For Tutors

MeBio　数学テキスト

昭和大学 2017 年 2 番
確率の問題

—深読み—

Edited by kamei

第 1 章

問題と解答

問題 1–1　次の問いに答えよ．ただし，(1), (2) は答のみを解答欄に記入せよ．

公平なサイコロを 1 回振るごとに，偶数の目が出たら 1(万円) を獲得し，奇数の目が出たら 1(万円) を損失するという賭けを行う．所持金 0 でこの賭けを n 回繰り返した際の損益額の合計を Z_n(万円) とする．ただし，$Z_0 = 0$ とする．

(1) $M_n = \max_{0 \leqq i \leqq n} Z_i$ とするとき，確率 $P(M_4 = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\max_{0 \leqq i \leqq n} Z_i$ は $0 \leqq i \leqq n$ における Z_i の最大値を表す．

(2) $T_n = \#\{i \mid i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, (Z_i = 0 \cap Z_{i+1} = 1) \cup (Z_i = 1 \cap Z_{i+1} = 0)\}$ とするとき，確率 $P(T_4 = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\#A$ は集合 A の要素の個数を表す．

(3) 任意の k に対して $P(M_5 = k)$ と $P(T_5 = k)$ の間に成り立つ関係を求めよ．

略解

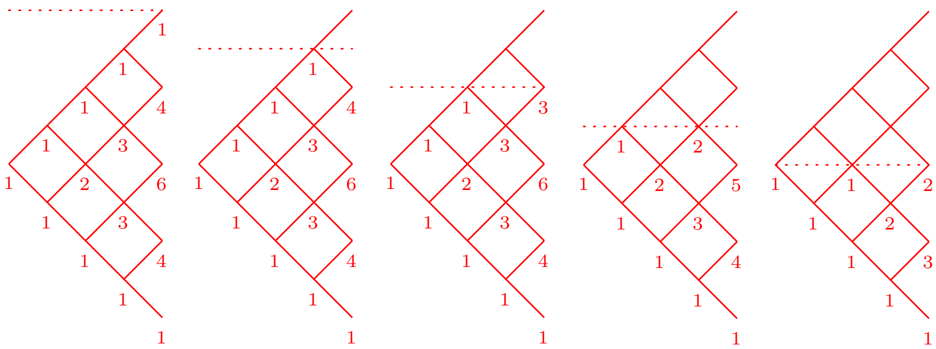
(1) $P(M_4 = 0) = \dfrac{3}{8}$, $P(M_4 = 1) = \dfrac{1}{4}$, $P(M_4 = 2) = \dfrac{1}{4}$, $P(M_4 = 3) = \dfrac{1}{16}$, $P(M_4 = 4) = \dfrac{1}{16}$

(2) $P(T_4 = 0) = \dfrac{3}{8}$, $P(T_4 = 1) = \dfrac{1}{4}$, $P(T_4 = 2) = \dfrac{1}{4}$, $P(T_4 = 3) = \dfrac{1}{16}$, $P(T_4 = 4) = \dfrac{1}{16}$

