For Tutors

MeBio　数学テキスト

「獲得！ 金メダル」の問題
安藤哲哉「不等式」の問題

—楽しい Bunching —

Edited by kamei

第 1 章

有名不等式

この章は自分の復習用.

§ 1 AM–GM 不等式の図形的解釈

問題 1–1–1 $a,\ b,\ c$ を正の実数とすると,

$$ab^5+bc^5+ca^5 \geqq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b$$

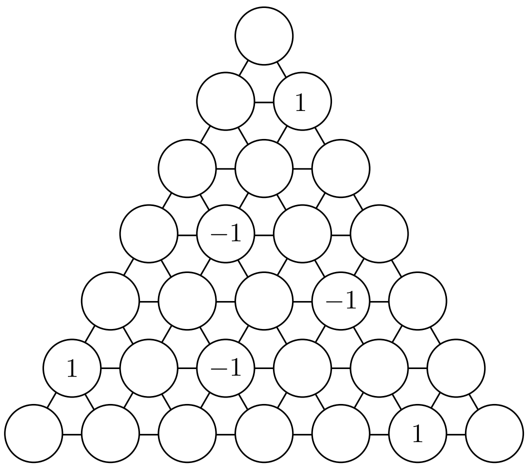
が成り立つ.

証明 AM–GM 不等式より

$$\begin{aligned}
& ab^5+bc^5+ca^5 \\
= & \left(\frac{8}{21}ab^5+\frac{2}{21}bc^5+\frac{11}{21}ca^5\right)+\left(\frac{8}{21}bc^5+\frac{2}{21}ca^5+\frac{11}{21}ab^5\right)+\left(\frac{8}{21}ca^5+\frac{2}{21}ab^5+\frac{11}{21}bc^5\right) \\
\geqq & (ab^5)^{\frac{8}{21}}(bc^5)^{\frac{2}{21}}(ca^5)^{\frac{11}{21}}+(bc^5)^{\frac{8}{21}}(ca^5)^{\frac{2}{21}}(ab^5)^{\frac{11}{21}}+(ca^5)^{\frac{8}{21}}(ab^5)^{\frac{2}{21}}(bc^5)^{\frac{11}{21}} \\
= & a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b
\end{aligned}$$

□

これは次の図形で考えるとわかりやすい.



正の値が書き込まれている三角形が左辺を表し,負の値が書き込まれている三角形が右辺を表す.不等式が AM–GM で解決するためには,正の値の合計と負の値の合計は絶対値が一致していなければならない.また.正の値の重心(加重平均)と.負の値の重心(加重平均)も一致していなければならない.その上で正の三角形が負の三角形を内部に含んでいるなら,その不等式は AM–GM 不等式で証明できる.

三角形は正三角形である必要はなく，加重も均等でなくてよい．証明のために必要な係数は，チェバタイプの問題をおもりの公式で求める方法に一致する．

この事実より次がいえる．

「図の中央のマス目の加重が正である不等式，および負の値の書いてある点が正の値の書いてある点の作る凸閉包の外部にはみ出ているような不等式は，重み付き AM–GM 不等式だけでは解決しない．」

ではこのような不等式はどう扱うかというと，次の Schur の不等式で解決するものが多いようである．

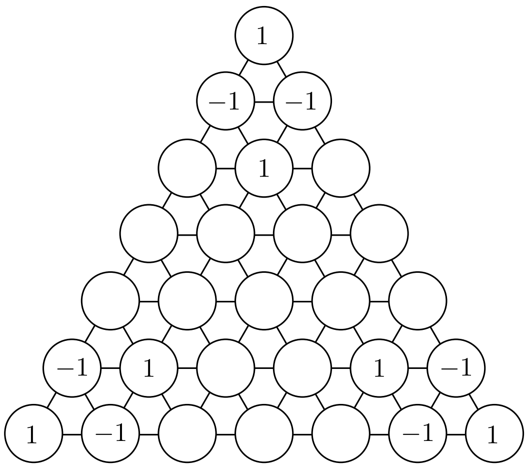
§ 2　Schur の不等式

定理 1.1 $a,\ b,\ c$ は 0 以上の実数，t は任意の実数とする．次が成り立つ．

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(c-a)+c^t(c-a)(c-b) \geqq 0$$

□

証明は $a \geqq b \geqq c$ として，与式をうまく正数の和に分解してやればよいのだが，難しいのはその適用である．これも図形で考えればよくわかると気付いた．例えば $t=4$ のときの Schur の不等式は，次のような図が正であることを意味する．



§ 3　Hölder の不等式

次の不等式は Hölder の不等式と呼ばれている．$|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}| \geqq \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$ の一般化と見なすことが出来る，文字を増やす，ノルムの次数を変える．重みをつけるなどの一般化も容易だが，最も印象的な形で覚えておきたかったので次の形にした．

定理 1.2 文字はすべて正の実数とする．次が成り立つ．

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}\,\sqrt[3]{p^3+q^3+r^3}\,\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3} \geqq apx+bqy+crz$$

