For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2017年9月

―問題と解答―

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 9 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1
次の等式が成り立つような 0 以上の整数 a，b，c，d の組をすべて求めよ

$$2^a 3^b - 1 = 5^c 7^d$$

第 2 章

解答

便宜のため，以下では断りのない限り文字はすべて 0 以上の整数を表すものとする．

§ 1　$a = 0$ の場合

$3^b - 1 = 5^c 7^d$ を解くことになる．$b = 0$ だと解が存在しないので $b \geqq 1$ である．$b = b_1 + 1$ と置く．

$$3^{b_1+1} - 1 = 5^c 7^d$$

(1)　$c = d = 0$ の場合

$3^{b_1+1} - 1 = 1$ となる．明らかに解はない．

(2)　$c > 0$ の場合

$3^{b_1+1} \equiv 1 \pmod 5$ となるが，3 は $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ における原始根なので，$b_1 + 1 \equiv 0 \pmod 4$ である．
$b_1 + 1 = 4b_2 + 4$ と置く．

$$3^{4b_2+4} - 1 = \left(3^{2b_2+2} - 1\right)\left(3^{2b_2+2} + 1\right) = 5^c 7^d$$

ということになるが，$3^{2b_2+2} - 1$, $3^{2b_2+2} + 1$ は両方とも 1 より大きく差が 2 だから，一方が 5 冪で他方が 7 冪である．しかし $3^{2b_2+2} - 1 = (3^{b_2+1} - 1)(3^{b_2+1} + 1)$ だから，5 冪または 7 冪が互いに素な 2 数の積に分解されてしまい矛盾．つまり，この場合の解はない．

(3)　$d > 0$ の場合

$3^{b_1+1} \equiv 1 \pmod 7$ となるが，3 は $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ における原始根なので，$b_1 + 1 \equiv 0 \pmod 6$ である．
$b_1 + 1 = 6b_2 + 6$ と置く．

$$3^{6b_2+6} - 1 = \left(3^{3b_2+3} - 1\right)\left(3^{3b_2+3} + 1\right) = 5^c 7^d$$

ということになるが，$3^{3b_2+3} - 1$, $3^{3b_2+3} + 1$ は両方とも 1 より大きく差が 2 だから，一方が 5 冪で他方が 7 冪である．しかし $3^{3b_2+3} - 1 = (3^{b_2+1} - 1)(3^{2b_2+2} + 3^{b_2+1} + 1)$ だから，5 冪または 7 冪が互いに素な 2 数の積に分解されてしまい矛盾．つまり，この場合の解はない．

以上により $a = 0$ の場合は解がないことがわかった．

§ 2　$b = 0$ の場合

$2^a - 1 = 5^c 7^d$ を解くことになる．$a = 0$ だと解が存在しないので $a \geqq 1$ である．$a = a_1 + 1$ と置く．

$$2^{a_1+1} - 1 = 5^c 7^d$$

(1)　$c = d = 0$ の場合

$2^{a_1+1} - 1 = 1$ となる．$a_1 = 0$ が解である．この場合 $(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$ となる．

(2)　$c>0$ の場合

$2^{a_1+1}\equiv 1 \pmod 5$ となるが，2 は $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ における原始根なので，$a_1+1\equiv 0 \pmod 4$ である．

$a_1+1=4a_2+4$ と置く．

$$2^{4a_2+4}-1=\left(2^{2a_2+2}-1\right)\left(2^{2a_2+2}+1\right)=5^c7^d$$

ということになるが，$2^{2a_2+2}-1,\ 2^{2a_2+2}+1$ は両方とも 1 より大きく差が 2 だから，一方が 5 冪で他方が 7 冪である．しかし $2^{2a_2+2}-1=\left(2^{a_2+1}-1\right)\left(2^{a_2+1}+1\right)$ であり $a_2=0$ は不適なので，5 冪または 7 冪が互いに素な 2 数の積に分解されてしまい矛盾．つまり，この場合の解はない．

(3)　$c=0,\ d>0$ の場合

$2^{a_1+1}\equiv 1 \pmod 7$ となるが，2 は $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ における位数 3 の元なので，$a_1+1\equiv 0 \pmod 3$ である．

$a_1+1=3a_2+3$ と置く．

$$2^{3a_2+3}-1=\left(2^{a_2+1}-1\right)\left(2^{2a_2+2}+2^{a_2+1}+1\right)=5^c7^d$$

ということになる．$2^{a_2+1}-1\equiv 0 \pmod 7$ だと $2^{2a_2+2}+2^{a_2+1}+1\equiv 3 \pmod 7$ となり解がなくなる．従って $2^{a_2+1}-1=1$ しかあり得ない．すると $a_2=0$ となり $2^{2a_2+2}+2^{a_2+1}+1=4+2+1=7$ で解になっていることがわかる．この場合 $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 0,\ 1)$ となる．

以上により $b=0$ の場合の解は，$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 1)$ とわかった．