(3) $P(M_5 = k) = P(T_5 = k)$

解答

(1) 偶数の目が出れば右上，奇数の目が出れば右下に進むことにする．下の表より次の確率がわかる．

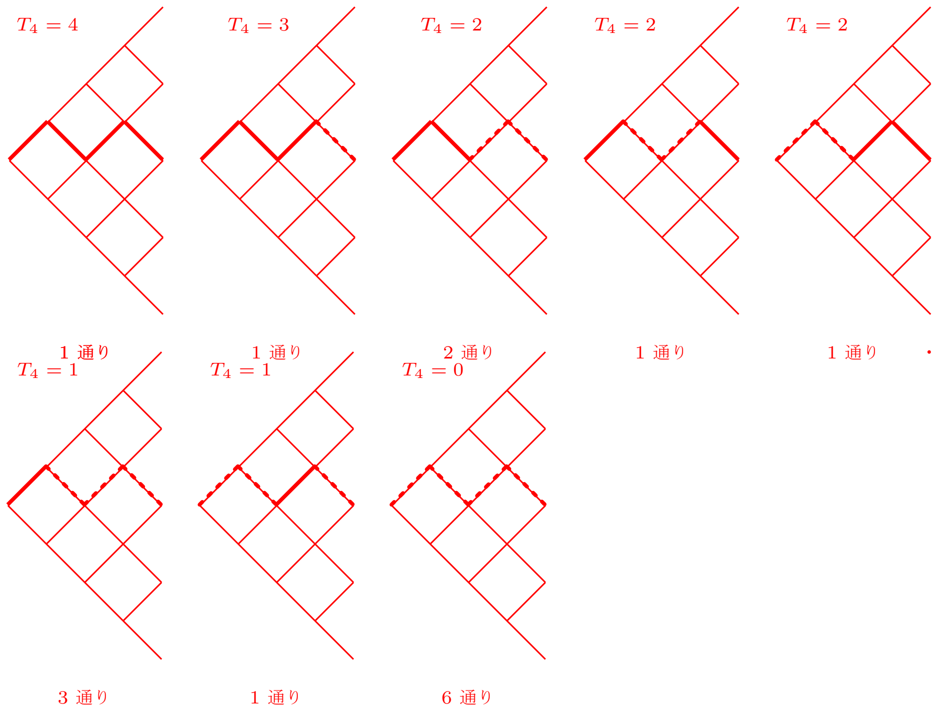


$$P(M_4 \leqq 4) = \frac{16}{16},\ P(M_4 \leqq 3) = \frac{15}{16},\ P(M_4 \leqq 2) = \frac{14}{16},\ P(M_4 \leqq 1) = \frac{10}{16},\ P(M_4 \leqq 0) = \frac{6}{16}.$$

これより次を得る．

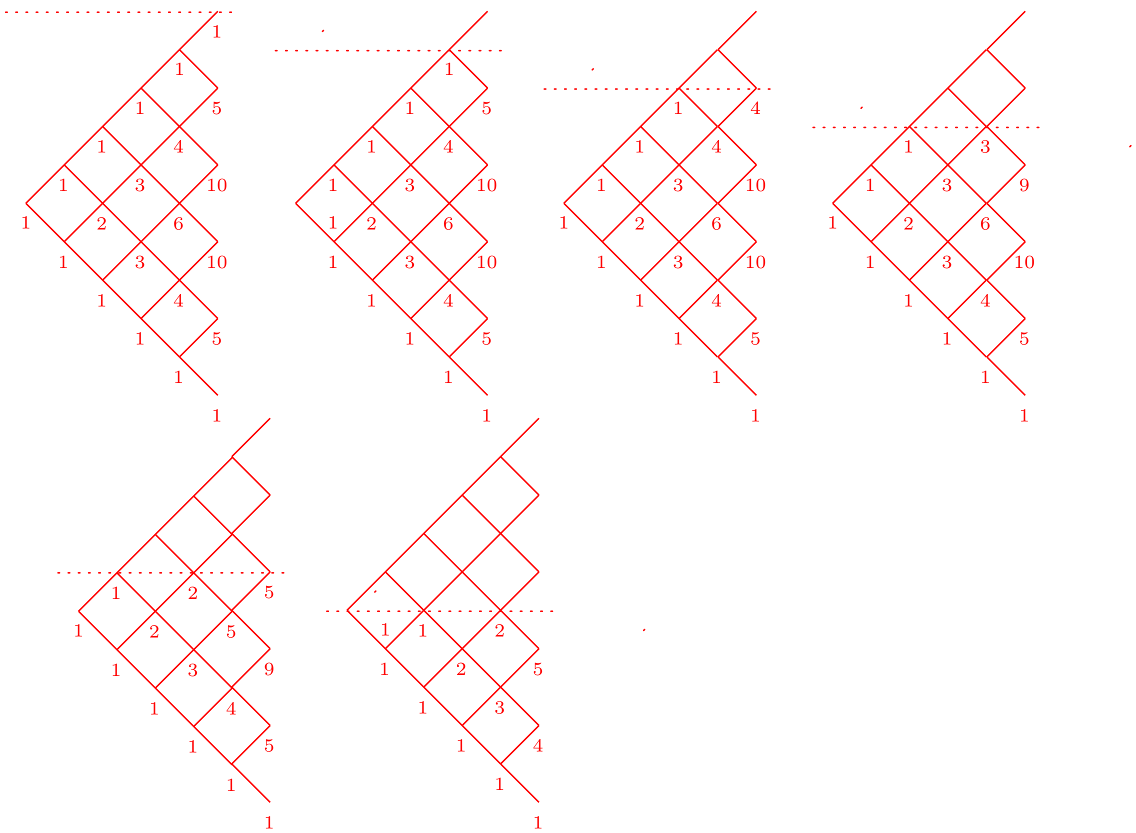
$$P(M_4 = 4) = \frac{1}{16},\ P(M_4 = 3) = \frac{1}{16},\ P(M_4 = 2) = \frac{4}{16},\ P(M_4 = 1) = \frac{4}{16},\ P(M_4 = 0) = \frac{6}{16}.$$