証明

$$
\begin{aligned}
& \frac{\text{右辺}}{\text{左辺}} \\
= \;& \frac{apx+bqy+crz}{\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}\sqrt[3]{p^3+q^3+r^3}\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}} \\
= \;& \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}}\sqrt[3]{\frac{p^3}{p^3+q^3+r^3}}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}} \\
& +\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}}\sqrt[3]{\frac{q^3}{p^3+q^3+r^3}}\sqrt[3]{\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}} \\
& +\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}}\sqrt[3]{\frac{r^3}{p^3+q^3+r^3}}\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}} \\
\leqq \;& \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{p^3}{p^3+q^3+r^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}\right) \\
& +\frac{1}{3}\left(\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{q^3}{p^3+q^3+r^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}\right) \\
& +\frac{1}{3}\left(\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{r^3}{p^3+q^3+r^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}\right) \\
= \;& 1
\end{aligned}
$$

□

次の定理があれば，Hölder の不等式の一般型の証明が容易になる．

定理 1.3 文字はすべて正の実数，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ とする．次が成り立つ．

$$(a^p+b^p+c^p)^{\frac{1}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{1}{q}} \geqq ((ax)^r+(by)^r+(cz)^r)^{\frac{1}{r}}$$

証明　まず与式の両辺を r 乗する．

$$
\begin{aligned}
& (a^p+b^p+c^p)^{\frac{1}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{1}{q}} \geqq ((ax)^r+(by)^r+(cz)^r)^{\frac{1}{r}} \\
\iff \;& (a^p+b^p+c^p)^{\frac{r}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{r}{q}} \geqq (ax)^r+(by)^r+(cz)^r
\end{aligned}
$$

この不等式を示そう．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\text{右辺}}{\text{左辺}} \\
=\ & \frac{(ax)^r+(by)^r+(cz)^r}{(a^p+b^p+c^p)^{\frac{r}{p}}(x^q+y^q+z^q)^{\frac{r}{q}}} \\
=\ & \left(\frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{x^q}{x^q+y^q+z^q}\right)^{\frac{r}{q}} \\
& +\left(\frac{b^p}{a^p+b^p+c^p}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{y^q}{x^q+y^q+z^q}\right)^{\frac{r}{q}} \\
& +\left(\frac{c^p}{a^p+b^p+c^p}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\frac{z^q}{x^q+y^q+z^q}\right)^{\frac{r}{q}} \\
\leqq\ & \left(\frac{r}{p}\cdot\frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}+\frac{r}{q}\cdot\frac{x^q}{x^q+y^q+z^q}\right) \\
& +\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{b^p}{a^p+b^p+c^p}+\frac{r}{q}\cdot\frac{y^q}{x^q+y^q+z^q}\right) \\
& +\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{c^p}{a^p+b^p+c^p}+\frac{r}{q}\cdot\frac{z^q}{x^q+y^q+z^q}\right) \\
=\ & 1
\end{aligned}
$$

□

注意　この定理は，ベクトル $\boldsymbol{u}=(a,\ b,\ c)$ に対する L_p ノルム $||\boldsymbol{u}||_p=(|a|^p+|b|^p+|c|^p)^{\frac{1}{p}}$ を使って

$$||\boldsymbol{u}||_p\cdot||\boldsymbol{v}||_q \leqq ||\boldsymbol{uv}||_r$$

と表されるのが普通．

§ 4　Power Mean 不等式

次の不等式は Power Mean 不等式（冪平均不等式）と呼ばれている．3 乗平均の 3 乗根は 2 乗平均の 2 乗根より大きいだろうという，いかにも成り立ちそうな不等式である．

定理 1.4 文字はすべて正の実数，$s<t$ とする．次が成り立つ．

$$\left(\frac{{a_1}^s+{a_2}^s+\cdots{a_n}^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}} \leqq \left(\frac{{a_1}^t+{a_2}^t+\cdots{a_n}^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

証明　$\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{u}$ となる u をとる．$A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$, $E=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ に対し Hölder の不等式 $||AE||_s \leqq ||A||_t||E||_u$ を考えればよい．

第 2 章

いくつかの問題たち

§ 1 「獲得」p.10, 例

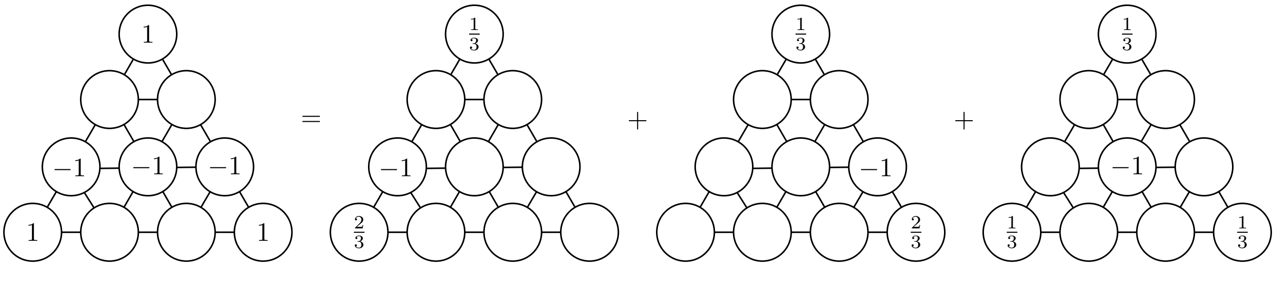
問題 2–1–1　正実数 x, y, z に対して $\dfrac{x^2}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{y^2}{z^2+zx+x^2}+\dfrac{z^2}{x^2+xy+y^2} \geqq 1$ が成り立つことを示せ.

