For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2017年11月

―問題と解答―

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 11 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

平面上に直線 ℓ_1, ℓ_2 と，相異なる双曲線 C_1, C_2 がある．ℓ_1 と ℓ_2 はちょうど 1 点で交わり，C_1, C_2 はともに 2 本の漸近線が ℓ_1, ℓ_2 と平行であるとする．C_1, C_2 は相異なる共通接線を 4 本持つとし，それらを m_1, m_2, m_3, m_4 とする，$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対し，m_i と C_1, C_2 の接点をそれぞれ S_i, T_i とし，$\mathrm{S}_i\mathrm{T}_i$ の中点を N_i とする．このとき 4 点 $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_3, \mathrm{N}_4$ は同一直線上にあることを示せ．

第 2 章

解答

示すべき性質はアフィン変換によって不変なものであるから，ℓ_1, ℓ_2 は x 軸, y 軸であり，$C_1 : xy = 1$, $C_2 : (x-a)(y-b) = c$ としてよい．C_1 上の点 $\mathrm{S}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$ における接線の方程式は $y = -\dfrac{1}{s^2}(x-s) + \dfrac{1}{s} = -\dfrac{1}{s^2}x + \dfrac{2}{s}$ である．これと C_2 を連立させて

$$(x-a)\left(-\frac{1}{s^2}x + \frac{2}{s} - b\right) = c \tag{2.1}$$

$$\iff \quad (x-a)(x-2s+bs^2) = -cs^2 \tag{2.2}$$

$$\iff \quad x^2 - (a+2s-bs^2)x + 2as - abs^2 + cs^2 = 0 \tag{2.3}$$

この x の二次方程式の判別式 D が 0 でないといけない.

$$\begin{aligned} D &= (a+2s-bs^2)^2 - 4(2as - abs^2 + cs^2) && (2.4)\\ &= a^2 + 4s^2 + b^2s^4 + 4as - 2abs^2 - 4bs^3 - 8as + 4abs^2 - 4cs^2 && (2.5)\\ &= b^2s^4 - 4bs^3 + (4+2ab-4c)s^2 - 4as + a^2 && (2.6)\\ &= 0 && (2.7)\end{aligned}$$

a, b, c はこの s の（見かけの）4 次方程式が 4 解を持つように決まっている必要があるのだが，その条件に関してはここでは議論しない．4 解を持つとしてそれを $s = s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ としよう．

その場合 $\mathrm{S}_i\left(s_i,\ \dfrac{1}{s_i}\right)$ である．$\mathrm{T}_i(t_i,\ u_i)$ と置くと，t_i は (2.3) の重解であるから

$$t_i = \frac{a + 2s_i - b{s_i}^2}{2}$$

また，T_i は接線 $y = -\dfrac{1}{s^2}x + \dfrac{2}{s}$ 上の点であるから

$$u_i = -\frac{1}{{s_i}^2}t_i + \frac{2}{s_i} = -\frac{1}{{s_i}^2}t_i + \frac{2}{s_i} = \frac{-a + 2s_i + b{s_i}^2}{2{s_i}^2}$$

これらより $\mathrm{N}_i(X_i,\ Y_i)$ に関して

$$X_i = \frac{s_i + t_i}{2} = \frac{a + 4s_i - b{s_i}^2}{4},\ Y_i = \frac{\dfrac{1}{s_i} + u_i}{2} = \frac{-a + 4s_i + b{s_i}^2}{4{s_i}^2} \tag{2.8}$$

$$\iff \quad b{s_i}^2 - 4s_i = a - 4X_i,\quad \frac{4s_i - a}{{s_i}^2} = 4Y_i - b \tag{2.9}$$

一方 (2.6), (2.7) を変形して

$$b(bs^2 - 4s) + 4 + 2ab - 4c - \frac{a(4s-a)}{s^2} = 0 \tag{2.10}$$

(2.9) を (2.10) に代入すると

$$\begin{aligned} & b(a - 4X_i) + 4 + 2ab - 4c - a(4Y_i - b) = 0 \\ \iff \quad & bX_i + aY_i - ab + c - 1 = 0 \end{aligned}$$

これは N_i がすべて直線 $bx + ay - ab + c - 1 = 0$ に乗っていることを表す.