(2) 太線部を通り，点線部を通らない経路の数を数えればよい．



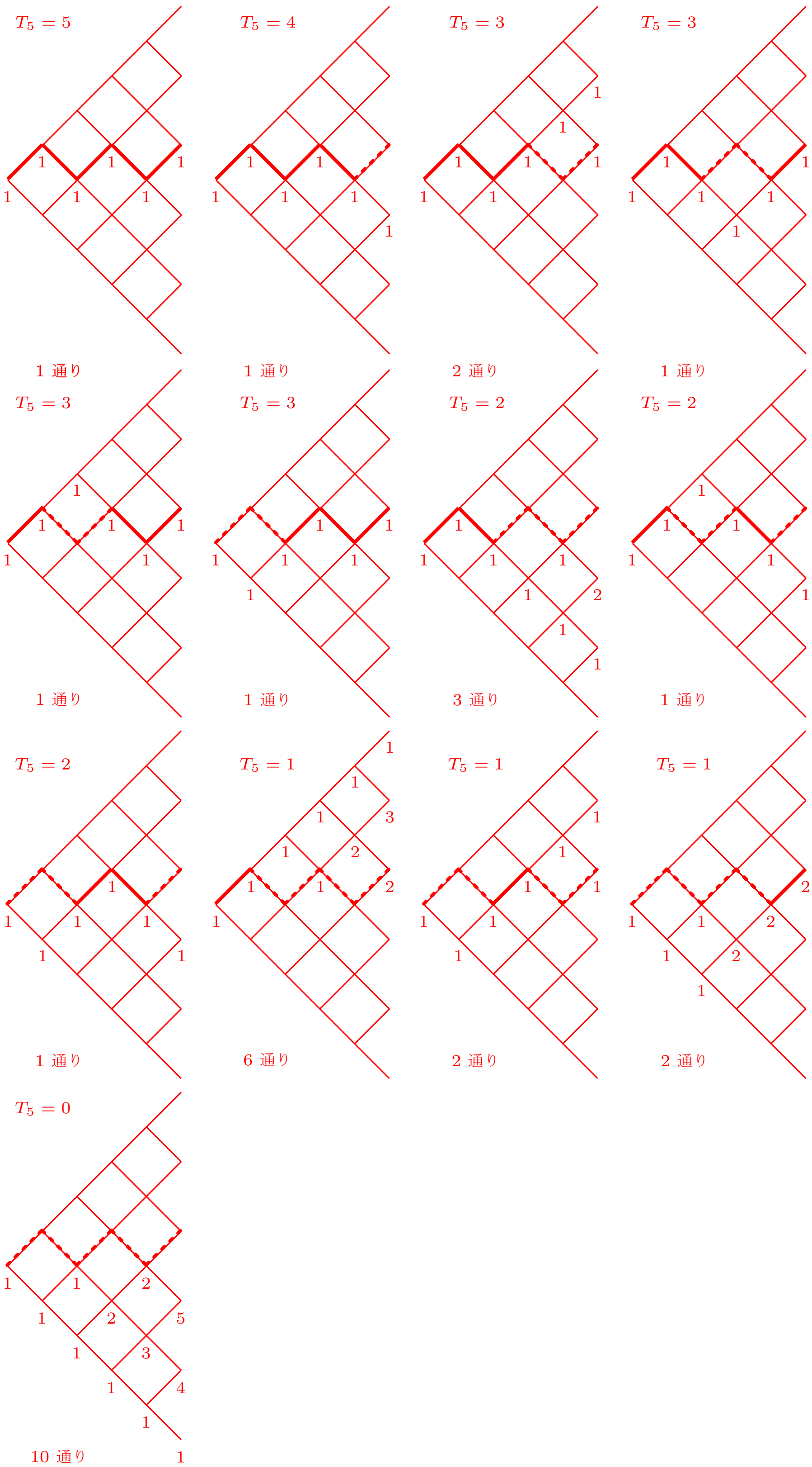
これより $P(T_4 = 4) = \dfrac{1}{16}$, $P(T_4 = 3) = \dfrac{1}{16}$, $P(T_4 = 2) = \dfrac{4}{16}$, $P(T_4 = 1) = \dfrac{4}{16}$, $P(T_4 = 0) = \dfrac{6}{16}$ がわかった.