証明　そのまま Bunching しても出来るが，工夫しよう．$\dfrac{x^2}{y^2+yz+z^2} \geqq \dfrac{x^p}{x^p+y^p+z^p}$ となる p が見つかれば話は簡単になるが，問題はその p の見つけ方である．もっと根源的には，比較する対象が $\dfrac{x^p+2y^p}{3(x^p+y^p+z^p)}$ などかも知れないと問題もある．それに関しては，うまい方法を発見した．

相加平均〜相乗平均という表記を使うと $\dfrac{x^2}{y^2+yz+z^2} \sim \dfrac{x^2}{3yz}$ である．一方 $\dfrac{x^p}{x^p+y^p+z^p} \sim \dfrac{x^p}{3x^{\frac{p}{3}}y^{\frac{p}{3}}z^{\frac{p}{3}}} = \dfrac{x^{\frac{2p}{3}}}{3y^{\frac{p}{3}}z^{\frac{p}{3}}}$ であるから，両者が一致するためには $p=3$ でなければいけない．そのように見当をつけると，示すべき不等式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{y^2+yz+z^2} &\geqq \frac{x^3}{x^3+y^3+z^3} \\
\iff \quad x^3+y^3+z^3 &\geqq xy^2+xyz+xz^2
\end{aligned}
$$

これが成り立っていることは次の図でわかる．



§ 2 「獲得」p.16, 例

原本では Hölder の不等式で解いているが，項別評価，Bunching で解いてみた．

問題 2–2–1　$xyz=1$ なる正実数 x, y, z に対して $\dfrac{x^4}{x+2y}+\dfrac{y^4}{y+2z}+\dfrac{z^4}{z+2x} \geqq 1$ が成り立つことを示せ.

証明　$\dfrac{x^4}{x+2y} = \dfrac{x^4}{xyz(x+2y)} = \dfrac{x^3}{xyz+2y^2z}$ と斉次化する．$\dfrac{x^3}{xyz+2y^2z} \geqq \dfrac{sx^p+ty^p+uz^q}{x^p+y^p+z^p}$ となる p, s, t, u $(s+t+u=1)$ が見つけたい．

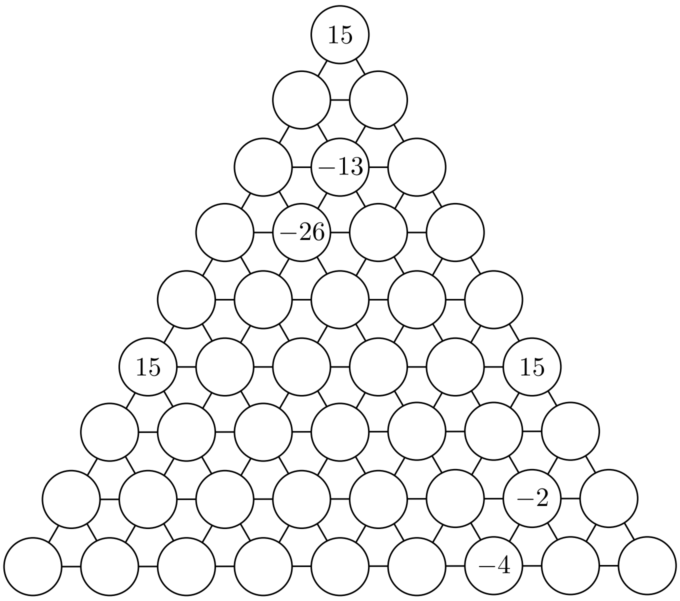
相加平均〜相乗平均という表記を使って $\dfrac{x^3}{xyz+2y^2z} \sim \dfrac{x^3}{3yz(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})} = \dfrac{1}{3}x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{5}{3}}z^{-1}$ である．一方 $\dfrac{sx^p+ty^p+uz^q}{x^p+y^p+z^p} \sim \dfrac{x^{ps}y^{pt}z^{pu}}{3x^{\frac{p}{3}}y^{\frac{p}{3}}z^{\frac{p}{3}}} = \dfrac{1}{3}x^{ps-\frac{p}{3}}y^{pt-\frac{p}{3}}z^{pu-\frac{p}{3}}$ であるから，$ps-\dfrac{p}{3}=\dfrac{8}{3}$, $pt-\dfrac{p}{3}=-\dfrac{5}{3}$, $pu-\dfrac{p}{3}=-1$ を得る．

この解は不定であり，任意の p に対して $(s,\ t,\ u)=\left(\dfrac{p+8}{3p},\ \dfrac{p-5}{3p},\ \dfrac{p-3}{3p}\right)$ を解に持つ．

ここで負の数を避けようとして $p=5,\ (s,\ t,\ u)=\left(\dfrac{13}{15},\ 0,\ \dfrac{2}{15}\right)$ などとすると，証明すべき不等式が

