(k^2+k)X+k^2=0 \tag{3.14}$$

が成り立つ.

(2.1) に $x=z=a$, $y=1$ を代入する.

$$
\begin{aligned}
& \{f(a)\}^3-\{f(1)\}^2f(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)f(1)f(a)\{f(a)-f(1)\} && (3.15)\\
\iff\quad & X^3-k^2X=XkX(X-k) && (3.16)\\
\iff\quad & X(X+k)(X-k)=XkX(X-k) && (3.17)\\
\iff\quad & X+k=Xk && (3.18)
\end{aligned}
$$

$k=1$ ではあり得ないので $X=\dfrac{k}{k-1}$ である. これを (3.14) に代入する.

$$
\begin{aligned}
& X^2+(k^2+k)X+k^2=0\\
\iff\quad & \left(\frac{k}{k-1}\right)^2+(k^2+k)\left(\frac{k}{k-1}\right)+k^2=0\\
\iff\quad & k^2+(k^2+k)k(k-1)+k^2(k-1)^2=0\\
\iff\quad & 1+(k+1)(k-1)+(k-1)^2=0\\
\iff\quad & k^2+(k-1)^2=0
\end{aligned}
$$

これは実数解を持たない．つまり $X=Y$ でもあり得ないことがわかった．

以上により $f(x)$ は定数関数しかあり得ないという，やはりつまらない結論に達した．

§ 2　複素数関数と考える場合

問題を次のように一般化しても，定数関数しかないことが証明出来た．

東進の問題の改造 3–2–1

f を 0 でない実数に対して定義された複素数値関数とする．0 でない任意の実数 $x,\ y,\ z$ に対して

$$\{f(x)\}^3-\{f(y)\}^2f(z)=f\left(\frac{y}{x}\right)f(y)f(z)\left\{f\left(\frac{z}{y}\right)-f\left(\frac{x}{z}\right)\right\} \tag{3.19}$$

が成り立つような関数 f は定数関数に限ることを証明せよ．

証明　定数関数でない場合 $f(x) \fallingdotseq 0$ であることは今までと同様である．まず次の命題から．

命題 3.2 a を 0 でない実数とする．$f(-a)=f(a)$ である．

証明　(3.19) に $x=y=a,\ z=-a$ を代入する．

$$\{f(a)\}^3-\{f(a)\}^2f(-a)=f(1)f(a)f(-a)\{f(-1)-f(-1)\} \tag{3.20}$$

これより明らかに成り立つ．□

命題 3.3 $f(a)=f(b) \iff f(1)=f\left(\dfrac{a}{b}\right)$

証明　(3.19) に $x=a,\ y=z=b$ を代入する．

$$\{f(a)\}^3-\{f(b)\}^3=f\left(\frac{a}{b}\right)f(b)f(b)\left\{f(1)-f\left(\frac{a}{b}\right)\right\} \tag{3.21}$$

これより明らかに成り立つ．□

系 3.4 $f(a)=f(b) \iff f(ka)=f(kb)$

証明　明らか．□

系 3.5 $H=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=f(1)\}$ は $\mathbb{R}^\times$ の乗法に関する部分群を成す．

証明　$x,\ y\in H$ とする．$f(x)=f(y)=f(1)$ であるが，系 3.4 により $f(x)=f(1) \iff f(xy)=f(y)$ が成り立つので $f(xy)=1$ でもある．□

系 3.6 $\dfrac{x}{y}\in H$ なら $f(x)=f(y)$ である．つまり f は類関数 $f:\mathbb{R}^\times/H$ と見なすことが出来る．

証明　明らか．□

$a\notin H$ だとしよう．$f(a)=X,\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)=Y,\ f(1)=k$ と置くと，(3.7), (3.11) により $X^2+kX+k^2=-k^2Y$, $Y^2+kY+k^2=-k^2X$ が成り立つ．これより k を消去すると

$$X^4+2kX^3-k^3X^2+3k^2X^2+k^6Xx-k^4X+2k^3X+k^6-k^5+k^4=0 \tag{3.22}$$

を得る．実はこれは $X=Y$ か $X\fallingdotseq Y$ かに対応する次の因数分解を持つ．

$$(X^2-k^2X+kX+k^4-k^3+k^2)(X^2+k^2X+kX+k^2)=0 \tag{3.23}$$

いずれにせよ k を固定すると X の取り得る値は有限個しかない．ところが $\mathbb{R}^\times$ の指数有限な真部分群は $\mathbb{R}_+$ しかなく，しかも今の場合 $-1\in H$ でもあったので，$H=\mathbb{R}^\times$ ということになる．

注　f の定義域を 0 でない複素数に拡張してもやはり定数しかない，この場合はそもそも指数有限の真部分群が存在しないので，$-1\in H$ を示しておく必要も無いのである．