For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール 2017 年 12 月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 12 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

f を整数に対して定義され整数値を取る関数とする．$f(n) \neq m$ をみたすような任意の整数の組 $(m,\ n)$ に対し

$$\frac{f(f(m)-n)}{m-f(n)}$$

が整数であるような関数 f をすべて求めよ．

第 2 章

解答

§ 1　3 つの場合分けと，(2)(3) 共通に成り立つ命題

問題の条件を命題 (P) とする．

$$\text{命題 (P)} \qquad f(n) \neq m \Longrightarrow \frac{f(f(m)-n)}{m-f(n)} \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

f を 3 通りに分類して考える．

(1) すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対し $f(m) = 0$ である場合．

(2) (1) ではないが，$f(m) \neq 0$ なら必ず $f(m) = -m$ になっている場合．

(3) (1) でも (2) でもない場合．

(1) の場合は命題 (P) は成立している．これは最も自明でつまらない f の例である．

以下では (1) でない場合を考えよう．つまり $f(m) \neq 0$ となるような $m \in \mathbb{Z}$ が存在する場合である．$f(a) = b \neq 0$ となる a, b を一つとる．m を任意の自然数とする．m に依存して定まる整数 n を，$n = f(m) - a$ で定義する．$f(n) = m$ であれば n を消去して $f(f(m) - a) = m$ が成り立っていることがわかる．$f(n) \neq m$ であれば (2.1) に代入して次を得る．

$$\frac{f(f(m)-n)}{m-f(n)} = \frac{f(f(m)-(f(m)-a))}{m-f(f(m)-a)} = \frac{f(a)}{m-f(f(m)-a)} = \frac{b}{m-f(f(m)-a)} \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

$b \neq 0$ であり分母は分子の約数なのだから，$-|b| \leqq m - f(f(m)-a) \leqq |b|$ つまり

$$m - |b| \leqq f(f(m)-a) \leqq m + |b| \tag{2.3}$$

がわかる．先程の $f(f(m)-a) = m$ もこの不等式を満たすから，(2.3) はすべての m に関して成立する．

(2.1) に戻って $n = a$ を代入する．$|m|$ を十分大きく取ることにより $m \neq f(a) = b$ としてよい．すると $\dfrac{f(f(m)-a)}{m-b} \in \mathbb{Z}$ が成り立っていなければいけない．(2.3) より

$$\frac{m \mp |b|}{m-b} \leqq \frac{f(f(m)-a)}{m-b} \leqq \frac{m \pm |b|}{m-b} \quad \text{（複号は分母の正負による）} \tag{2.4}$$

この第 2 項が整数なのだから，$|m|$ が十分大きければ $\dfrac{f(f(m)-a)}{m-b} = 1$ しかあり得ない．これを命題にしておこう．

命題 2.1 (1) でない場合，ある M_1 が存在して，$|m| \geqq M_1$ であるようなあらゆる m に対し，

$$f(f(m)-a) = m-b \tag{2.5}$$

が成り立つ． □

これより次の系が成り立つこともわかる．

系 2.2 $|m| \geqq M_1$ に於いては f は単射である． □

$|m| \geqq M_1$ の範囲において f は単射なのだから，$|f(m)-a| < M_1$ となる m は有限個である．それを取り除くように M_1 より大きな M_2 を新たに決め直して，$|m| \geqq M_2 \Longrightarrow |f(m)-a| \geqq M_1$ が成り立つようにすることが出来る．そのように取った m に対しては $|f(m)-a| \geqq M_1$ が成り立っているから，命題 2.1(2.5) の m を $f(m)-a$ に置き換えて次を得る．

$$|m| \geqq M_2 \Longrightarrow f(f(f(m)-a)-a) = (f(m)-a)-b \tag{2.6}$$

さらに $m \geqq M_1$ も成り立っているから $f(f(m)-a) = m-b$ でもある．従って (2.6) は次のように書き換えられる．

$$|m| \geqq M_2 \Longrightarrow f(m-b-a) = f(m)-a-b \tag{2.7}$$

これは $a+b \risingdotseq 0$ であれば $f(m)$ がある意味で公差 1 の等差数列に近いということを意味する．

§ 2　(2) の場合

系 2.2 で述べたように $|m| \geqq M_1$ に於いては f は単射である．この範囲に $f(m)=0$ となるような m が存在するのであれば，M_1 をより大きな M_3 で置き換えることにより，$|m| \geqq M_3$ に於いては $f(m) \risingdotseq 0$ が成立するとしてよい．その場合 (2) の定義により $f(m) = -m$ である．