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{xyz+2y^2z} &\geqq \frac{\frac{13}{15}x^5+\frac{2}{15}z^5}{x^5+y^5+z^5} \\ \iff \quad & 15x^3(x^5+y^5+z^5) \geqq (13x^5+2z^5)(xyz+2y^2z) \end{aligned}$$

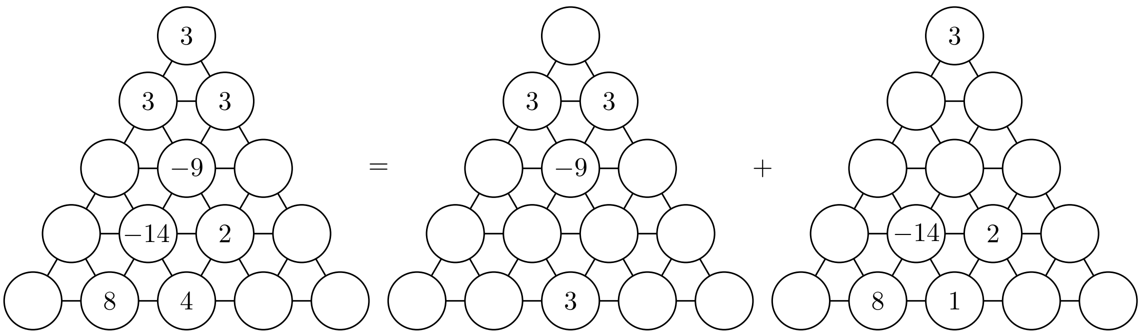
となり，Bunching が効かなくなる．（下図）



負の項が表れるが，$p=1,\ (s,\ t,\ u)=\left(3,\ -\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ としてみると，示すべき不等式は

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{xyz+2y^2z} &\geqq \frac{3x-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z}{x+y+z} \\ \iff \quad & 3x^3(x+y+z)+(4y+2z)(xyz+2y^2z) \geqq 9x(xyz+2y^2z) \\ \iff \quad & 3x^4+3x^3y+3x^3z+4xy^2z+8y^3z+2xyz^2+4y^2z^2 \geqq 9x^2yz+18xy^2z \\ \iff \quad & 3x^4+3x^3y+3x^3z+8y^3z+2xyz^2+4y^2z^2 \geqq 9x^2yz+14xy^2z \end{aligned}$$

となる．これは次の図から Bunching で証明できる．



3

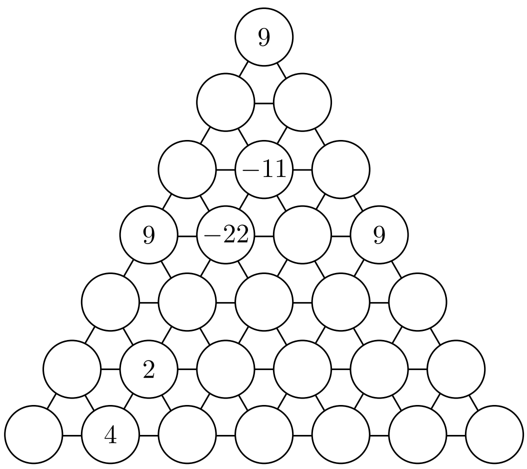
実際，重み付き AM–GM より次が成り立ち，辺々足せば目的の不等式となる．

$$
\begin{aligned}
3x^3y+3x^3z+3y^2z^2 &\geqq 9(x^3y)^{\frac{1}{3}}(x^3z)^{\frac{1}{3}}(y^2z^2)^{\frac{1}{3}}=9x^2yz \\
3x^4+8y^3z+2xyz^2+y^2z^2 &\geqq 14(x^4)^{\frac{3}{14}}(y^3z)^{\frac{8}{14}}(xyz^2)^{\frac{2}{14}}(y^2z^2)^{\frac{1}{14}}=14xy^2z
\end{aligned}
$$

$p=3,\ (s,\ t,\ u)=\left(\dfrac{11}{9},\ -\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ でもうまくいく．この場合，示すべき不等式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^3}{xyz+2y^2z} \geqq \frac{\frac{11}{9}x^3-\frac{2}{9}y^3}{x^3+y^3+z^3} \\
\iff\ & 9x^3(x^3+y^3+z^3) \geqq (11x^3-2y^3)(xyz+2y^2z) \\
\iff\ & 9x^6+9x^3y^3+9x^3z^3+2xy^4z+4y^5z \geqq 11x^4yz+22x^3y^2z
\end{aligned}
$$

となる．これは Bunching で証明できる．



実際，重み付き AM–GM より次が成り立ち，辺々足せば目的の不等式となる．

$$
\begin{aligned}
\frac{11}{3}x^6+\frac{11}{3}x^3y^3+\frac{11}{3}x^3z^3 &\geqq 11(x^6)^{\frac{1}{3}}(x^3y^3)^{\frac{1}{3}}(x^3z^3)^{\frac{1}{3}}=11x^4yz \\
\frac{16}{3}x^6+\frac{16}{3}x^3y^3+\frac{16}{3}x^3z^3+2xy^4z+4y^5z &\geqq 22(x^6)^{\frac{8}{33}}(x^3y^3)^{\frac{8}{33}}(x^3z^3)^{\frac{8}{33}}(xy^4z)^{\frac{1}{11}}(y^5z)^{\frac{2}{11}}=22x^3y^2z
\end{aligned}
$$