(3) (1), (2) と同じことを $n = 5$ でやってみればよい.（もっと本質的に，任意の n, k に対して $P(M_n = k) = P(T_n = k)$ が成り立つことが証明できる. ただしおそらく容易ではない．証明は亀井 HP.）



これより次を得る.

$$P(M_5 = 5) = \frac{1}{32},\ P(M_5 = 4) = \frac{1}{32},\ P(M_5 = 3) = \frac{5}{32},\ P(M_5 = 2) = \frac{5}{32},\ P(M_5 = 1) = \frac{10}{32},\ P(M_5 = 0) = \frac{10}{32}.$$



これより次を得る.

$P(T_5 = 5) = \dfrac{1}{32}$, $P(T_5 = 4) = \dfrac{1}{32}$, $P(T_5 = 3) = \dfrac{5}{32}$, $P(T_5 = 2) = \dfrac{5}{32}$, $P(T_5 = 1) = \dfrac{10}{32}$, $P(T_5 = 0) = \dfrac{10}{32}$.

従って $P(M_5 = k) = P(T_5 = k)$ $(0 \leqq k \leqq 5)$ がわかった.

【17 昭和大（医）前期】M_shouwa_2017A_02.mdf

第 2 章

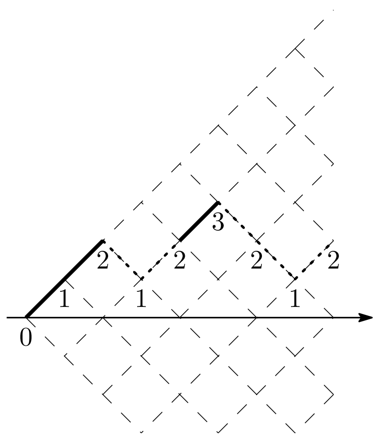
気になった部分

もちろん，すべての $n,\ k$ 対して $P(M_n = k) = P(T_n = k)$ が成り立つかどうかである．実際成り立つことが 2 通りで証明できた．もっと簡単な証明もありそうだ.