§ 3　$a>0,\ b>0$ の場合

$a=a_1+1,\ b=b_1+1$ と置く．$2^{a_1+1}3^{b_1+1}-1=5^c7^d$ を解くことになる．

(1)　$c=d=0$ の場合

明らかに解はない．

(2)　$c>0,\ d=0$ の場合

$c=c_1+1$ と置く．$2^{a_1+1}3^{b_1+1}-1=5^{c_1+1}$ を解くことになる．　mod 4 で考えると $a_1=0$ でないといけないことがわかる。従って解くべき方程式は $2\cdot 3^{b_1+1}-1=5^{c_1+1}$ である．

$b_1=c_1=0$ は解になっている．この場合 $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 1,\ 0)$ である．

$b_1\geqq 1$ の解を探そう．　mod 9 で考えると $-1\equiv 5^{c_1+1} \pmod 9$ である．これより $c_1+1\equiv 3 \pmod 6$ がわかる．$c_1+1=6c_2+3$ と置く．代入し直して

$$2\cdot 3^{4b_2+1}=5^{6c_2+3}+1=\left(5^{2c_2+1}+1\right)\left(5^{4c_2+2}-5^{2c_2+1}+1\right)$$

互除法により $\mathrm{gcm}\left(5^{2c_2+1}+1,\ 5^{4c_2+2}-5^{2c_2+1}+1\right)=3$ がわかるから，偶奇も考えて

$$\left(5^{2c_2+1}+1,\ 5^{4c_2+2}-5^{2c_2+1}+1\right)=(2\times 3,\ 3^{4b_2})\ \text{または}\ (2\times 3^{4b_2},\ 3)$$

である．後者はあり得ない．前者の場合 $c_2=0$ だが，このとき $5^{4c_2+2}-5^{2c_2+1}+1=25-5+1=21$ となり，これも不適である．

以上よりこの場合の解は $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 1,\ 0)$ のみであることがわかった．

(3)　$d>0,\ c=0$ の場合

$d=d_1+1$ と置く．$2^{a_1+1}3^{b_1+1}-1=7^{d_1+1}$ を解くことになる．

$2 \equiv 3^2 \pmod 7$ なので，$3^{2a_1+2+b_1+1} - 1 \equiv 0 \pmod 7$ が成り立つ．3 は $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ における原始根なので，$2a_1 + b_1 \equiv 3 \pmod 6$ である．これは $b_1 = 0$ だと解を持たないので $b_1 \geqq 1$ である．$b_1 = b_2 + 1$ と置き $2^{a_1+1}3^{b_2+2} - 1 = 7^{d_1+1}$ を考える．9 を法として

$$8 \equiv 7^{d_1+1} \pmod 9$$

しかし $7^{d_1+1} \pmod 9$ は 1, 4, 7 にしかならないのでこれは解を持たない．

(4)　$c > 0,\ d > 0$ の場合

$c = c_1 + 1,\ d = d_1 + 1$ と置く．$2^{a_1+1}3^{b_1+1} - 1 = 5^{c_1+1}7^{d_1+1}$ を解くことになる．

mod 5 で考えて (2) と同様に $a_1 \equiv b_1 \pmod 4$ を得る．　mod 7 で考えて (3) と同様に $2a_1+b_1 \equiv 3 \pmod 6$ を得る．これらより $a_1,\ b_1$ ともに奇数であることが容易にわかる．

そこで $a_1 + 1 = 2a_2 + 2,\ b_1 + 1 = 2b_2 + 2$ と置き換えると，解くべき方程式は

$$2^{2a_2+2}3^{2b_2+2} - 1 = \left(2^{a_2+1}3^{b_2+1} - 1\right)\left(2^{a_2+1}3^{b_2+1} + 1\right) = 5^{c_1+1}7^{d_1+1}$$

となる．

$2^{a_2+1}3^{b_2+1} - 1$ と $2^{a_2+1}3^{b_2+1} + 1$ の差は 2 だから，$(2^{a_2+1}3^{b_2+1} - 1,\ 2^{a_2+1}3^{b_2+1} + 1)$ は $(5^{c_1+1},\ 7^{d_1+1})$ または $(7^{d_1+1},\ 5^{c_1+1})$ のいずれかである．

(i) $2^{a_2+1}3^{b_2+1} - 1 = 5^{c_1+1}$ の解は (2) より $(a_2,\ b_2,\ c_1) = (0,\ 0,\ 0)$ のみである．この場合 $2^{a_2+1}3^{b_2+1} + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ だから適する．得られた解は $(a,\ b,\ c,\ d) = (2,\ 2,\ 1,\ 1)$.

(ii) $2^{a_2+1}3^{b_2+1} - 1 = 7^{d_1+1}$ の解は (3) より存在しない．

(i), (ii) より $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$ の場合の解は，$(a,\ b,\ c,\ d) = (2,\ 2,\ 1,\ 1)$ のみとわかった．

以上 (1)〜(4) より $a > 0,\ b > 0$ の場合の解は，$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 2,\ 1,\ 1)$ とわかった．

§ 4　結論

$2^a3^b - 1 = 5^c7^d$ の非負整数解 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は次がすべてである．
$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 0,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 2,\ 1,\ 1)$