この様に p の値がある程度の範囲を動いても Bunching がうまくいくところが，不等式のいい加減さというか，おもしろさというか，確固たる理論を構築しにくい所以であろう．（近年そこがきっちり詰められつつあるということを，安藤さんが「不等式」で詳解しようとされている？）

§ 3　「獲得」p.27, 2005 IMO 問題 3

問題 2–3–1　　$x,\ y,\ z$ は $xyz \geqq 1$ を満たす正の実数とする．次の不等式を示せ：

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqq 0$$

証明　原書では次数下げ，斉次化の後，唐突に

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\dfrac{x^5}{xyz}+y^2+z^2}\leqq\frac{3}{2}\cdot\frac{y^p+z^p}{x^p+y^p+z^p}$$

を示す運びとなっているが，そこの気付き方について．

やはり

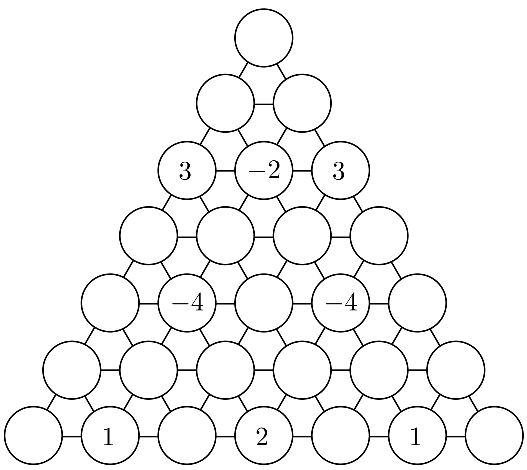
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\dfrac{x^5}{xyz}+y^2+z^2}\leqq\frac{sx^p+ty^p+uz^p}{x^p+y^p+z^p}\quad(s+t+u=3)$$

と置いてみて，

$$\begin{aligned}\text{左辺}\quad&=\quad\frac{xyz(x^2+y^2+z^2)}{x^5+xy^3z+xyz^3}\sim\frac{3x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{5}{3}}z^{\frac{5}{3}}}{3x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{4}{3}}}=x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}\\ \text{右辺}\quad&\sim\quad\frac{3x^{\frac{ps}{3}}y^{\frac{pt}{3}}z^{\frac{pu}{3}}}{3x^{\frac{p}{3}}y^{\frac{p}{3}}z^{\frac{p}{3}}}=x^{\frac{ps-p}{3}}y^{\frac{pt-p}{3}}z^{\frac{pu-p}{3}}\end{aligned}$$

これらの比較により $(s,\ t,\ u)=\left(\dfrac{p-2}{p},\ \dfrac{p+1}{p},\ \dfrac{p+1}{p}\right)$ を得る．そこで $p=2$ などを試してみるとうまくいく．($p=1$ ではだめだった．) 実際 $p=2$ の場合，示すべき不等式は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\frac{xyz(x^2+y^2+z^2)}{x^5+xy^3z+xyz^3}\leqq\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\\ \iff\quad&\frac{xyz(x^2+y^2+z^2)}{x^5+xy^3z+xyz^3}\leqq\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\\ \iff\quad&2x^4yz+4x^2y^3z+4x^2yz^3\leqq 3x^4y^2+3x^2y^4+y^5z+2y^3z^3+yz^5\end{aligned}$$



§ 4　「獲得」p.27, 2001 IMO 問題 2

問題 2–4–1　　正の実数 $a,\ b,\ c$ に対し,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1$$

が成り立つことを示せ.

証明　やはり

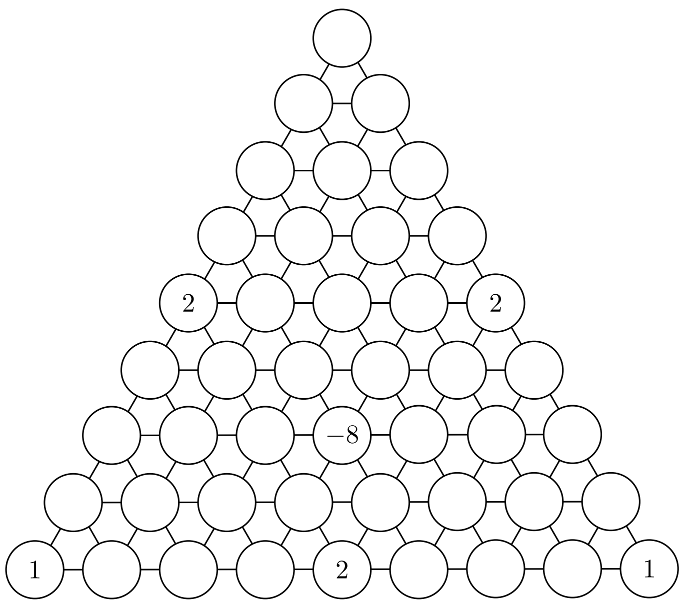
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqq \frac{sa^p+tb^p+uc^p}{a^p+b^p+c^p} \quad (s+t+u=1)$$

と置いてみる.

