For Tutors

MeBio　数学テキスト

昭和大学 2017 年 3 番
漸化式の問題

—深読み—

Edited by kamei

第 1 章

問題と解答

+**問題** 1–1　次のように数列 a_n を定める.

$$a_1 = 2016,\ a_2 = 2017,\ a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1-1) a_5 を求めよ.

(1-2) a_{2017} を求めよ.

略解

(1-1) $a_5 = 1$ (1-2) $a_{2017} = 2017$

解答

(1-1) 深い理論は別として，順次計算していくと，

$$a_3 = \frac{1+2017}{2016} = \frac{2018}{2016},\ a_4 = \frac{1+\frac{2018}{2016}}{2017} = \frac{2016+2018}{2017\cdot 2016} = \frac{2}{2016},\ a_5 = \frac{1+\frac{2}{2016}}{\frac{2018}{2016}} = 1.$$

(1-2) 計算を続けると $a_6 = \dfrac{1+1}{\frac{2}{2016}} = 2016 = a_1$, $a_7 = \dfrac{1+2016}{1} = 2017$ となって $\{a_n\}$ は周期 5 で繰り返す数列であることがわかる．従って $a_{2017} = a_2 = 2017$ である.

【17 昭和大（医）前期】M_shouwa_2017A_03_01.mdf

第 2 章

気になった部分

これほどきれいで簡単な関数（整数係数分数式）で定義された漸化式が周期 5 を持つことは驚きである．特殊値のせいかと思ったが，$a_1 = a,\ a_2 = b$ ではじめると，$a_3 = \dfrac{b+1}{a},\ a_4 = \dfrac{\dfrac{b+1}{a}+1}{b} = \dfrac{a+b+1}{ab}$，$a_5 = \dfrac{\dfrac{a+b+1}{ab}+1}{\dfrac{b+1}{a}} = \dfrac{ab+1+a+b}{b(b+1)} = \dfrac{a+1}{b},\ a_6 = \dfrac{\dfrac{a+1}{b}+1}{\dfrac{a+b+1}{ab}} = a,\ a_7 = \dfrac{a+1}{\dfrac{a+1}{b}} = b$ となって，初期値によらず周期 5 を持つことがわかる． 何か裏があるに違いない．

§ 1　2 次元化

隣接 3 項では扱いにくい．こういう場合は変数を増やして隣接 2 項にするのが常であろう．そこで $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,\ y) = \left(y,\ \dfrac{y+1}{x}\right)$ と定義する．もちろん $x = 0$ などは定義域から省くが，面倒なので省略する．

これにより $f(a_n,\ a_{n+1}) = f\left(a_{n+1},\ \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}\right) = f(a_{n+1},\ a_{n+2})$ となる．この f が周期 5 を持つことの納得いく解釈が欲しい．

$(X,\ Y) = f(x,\ y) = \left(y,\ \dfrac{y+1}{x}\right)$ と置く．f の不動点は $x = y,\ y = \dfrac{y+1}{x}$ を解くことにより，$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \beta) = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ の 2 点とわかる．$\alpha,\ \beta$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の二解である．

ヤコビアンは $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{y+1}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$ で $\det J = \dfrac{y+1}{x^2}$ だから $x \fallingdotseq 0,\ y \fallingdotseq -1$ では正則であり，$y > 1$ では向きを保つ．$y < -1$ では反転する．