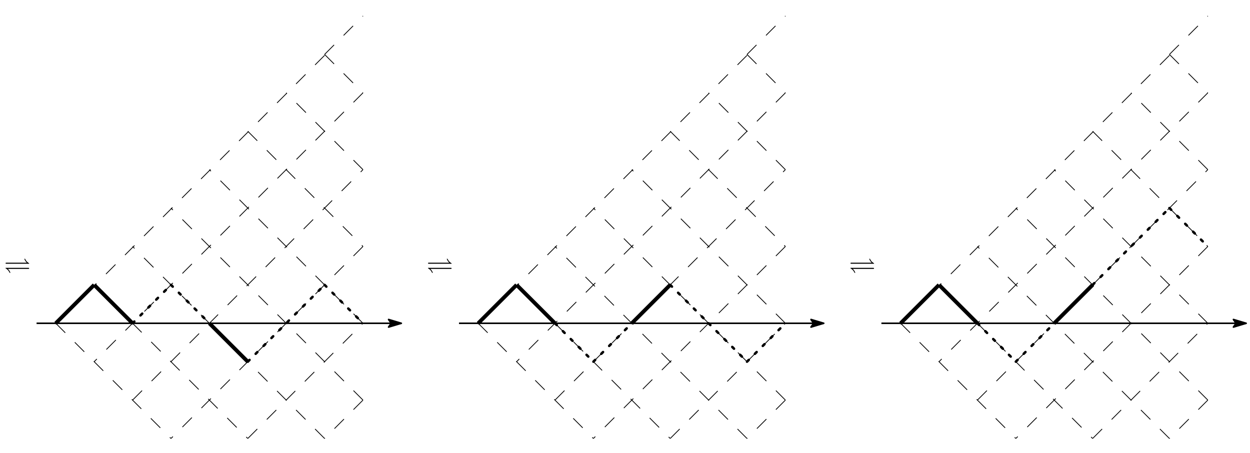
確率で考えるメリットは何もないから，$M_n = k$ を実現する経路の数を $N(n,\ k)$, $T_n = k$ を実現する経路の数を $S(n,\ k)$ として，$N(n,\ k) = S(n,\ k)$ を示そう．

§ 1　1 対 1 対応

最初に思いついた証明は $M_n = k$ を実現する経路と $T_n = k$ を実現する経路の間に 1 : 1 対応を付ける証明である．対応は次の通り．



図のように，過去最大損益 Z_i を更新している線分を太くする．図では太線が 3 つある．1 本目の太線から順に，その太線の右端点以降の経路を上下反転させることを繰り返す.



これは逆操作も可能である．これにより $M_n = k$ を実現する経路と $T_n = k$ を実現する経路が $1:1$ に対応することは容易にわかる．

§ 2　$N(n,\ k)$ の具体的な値

次に考えたのは（鷹合さんからも指摘されたが），$N(n,\ k)$ と $S(n,\ k)$ が同じ漸化式を満たせば証明できるというものだった．しかし $N(n,\ k)$ に関する漸化式は簡単にわかるが，$S(n,\ k)$ に関する漸化式は簡単には求められそうになかった．

代わりにという訳でもないが，$N(n,\ k)$ に関する漸化式から $N(n,\ k)$ の具体的な値が導けることに気がついた．

n を 0 以上の整数とする．$k < 0$ および $k > n$ の場合 $N(n,\ k) = 0$ と定義しておく．

命題 2.1 $N(0,\ 0) = 1$, $N(1,\ 1) = 1$, $N(1,\ 0) = 1$ である．$n > 1$ に関する $N(n,\ k)$ の値は次の漸化式で決定できる．