$$\begin{aligned} \text{左辺} \quad &= \quad \sim \frac{a}{\sqrt{9a^{\frac{2}{9}}(bc)^{\frac{8}{9}}}} = \frac{1}{3}a^{\frac{8}{9}}b^{-\frac{4}{9}}c^{-\frac{4}{9}} \\ \text{右辺} \quad &\sim \quad \frac{a^{ps}b^{pt}c^{pu}}{3a^{\frac{p}{3}}b^{\frac{p}{3}}c^{\frac{p}{3}}} = \frac{1}{3}a^{\frac{3ps-p}{3}}b^{\frac{3pt-p}{3}}c^{\frac{3pu-p}{3}} \end{aligned}$$

これらの比較により $(s,\ t,\ u) = \left(\dfrac{3p+8}{9p},\ \dfrac{3p-4}{9p},\ \dfrac{3p-4}{9p}\right)$ を得る．そこで $p=\dfrac{4}{3}$, $(s,\ t,\ u)=(1,\ 0,\ 0)$ を試してみる．この場合，示すべき不等式は次のようになる．$a=A^3$, $b=B^3$, $c=C^3$ と置く．

$$\begin{aligned} &\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \\ \Longleftrightarrow \quad &\frac{A^3}{\sqrt{A^6+8B^3C^3}} \geqq \frac{A^4}{A^4+B^4+C^4} \\ \Longleftrightarrow \quad &(A^4+B^4+C^4)^2 \geqq A^2(A^6+8B^3C^3) \\ \Longleftrightarrow \quad &B^8+C^8+2A^4B^4+2B^4C^4+2C^4A^4 \geqq 8A^2B^3C^3 \end{aligned}$$



§ 5　「獲得」p.29, 2005 JMO 本戦 問題 3

Hölder の不等式による別解を考えてみた.

問題 2–5–1　　正の実数 $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=1$ を満たしているとき,

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leqq 1$$

が成り立つことを示せ.

証明　$\boldsymbol{u}=\left(a^{\frac{1}{3}},\ b^{\frac{1}{3}},\ c^{\frac{1}{3}}\right)$, $\boldsymbol{v}=\left(a^{\frac{1}{3}},\ b^{\frac{1}{3}},\ c^{\frac{1}{3}}\right)$, $\boldsymbol{w}=\left(a^{\frac{1}{3}}(1+b-c)^{\frac{1}{3}},\ b^{\frac{1}{3}}(1+c-a)^{\frac{1}{3}},\ c^{\frac{1}{3}}(1+a+b)^{\frac{1}{3}}\right)$ と置く. Hölder の不等式

$$||\boldsymbol{u}||_3\cdot||\boldsymbol{v}||_3\cdot||\boldsymbol{w}||_3\geqq||\boldsymbol{uvw}||_1$$

を書き下せば

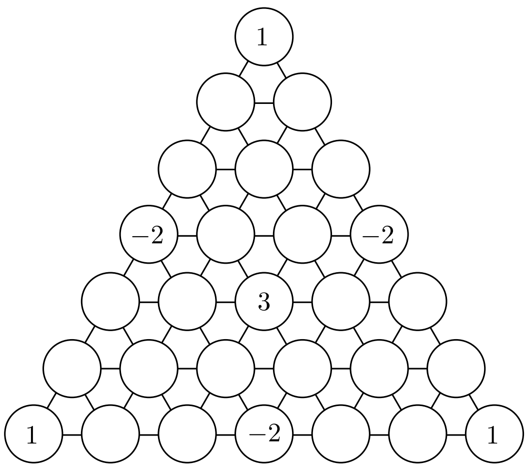
$$\begin{aligned}&(a+b+c)^{\frac{1}{3}}\cdot(a+b+c)^{\frac{1}{3}}\cdot(a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b))^{\frac{1}{3}}\\ \geqq\ \ & a(1+b-c)^{\frac{1}{3}}+b(1+c-a)^{\frac{1}{3}}+c(1+a+b)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

より目標の不等式を得る.

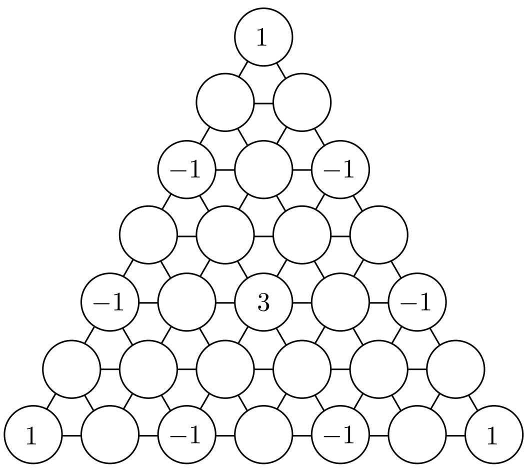
§ 6　「不等式」命題 2.1.9.(8)

問題 2–6–1　　$S_6+3U^2\geqq 2S_{3,3}$ ($\Longleftrightarrow\ a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2\geqq 2a^3b^3+2b^3c^3+2c^3a^3$)