不動点の近傍（接平面）上では f は $\dfrac{2n\pi}{5}$ の回転になっているはずである．実際

$$J_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

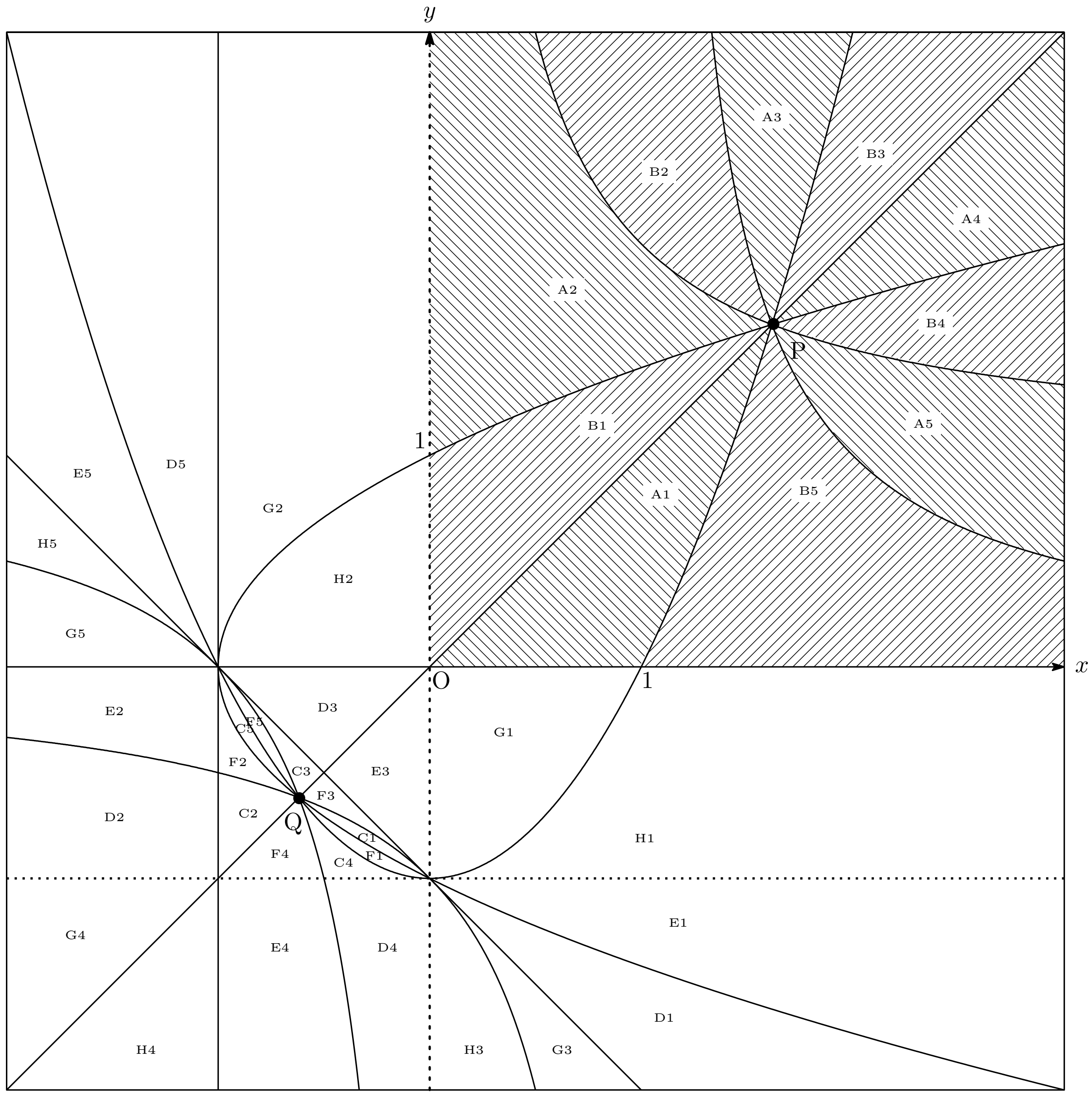
で $\mathrm{tr} J_{\mathrm{P}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}, \det J_{\mathrm{P}} = 1$ であり, J_{P} は行列式が正の正方行列で標準化すると $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{8\pi}{5} & -\sin\dfrac{8\pi}{5} \\ \sin\dfrac{8\pi}{5} & \cos\dfrac{8\pi}{5} \end{pmatrix}$

に共役となる．

同様に J_{Q} は行列式が正の正方行列で標準化すると $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{6\pi}{5} & -\sin\dfrac{6\pi}{5} \\ \sin\dfrac{6\pi}{5} & \cos\dfrac{6\pi}{5} \end{pmatrix}$ に共役となる．