(1)　$n \geqq 1,\ k \geqq 1$ のとき $N(n,\ k) = N(n-1,\ k-1) + N(n-1,\ k+1)$

(2)　$n \geqq 1,\ k = 0$ のとき $N(n,\ 0) = N(n-1,\ 0) + N(n-1,\ 1)$

証明　$k \geqq 1$ とする，一回目が偶数である場合，$M_n = k$ となるためには，残り $n-1$ 回の最大損益が $k-1$ であることが必要十分である．また一回目が奇数である場合，$M_n = k$ となるためには，残り $n-1$ 回の最大損益が $k+1$ であることが必要十分である．

$k = 0$ とする，一回目が偶数である場合，$M_n = 0$ となることはない．また一回目が奇数である場合，$M_n = k$ となるためには，残り $n-1$ 回の最大損益が 0 または 1 であることが必要十分である．□

この漸化式を適用すると，$N(n,k)$ の値が次のように求められる．

$N(0,\ 0) = 1,$
$N(1,\ 0) = 1,\ N(1,\ 1) = 1,$
$N(2,\ 0) = 2,\ N(2,\ 1) = 1,\ N(2,\ 2) = 1,$
$N(3,\ 0) = 3,\ N(3,\ 1) = 3,\ N(3,\ 2) = 1,\ N(3,\ 3) = 1,$
$N(4,\ 0) = 6,\ N(4,\ 1) = 4,\ N(4,\ 2) = 4,\ N(4,\ 3) = 1,\ N(4,\ 4) = 1,$
$N(5,\ 0) = 10,\ N(5,\ 1) = 10,\ N(5,\ 2) = 5,\ N(5,\ 3) = 5,\ N(5,\ 4) = 1,\ N(5,\ 5) = 1,$

これを見ると次の予想が立つ．

命題 2.2　$N(n,\ k) = {}_n\mathrm{C}_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]}$

証明　帰納法で証明する．$n = 0,\ 1$ のときは正しい．$n = m-1$ のときの成立を仮定する．$k \geqq 1$ の場合

$$\begin{aligned} N(m,\ k) &= N(m-1,\ k-1) + N(m-1,\ k+1) \\ &= {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+k-1}{2}\right]} + {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+k+1}{2}\right]} \\ &= {}_m\mathrm{C}_{\left[\frac{m+k+1}{2}\right]} \end{aligned}$$

また $k = 0$ の場合（この場合 ${}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m}{2}\right]} = {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ が容易にわかる．）

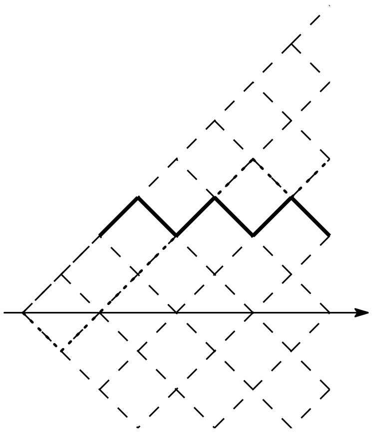
$$\begin{aligned} N(m,\ 0) &= N(m-1,\ 0) + N(m-1,\ 1) \\ &= {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m}{2}\right]} + {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \\ &= {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]} + {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \\ &= {}_m\mathrm{C}_{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \end{aligned}$$

以上により証明された．□

§ 3　$S(n,\ k)$ の具体的な値

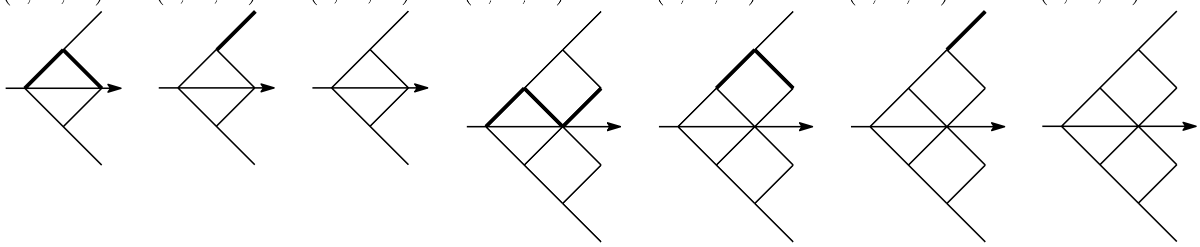
$S(n,\ k)$ に関しては $N(n,\ k)$ と同様の漸化式は成り立ちそうにない．そこでもう少し精密化して考えてみた．