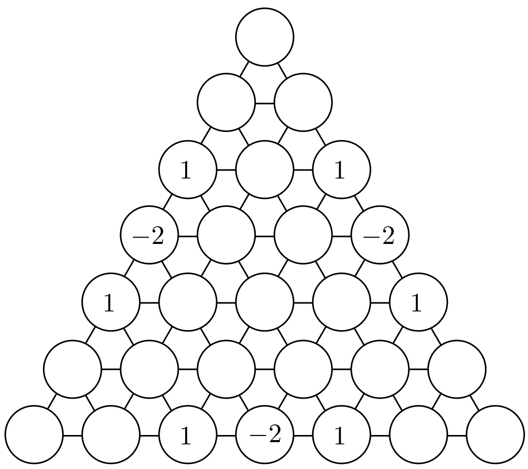
解答　次の図よりいえる。



=



+



示すべき不等式の左辺に $3a^2b^2c^2$ があるということは，この不等式がおそらく AM–GM だけでは解けないことを意味する．下段左の Schur の不等式をかませて中央の 3 を打ち消してやる．残余項は下段右である．これは明らかに 完全平方式 × 正の単項式 の 3 つの和になっているから 0 以上である．

§ 7　「不等式」例題 2.1.11.(Ⅰ)(5)

原本では「ウォーミングアップ」のなかの「簡単な不等式」となっている．簡単なのか？

問題 2–7–1　$\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ (a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1) \geqq \dfrac{a^2b^2c^2+abc+1}{3}$

概観　非常にきれいな不等式で，何か裏があるに違いないと思わせる．Hölder の不等式かと思ったのだが，うまくいかなかった．

等号は $a=b=c=1$ の場合だろう．

$a \to -a$ などを考えると $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0$ のときが一番厳しい不等式になっているから，その条件で示せば良い．

$a^2-a+1 \geqq \dfrac{3}{4}$, $b^2-b+1 \geqq \dfrac{3}{4}$, $c^2-c+1 \geqq \dfrac{3}{4}$ がわかるから $a=0$ のとき 左辺 $\geqq \dfrac{9}{16} > \dfrac{1}{3} =$ 右辺 である．従って $a>0,\ b>0,\ c>0$ で示せば良い．

有名不等式などですっぱり解けないのであれば，c の 2 次関数と見て判別式を考えるアプローチがある．とりあえずこれか．

原本の証明　まず $(a^2-a+1)(b^2-b+1) \geqq \dfrac{a^2b^2+1}{2}$ を示している．この発想がなぜ出てくるのかが不明．ab の関数と比較するという発想は自然だが，それがなぜ $\dfrac{a^2b^2+1}{2}$ なのだろう？ $a,\ b$ が大きいときは 2 倍ほどの差がある評価なのであるが．まあ，元の不等式は $a,\ b$ が大きいときは絶対に成り立つだろうから $a=b=1$ の近辺で評価することになるのであろうが．

その上で $\dfrac{a^2b^2+1}{2}(c^2-c+1) \geqq \dfrac{a^2b^2c^2+abc+1}{3}$ が示されれば題意は成り立つ．これは 左辺 − 右辺 を c の 2 次関数と見て判別式を考えれば証明できる．

書かれた証明を読めば理解は出来るが，やはりそのような解き方が出来る気はしなかった．

亀井の証明

$a,\ b,\ c>0$ で考える．$f(c)=3(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)-a^2b^2c^2-abc-1$ と置く．c^2 の係数が正だといっておきたいが

$$\begin{aligned} & 3(a^2-a+1)(b^2-b+1)-a^2b^2>0 \\ \iff\quad & 3\frac{a^2-a+1}{a^2}\cdot\frac{b^2-b+1}{b^2}>1 \\ \iff\quad & 3\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)>1 \end{aligned}$$

これは成り立つ．

後は $f(c)$ の判別式が 0 以下だといえばよい．そのまま考えると大変なことになるので $s=(a^2-a+1)(b^2-b+1)$, $t=ab$ と置くと

$$f(c)=3s(c^2-c+1)-t^2c^2-tc-1=(3s-t^2)c^2-(3s+t)c+(3s-1) \tag{2.1}$$

となり，その判別式 D_f は

$$D_f = (3s+t)^2 - 4(3s-t^2)(3s-1) \tag{2.2}$$

である．$D_f \leqq 0$ をいいたい．s, t は $s \geqq \dfrac{9}{16}$, $t > 0$ を満たすが，この領域全部を考えたのでは (2.2) は成り立たない．s, t は独立ではないからである．そこで t を固定して，a, b を動かし，s の取り得る値の範囲を確定させておこう．

$b = \dfrac{t}{a}$ であるから $s(a) = (a^2 - a + 1)\left(\dfrac{t^2}{a^2} - \dfrac{t}{a} + 1\right)$ である．このとき

$$\begin{aligned}
s(a) &= a^2 - (t+1)a + (t^2+t+1) - \frac{t^2+t}{a} + \frac{t^2}{a^2} \\
s'(a) &= 2a - (t+1) + \frac{t^2+t}{a^2} - \frac{2t^2}{a^3} \\
&= \frac{1}{a^3}(a^2-t)(2a^2-(t+1)a+2t)
\end{aligned}$$