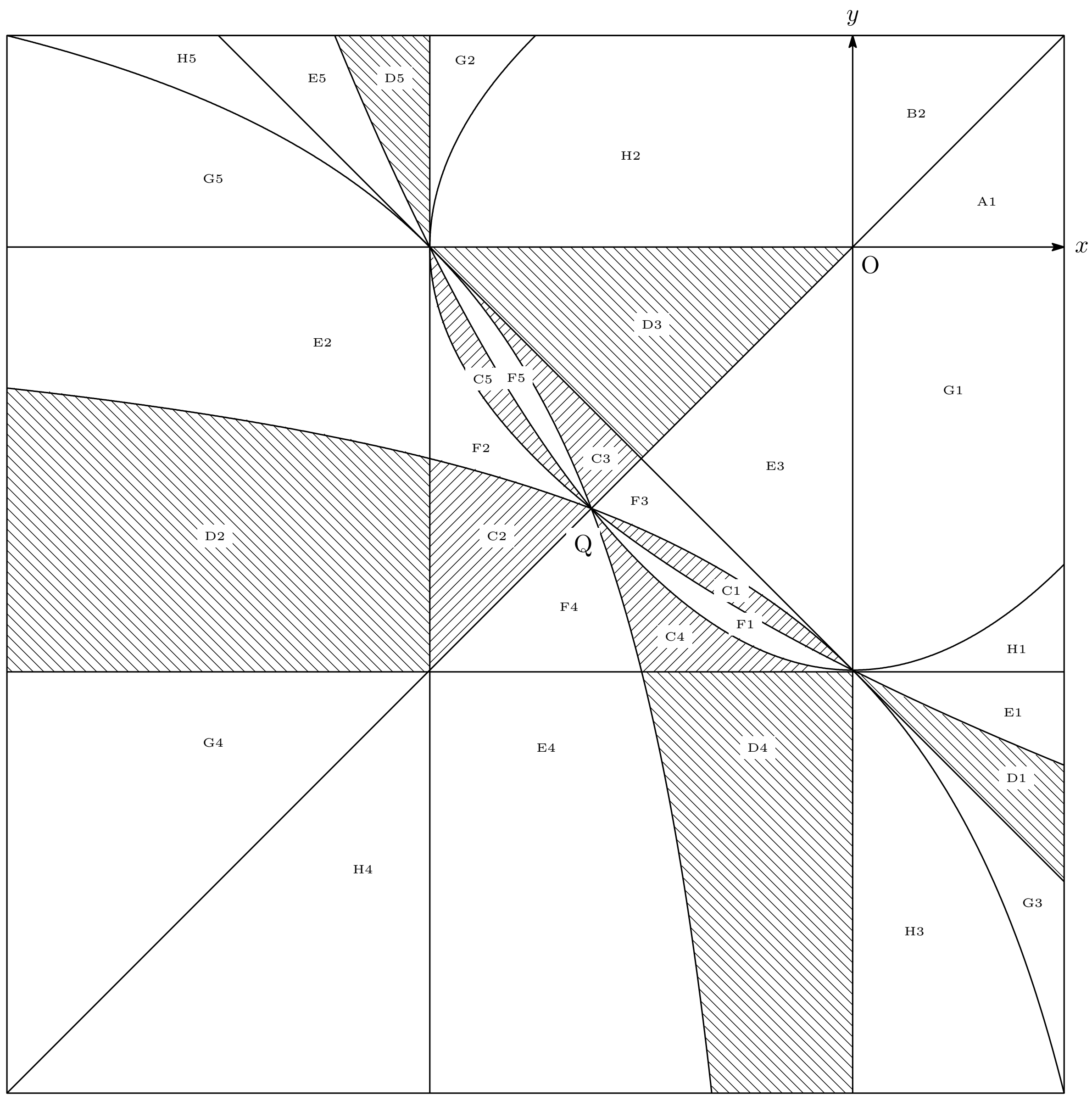
このあたりの事情も踏まえると f は次のような変換になっている．

- f により領域は $X1 \to X2 \to X3 \to X4 \to X5 \to X1$ と写像される．
- 1 象限では P の周りに $-\dfrac{2\pi}{5}$ 回転である．
- 点線で仕切られた 4 つの領域では f は正則であり，1 : 1 に写像される．
- 正則な領域内の境界線（A1,G1 の境界）は対応する境界（A2,G2 の境界）に写像される．
- 点線は特異点の集合であり，直線が一点に潰れることもあれば，一点が直線に blow up することもある
- E1,D1,G3,H3 は次の領域 E2,D2,G4,H4 に反転して写像される．D4,E4,H4,G4 も同様．



Q の周りの回転を詳しく見よう.

- Q の近傍では $-\dfrac{4\pi}{5}$ 回転である.
- C4,D4 は C5,D5 に写像されるが，境界が一点に潰れてその先は反転している.
- C5,D5 は C1,D1 に写像されるが，ねじれが保存されたまま正則に写像されている.
- C1,D1 は C2,D2 に写像されるが，ねじれが解消し，一点が線分に blow up している.



P の回転とも Q の回転とも関連の付けにくい領域が残ってしまった．

- D4,E4,H4,G4 を C4,F4 の糊代と見なすことも出来るが，D2,E2,H2,G2 では H2,G2 がねじれてはみ出しており，E2 とは一点でしか接触していない．D3,E3,H3,G3 も同様．D1,E1,H1,G1 では全体がねじれてはみ出している．これら四つは正常．D5,E5,H5,G5 も同様．