道の数 n の経路を一つ考える．$0 \leqq n,\ 0 \leqq l \leqq n-1$ に対し $T_{n,l} = \#\{i \,|\, i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ (Z_i = l \cap Z_{i+1} = l+1) \cup (Z_i = l+1 \cap Z_{i+1} = l)\}$ とする．$T_{n,l} = k$ を実現する経路の数を $S(n,\ l,\ k)$ と置く．先程定義した $S(n,\ k)$ とは $S(n,\ k) = S(n,\ 0,\ k)$ の関係がある．



上の図の点線は $T_{8,2} = 1$ となる経路の例である．小さい数に対する $S(n,\ l,\ k)$ の値を挙げてみよう．

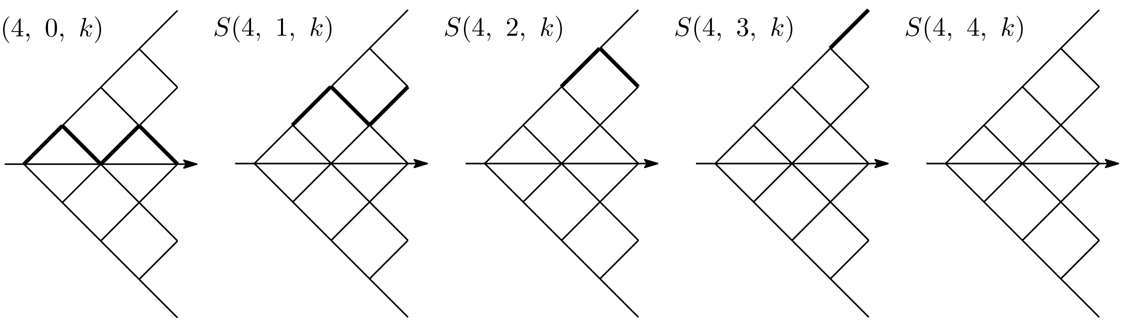
$S(2,\ 0,\ k)$　$S(2,\ 1,\ k)$　$S(2,\ 2,\ k)$　$S(3,\ 0,\ k)$　$S(3,\ 1,\ k)$　$S(3,\ 2,\ k)$　$S(3,\ 3,\ k)$



$$\begin{cases} S(2,\ 0,\ 2) = 1 \\ S(2,\ 0,\ 1) = 1 \\ S(2,\ 0,\ 0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} S(2,\ 1,\ 1) = 1 \\ S(2,\ 1,\ 0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} S(2,\ 2,\ 0) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(3,\ 0,\ 3) = 1 \\ S(3,\ 0,\ 2) = 1 \\ S(3,\ 0,\ 1) = 3 \\ S(3,\ 0,\ 0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} S(3,\ 1,\ 2) = 1 \\ S(3,\ 1,\ 1) = 1 \\ S(3,\ 1,\ 0) = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} S(3,\ 2,\ 1) = 1 \\ S(3,\ 2,\ 0) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} S(3,\ 3,\ 0) = 8 \end{cases}$$