(i) $0 < t < 7 - 4\sqrt{3}$, $7 + 4\sqrt{3} < t$ の場合

$2a^2 - (t+1)a + 2t = 0$ は二解 $a = \dfrac{t+1 \pm \sqrt{t^2-14t+1}}{4}$ を持つ．$\alpha = \dfrac{t+1-\sqrt{t^2-14t+1}}{4}$,

$\beta = \dfrac{t+1-\sqrt{t^2-14t+1}}{4}$ と置くと，増減表は次のようになる．

a	(0)		α		$\sqrt{t}$		β		∞
$s'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$s(a)$	∞	$\searrow$	$s(\alpha)$	$\nearrow$	$s\left(\sqrt{t}\right)$	$\searrow$	$s(\beta)$	$\nearrow$	∞

ここで

$$\begin{aligned}
s(\alpha) &= \alpha^2 - (t+1)\alpha + (t^2+t+1) - \frac{t^2+t}{\alpha} + \frac{t^2}{\alpha^2} \\
&= \left(\alpha + \frac{t}{\alpha}\right)^2 - 2t - (t+1)\left(\alpha + \frac{t}{\alpha}\right) + (t^2+t+1) \\
&= \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 2t - (t+1)\frac{t+1}{2} + (t^2+t+1) \\
&= \frac{1}{4}(t^2+2t+1-8t-2t^2-4t-2+4t^2+4t+4) \\
&= \frac{3}{4}(t-1)^2 \\
s\left(\sqrt{t}\right) &= \left(t - \sqrt{t} + 1\right)^2 \\
s(\beta) &= \frac{3}{4}(t-1)^2
\end{aligned}$$

従ってこの場合 $s(t)_{min} = \dfrac{3}{4}(t-1)^2$ である，

(ii) $7 - 4\sqrt{3} \leqq t \leqq 7 + 4\sqrt{3}$ の場合

増減表は次のようになる．

a	(0)		$\sqrt{t}$		∞
$s'(a)$		$-$	0	$+$	
$s(a)$	∞	$\searrow$	$s(\sqrt{t})$	$\nearrow$	∞

ここで

$$s(\sqrt{t}) \quad = \quad \left(t - \sqrt{t} + 1\right)^2$$

従ってこの場合 $s(t)_{min} = \left(t - \sqrt{t} + 1\right)^2$ である，

さて t を固定した場合，(2.1), (2.2) においてあらゆる s に対して $D_f \leqq 0$ が成り立つためには $s = s(t)_{min}$ に対して成り立つことが必要十分である．(放物線の位置関係を考えればわかる．) そこで $s = s(t)_{min}$ に対する成立を示そう．

(i) $0 < t < 7 - 4\sqrt{3},\ 7 + 4\sqrt{3} < t$ の場合
$s = s(t)_{min} = \dfrac{3}{4}(t-1)^2$ を代入して

$$\begin{aligned}
D_f &= (3s+t)^2 - 4(3s-t^2)(3s-1) \\
&= \left(\frac{9}{4}(t-1)^2 + t\right)^2 - 4\left(\frac{9}{4}(t-1)^2 - t^2\right)\left(\frac{9}{4}(t-1)^2 - 1\right) \\
&= -\frac{3}{16}(3t^2 - 18t + 11)(11t^2 - 18t + 3) \\
&= -\frac{99}{16}\left(t - \frac{9+4\sqrt{3}}{3}\right)\left(t - \frac{9-4\sqrt{3}}{3}\right)\left(t - \frac{9+4\sqrt{3}}{11}\right)\left(t - \frac{9-4\sqrt{3}}{11}\right)
\end{aligned}$$

$7 - 4\sqrt{3} < \dfrac{9-4\sqrt{3}}{3} < \dfrac{9-4\sqrt{3}}{11} < \dfrac{9+4\sqrt{3}}{11} < \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3} < 7 - 4\sqrt{3}$ だから，$D_f < 0$ の成り立っていることがわかる．

(ii) $7 - 4\sqrt{3} \leqq t \leqq 7 + 4\sqrt{3}$ の場合
$s = s(t)_{min} = \left(t - \sqrt{t} + 1\right)^2$ を代入する．そのままでは計算しにくいので $t = v^2$ と置き換える．

$$\begin{aligned}
D_f &= (3s+t)^2 - 4\left(3s - t^2\right)(3s-1) \\
&= \left(3\left(v^2 - v + 1\right)^2 + v^2\right)^2 - 4\left(3\left(v^2 - v + 1\right)^2 - v^4\right)\left(3\left(v^2 - v + 1\right)^2 - 1\right) \\
&= -3(v-1)^4\left(5v^4 - 8v^3 + 14v^2 - 8v^3 + 5\right) \\
&= -3(v-1)^4\left\{v^4 + 4v^2(v-1)^2 + 6v^2 + 4(v-1)^2 + 1\right\} \\
&\leqq 0
\end{aligned}$$

以上よりすべて証明された．

補足　$b = \dfrac{t}{a}$ のとき $a + b = a + \dfrac{t}{a} = u$ と置くと s や D_f は $u,\ t$ の関数として表される，そちらの方が次数が低くて少し扱いやすい．$\mathbb{C}(a)$ のリーマン面は $\mathbb{C}(u)$ のリーマン面の二重被覆になっている．