定理 2.3 (2) の場合，すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対して $f(m) = -m$ である．
証明　n を任意の自然数とする．（大きい必要は無い．）m は $|m| \geqq M_3$, $|m+n| \geqq M_3$, $m - f(n) \risingdotseq 0$ が成り立つように（n に応じて）十分大きく取る．この $(m,\ n)$ に対しても $\dfrac{f(f(m)-n)}{m-f(n)} \in \mathbb{Z}$ が成り立たないといけないが

$$\frac{f(f(m)-n)}{m-f(n)} = \frac{f(-m-n)}{m-f(n)} = \frac{m+n}{m-f(n)} \in \mathbb{Z}$$

なのだから，$m \to \infty$ の状況を考えれば $\dfrac{m+n}{m-f(n)} = 1$ でなければならない．つまり $f(n) = -n$ である． □

逆に $f(m) = -m$ であれば $m \risingdotseq f(n) = n$ に対して

$$\frac{f(f(m)-n)}{m-f(n)} = \frac{f(-m-n)}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$$

であるから，命題 (P) は成り立っている．つまり $f(m) = -m$ は解の一つである．

§ 3　(3) の場合

この節では (3) の場合を扱う．以下何も断らなくても (3) の条件が満たされているものとする．(2.3) において $f(a) = b \risingdotseq 0$ となる a, b を取ったが，(2) ではないので $b \risingdotseq -a$ と仮定してもよい．すると (2.7) で $|a+b| = d(>0)$ と置き換えることにより，次の命題を得る．

命題 2.4 ある $M_4, d > 0$ が存在して，$m \geqq M_4$ であるようなあらゆる m に対し，

$$f(m+d) = f(m) + d, \quad f(-m-d) = f(-m) - d \tag{2.8}$$

が成り立つ．この結果は，任意の $k > 0$ に対し

$$f(m+kd) = f(m) + kd, \quad f(-m-kd) = f(-m) - kd \tag{2.9}$$

と帰納的に拡張できることが容易にわかる．□

定理 2.5 任意の n に対し絶対値の十分大きな m を取れば $f(f(m)-n) = m - f(n)$ が成り立つ．また，任意の m に対し絶対値の十分大きな n を取れば $f(f(m)-n) = m - f(n)$ が成り立つ．

証明　任意の整数 n を固定する．m を $|m| \geqq M_4$, $|f(m)-n| \geqq M_4$, $m - f(n) > 0$ が成り立つように十分大きく取る．任意の自然数 k に対し

$$\frac{f(f(m+kd)-n)}{(m+kd)-f(n)} = \frac{f(f(m)+kd-n)}{m+kd-f(n)} = \frac{f(f(m)-n)+kd}{m+kd-f(n)} \in \mathbb{Z}$$

やはり $k \to \infty$ を考えるとこの整数値は 1 でなければならない．つまり $f(f(m)-n)+kd = m+kd-f(n) \iff f(f(m)-n) = m - f(n)$ が，任意の n に対し十分大きな m を取ることによって成り立つ．絶対値の大きな負の数の場合も同様に証明出来る．

今度は任意の整数 m を固定する．n を $|n| \geqq M_4$, $|f(m)-n| \geqq M_4$, $m - f(n) < 0$ が成り立つように十分大きく取る．任意の自然数 k に対し

$$\frac{f(f(m)-(n+kd))}{m-f(n+kd)} = \frac{f(f(m)-n)-kd}{m-f(n)-kd} \in \mathbb{Z}$$

やはり $k \to \infty$ を考えるとこの整数値は 1 でなければならない．つまり $f(f(m)-n)-kd = m-f(n)-kd \iff f(f(m)-n) = m - f(n)$ が，任意の m に対し十分大きな n を取ることによって成り立つ．絶対値の大きな負の数の場合も同様に証明出来る．□

系 2.6 f は単射である．

証明　$f(m_1) = f(m_2)$ とする．定理 2.5 より十分大きな n に対し $f(f(m_1)-n) = f(f(m_2)-n)$ すなわち $m_1 - f(n) = m_2 - f(n)$ が成り立つことになる．従って $m_1 = m_2$ となり，f が単射であることがわかる．