$S(4,\ 0,\ k)$　$S(4,\ 1,\ k)$　$S(4,\ 2,\ k)$　$S(4,\ 3,\ k)$　$S(4,\ 4,\ k)$



$$\left\{\begin{array}{l} S(4,\ 0,\ 4)=1 \\ S(4,\ 0,\ 3)=1 \\ S(4,\ 0,\ 2)=4 \\ S(4,\ 0,\ 1)=4 \\ S(4,\ 0,\ 0)=6 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S(4,\ 1,\ 3)=1 \\ S(4,\ 1,\ 2)=1 \\ S(4,\ 1,\ 1)=4 \\ S(4,\ 1,\ 0)=10 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S(4,\ 2,\ 2)=1 \\ S(4,\ 2,\ 1)=1 \\ S(4,\ 2,\ 0)=14 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S(4,\ 3,\ 1)=1 \\ S(4,\ 3,\ 0)=15 \end{array}\right. \left\{\ S(4,\ 4,\ 0)=16\right.$$

この表を見ると $k \geqq 1$ に対し $S(n, l,\ k) = {}_n\mathrm{C}_{\left[\frac{n+l+k+1}{2}\right]}$ という予想がつく．$k=0$ の場合は $S(n,\ l,\ 0) = 2^n - \sum_{k=1}^{n} S(n,\ l,\ k)$ で出せばよいだけなので，直接考える必要はない．

今までと同様 ${}_4\mathrm{C}_6$ や ${}_4\mathrm{C}_{-1}$ など定義されない二項係数の値は 0 ということにする．

命題 2.3 $n \geqq 1$ とする．次の漸化式が成り立つ．

(1)　$l \geqq 1$ のとき $S(n,\ l,\ k) = S(n-1,\ l-1,\ k) + S(n-1,\ l+1,\ k)$

(2)　$l=0,\ k \geqq 1$ のとき $S(n,\ 0,\ k) = S(n-1,\ 0,\ k-1) + S(n-1,\ 1,\ k)$

(3)　$l=0,\ k=0$ のとき $S(n,\ 0,\ 0) = S(n-1,\ 1,\ 0) + S(n-1,\ 1,\ 1)$

証明　それぞれ一回目が偶数か奇数かに分けて考えればよい．$S(n,\ 0,\ k)$ で一回目が偶数の場合は，$(1,\ 1)$ 以降の進路を上下反転して考えることにより $S(n-1,\ 0,\ k-1)$ であるとわかる．□

この漸化式を適用すると，先程の予想が証明できる．

命題 2.4　$n \geqq 0, 0 \leqq l \leqq n-1$ とする．

(1)　$k \geqq 1$ のとき $S(n,\ l,\ k) = {}_n\mathrm{C}_{\left[\frac{n+l+k+1}{2}\right]}$ が成り立つ．

(2)　$l=0,\ k=0$ のとき $S(n,\ 0,\ 0) = {}_n\mathrm{C}_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ が成り立つ．

証明　n に関する帰納法で証明する．$n=0,\ 1$ のときは正しい．$n=m-1$ のときの成立を仮定する．

(1)　$l \geqq 1,\ k \geqq 1$ の場合

$$\begin{aligned} S(m,\ l,\ k) &= S(m-1,\ l-1,\ k) + S(m-1,\ l+1,\ k) \\ &= {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+l+k-1}{2}\right]} + {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+l+k+1}{2}\right]} \\ &= {}_m\mathrm{C}_{\left[\frac{m+l+k+1}{2}\right]} \end{aligned}$$

$l=0,\ k \geqq 1$ の場合

$$\begin{aligned} S(m,\ 0,\ k) &= S(m-1,\ 0,\ k-1) + S(m-1,\ 1,\ k) \\ &= {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+k-1}{2}\right]} + {}_{m-1}\mathrm{C}_{\left[\frac{m+k+1}{2}\right]} \\ &= {}_m\mathrm{C}_{\left[\frac{m+k+1}{2}\right]} \end{aligned}$$

(2)　$S(m,\ 0,\ 0) = 2^m - \sum_{k=1}^{m} S(m,\ 0,\ k)$ より成り立つ．

以上により証明された．□

結論 $S(n,\ k) = S(n,\ 0,\ k) = {}_n\mathrm{C}_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]} = N(n,\ k)$ が証明できた．