For Tutors

MeBio　数学テキスト

林先生の初耳講座 2017年7月

―問題と解答―

Edited by kamei

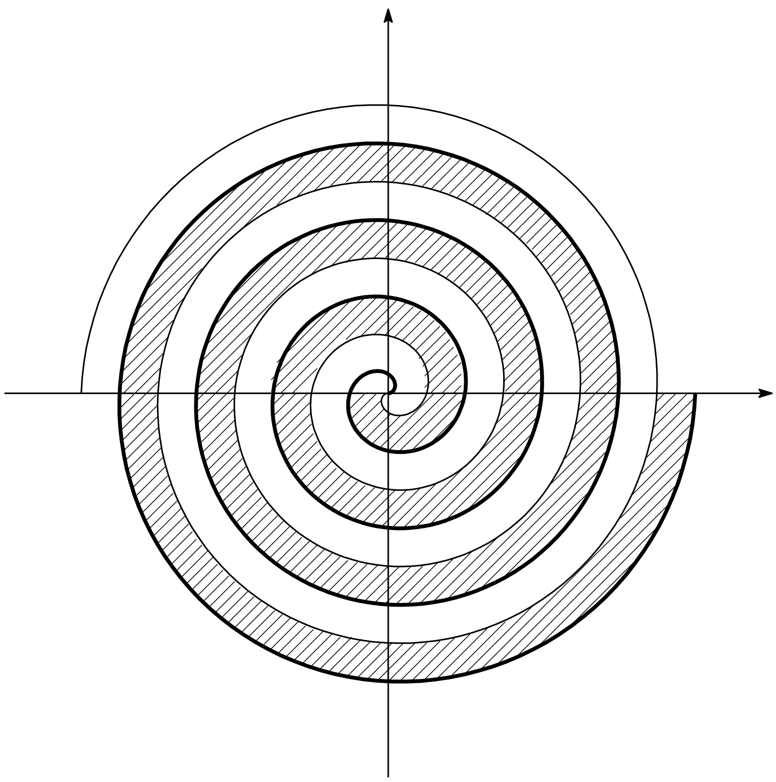
第 1 章

問題

§ 1　問題

「林先生の初耳講座」で次のような問題が出題されていました.

東進の問題 1–1–1　図のような蚊取り線香での長さの中心はどこか．両側から燃やしたときどこで燃え尽きるかということです．**まずは「どのあたり」と感覚で答えてください,**



厳密に考えるのは色々問題とあります．ある程度の誤差を認めて数値的に場所を特定してください.

第 2 章

解答

§ 1　番組で紹介されていた解答

極座標 $(r,\ \theta)$ で考える．中心は無視すると，外周部では蚊取り線香の太さは一定だろうから，θ と r は一次関数の関係にあるだろう．適当に相似変換して $r=\theta$ と思ってよい．実際前ページの太線は $r=\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 8\pi)$ のグラフである．（細線は $r=\theta-\pi$ $(\pi\leqq\theta\leqq 9\pi)$）

従って $x=r\cos\theta=\theta\cos\theta$, $y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$ と表されることになり，蚊取り線香の $0\leqq\theta\leqq\theta$ の部分の長さ $l(\theta)$ は外周で測って

$$
\begin{aligned}
l(\theta) &= \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^\theta \sqrt{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^\theta \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\log\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)
\end{aligned}
$$

ということになる．[1]

$l(8\pi)=2l(\varphi)$ を数値的に解くと $\varphi=5.640\pi$ となり，内側から $1015^\circ=990+25^\circ$ まわったところが中央とわかる．（中心は誤差が大きいので，外側の端点から 425° 戻ったところという方がよいかもしれない.）

§ 2　別解

番組ではこれを「10 秒以内に答えよ」といっていた．上の解答だと何分あろうが数値計算できないだろう．もっと実行可能な概算が必要である．

燃焼した部分の面積で考えると簡単に求められる．前ページの蚊取り線香を 2 本合わせた領域は，ほぼ半径 8π の円と見なしてよいだろう．中心から半分の距離まで燃えた領域の面積はその半分だから，$\dfrac{1}{2}\pi\cdot(8\pi)^2=\pi r^2$ を解くと $r=4\sqrt{2}\pi=5.656\pi$ となる．これは 1018° だから，先程の答と 3° しか違わない.

前 § の積分との比較でいうと，$\sqrt{1+\theta^2}\fallingdotseq\theta$ としたことに相当する，誤差が $O(\log\theta)$ であることは容易にわかる.

§ 3　別解 2

大川内さんが次のように解いてくれました，

[1] 長さは内周と外周の中央で測るのがよいとか，原点付近の太さは一定ではないだろうとかいうのは無視する.

太線部分を, 含まれる象限が切り替わるごとに分割して, 16 個の部分にわかる．全部の長さは $1+2+3+4+\cdots+16=136$ と概算できるので，半分の長さ 68 になるのは $(1+2+3+4+\cdots+11)+2$ であろう．つまり長さ 12 に対応する 4 象限の部分を $\dfrac{2}{12}\times 90^\circ = 15^\circ$ まわったところと考えられる，[2]

これだと小学生でも考えられそうです.

[2] 最初の $1+2$ は内周の細線が存在しないので，面積を感覚的に 1 ぐらいと思って補正すると，

$$\frac{1}{2}(1+3+4+\cdots+16)=67=(1+3+4+\cdots+11)+3$$

で，長さ 12 に対応する 4 象限の部分を $\dfrac{3}{12}\times 90^\circ = 22.5^\circ$ まわったところと考えられる，こちらの方が正解に近いだろう.