□

命題 2.7 f は全射である．

証明　$g(m) = f(f(m)-a)$ と置く．命題 2.1(2.5) により $|m| \geqq M_1$ なら $g(m) = m - b$ である．ここで $g(m_1) = g(m_2)$ とすると $f(f(m_1)-a) = f(f(m_2)-a)$ となるが，f は単射だったから $f(m_1)-a = f(m_2)-a$ つまり $f(m_1) = f(m_2)$ である．再び f の単射性により $m_1 = m_2$ を得る．つまり g は単射である．

$M_5 = \max\{\ |g(m)|\ |\ -M_1 \leqq m \leqq M_1\}$ とし，M_6 を $\max\{M_1,\ M_5 + |b|\}$ より大きい数にとる．すると g は $S_1 = \{m\ |\ -M_6 \leqq m \leqq M_6\}$ から $S_2 = \{m\ |\ -M_6 - b \leqq m \leqq M_6 - b\}$ への写像ということになるが，S_1 も S_2 も要素数が $2M_6 + 1$ でありしかも g は単射なのであるから，g はこの範囲で全単射でなければならない．M_6 はいくらでも大きく取れるので，g は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像として全単射であることがわかる．

f が全射であることは，これより直ちに従う．□

命題 2.8 すべての m に対して $g(m) = m - b$ である．

証明　(2.3) で述べたように，すべての m に対して $m - |b| \leqq g(m) \leqq m + |b|$ である．$b \geqq 0$ の場合，$g(m)$ は十分大きな m に対しては，取り得る範囲の下限の値を取ることになる．その場合，すべての m に対して $g(m)$ が下限の値を取るのでなければ，g は全単射でなくなってしまう．また $b < 0$ の場合はほとんどすべての m に対し $g(m)$ が上限の値を取ることになり，すべての m に対して $g(m)$ が上限の値を取るのでなければ，g は全単射でなくなってしまう．□

定理 2.9 すべての $m,\ n$ に対して $f(f(m)-n)=m-f(n)$ である．

証明　命題 2.8 により，m に関する制限無く (2.5) が成立するので，(2.7), (2.8), (2.9) もすべての m に対し成立する．$m,\ n$ を任意の整数とする．十分大きな k を取れば，定理 2.5 によって $f(f(m)-(n+kd))=m-f(n+kd)$ が成り立つが，これは $m,\ n$ の大小に関わらず $f(f(m)-n)-kd=m-(f(n)+kd)$ と書き換えられるので，題意は成り立つ．　□

定理 2.10 $f(m)=m$ である．

証明　f は全射であるから $f(z)=0$ となる z が存在する．定理 2.9 で $m=z,\ n=0$ とすると $f(f(z)-0)=z-f(0)$ すなわち $f(-0)=z-f(0)$ が成り立つ．従って $z=2f(0)$ とわかる．再び定理 2.9 で $m=0,\ n=z=2f(0)$ を代入すると $f(f(0)-2f(0))=0-f(z)$ すなわち $f(-f(0))=0$ が成り立つ．f は単射であるから $f(z)=0$ と合わせて $z=-f(0)$ を得る．これより $2f(0)=-f(0) \iff f(0)=0$ となるので $z=0$ とわかる．

定理 2.9 で $m=0$ を代入すると $f(f(0)-n)=0-f(n)$ すなわち $f(-n)=-f(n)$ であるから，f は奇関数である．定理 2.9 の n を $-n$ に置き換えて

$$f(f(m)+n)=m+f(n) \tag{2.10}$$

を得る．

f は全射であったから $f(s)=1$ となる s が存在する．(2.10) で $m=s$ とすると $f(f(s)+n)=s+f(n)$ すなわち $f(n+1)=f(n)+s$ が得られ，等差数列として $f(m)=f(0)+sm=sm$ となる．十分大きな m に対し $f(m+d)=f(m)+d$ が成り立っていたので公差は $s=1$ しかあり得ない．これより $f(m)=m$ とわかる．　□

逆に $f(m)=m$ である場合，命題 (P) は確かに成立している．

§ 4　結論

解は次の 3 通りである．

(1)　すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対し $f(m)=0$,

(2)　すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対し $f(m)=-m$,

(3)　すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対し $f(m)=m$