For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2017年8月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 8 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1　実数の値を取る関数 f で，すべての実数 x, y に対して

$$f\left(f(x) - xf(y)\right) = 2f(x) - xy$$

を満たすものを求めよ．

第 2 章

解答

§ 1　全射性，特殊値，単射性

与式に番号をつけておく．

$$\forall x,\ \forall y,\ f(f(x)-xf(y))=2f(x)-xy \tag{2.1}$$

(2.1) の x を 0 でない値に固定して y を動かすと，右辺は実数全体を動くので，f は全射とわかる．従って $f(t)=0$ となる実数 t が存在する．(2.1) に $x=t$ を代入する，

$$\forall y,\ f(f(t)-tf(y))=2f(t)-ty \Longrightarrow f(-tf(y))=-ty \tag{2.2}$$

次に $f(s)=-1$ となる実数 s を考える．(2.1) に $y=s$ を代入する，

$$f(-tf(s))=-ts \Longrightarrow f(t)=-ts \Longrightarrow 0=-ts \tag{2.3}$$

これより $t=0$ または $s=0$ がわかる

$t=0$ の場合 $f(0)=0$ ということになる．(2.1) に $y=0$ を代入すると

$$\forall x,\ f(f(x))=2f(x) \tag{2.4}$$

f は全射であったから $f(x)$ 部分を x に置き換えると $\forall x,\ f(x)=2x$ を得る．しかしその場合

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= f(f(x)-xf(y))=f(2x-2xy)=4x-4xy,\\ \text{右辺} &= 2f(x)-xy=4x-xy\end{aligned}$$

となり (2.1) が恒等式でなくなってしまうので矛盾する．従って $t \fallingdotseq 0$ であり $s=0$ である．

$s=0$ の場合 $f(0)=-1$ ということになる．
(2.1) に $x=0$ を代入すると

$$f(f(0)-0\cdot f(y))=2f(0)-0\cdot y \Longrightarrow f(-1)=-2 \tag{2.5}$$

(2.2) に $y=t$ を代入すると

$$f(-tf(t))=-t^2 \Longrightarrow f(0)=-t^2 \Longrightarrow -1=-t^2 \Longrightarrow t=1,\ -1 \tag{2.6}$$

(2.5) より $f(-1)=-2$ であったから $t=-1$ ではあり得ない，従って $t=1$ であり，$f(1)=0$ がわかった．

証明には使わなかったが，次もわかる．

命題 2.1 f は単射である．
証明　$f(a)=f(b)=c$ とする．

$$(2.1) \text{ に } x=a,\ y=1 \text{ を代入すると } f(c-af(1))=2c-a \Longrightarrow f(c)=2c-a,$$
$$(2.1) \text{ に } x=b,\ y=1 \text{ を代入すると } f(c-bf(1))=2c-b \Longrightarrow f(c)=2c-b,$$

これより $a=b$ といえる． □

§ 2　後半

$f(1)=0$, $f(0)=-1$, $f(-1)=-2$ から $f(x)=x-1$ ではないかと予想できる．実際 $f(x)=x-1$ は (2.1) を満たす．そこで次の集合を考えよう．

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=x-1\}$$

命題 2.2 次が成り立つ．

(1) $x\in S,\ y\in S \Longrightarrow -xy+2x-1\in S$

(2) $x\in S \Longrightarrow \pm x+\mathbb{Z}\subset S$

証明

(1) $x\in S,\ y\in S$ とすると (2.1) において

$$f(f(x)-xf(y))=2f(x)-xy \Longrightarrow f(x-1-x(y-1))=2(x-1)-xy \Longrightarrow f(-xy+2x-1)=-xy+2x-2$$

これは $-xy+2x-1\in S$ を意味する．

(2) $y=1\in S$ だから $x\in S \Longrightarrow -xy+2x-1=x-1\in S$．また，$x=1\in S$ だから
$y\in S \Longrightarrow -xy+2x-1=-y+1\in S$．これらより題意が従う．

□

命題 2.3 $x\fallingdotseq 0 \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\in S$

証明 f は全射だから任意の $x\in\mathbb{R}_{\fallingdotseq 0}$ に対し $f(x)-xf(y)=x$ を満たす y が存在する．その $x,\ y$ に対して

$$f(f(x)-xf(y))=2f(x)-xy \Longrightarrow f(x)=2f(x)-xy \Longrightarrow y=\frac{f(x)}{x}$$

これを $f(x)-xf(y)=x$ に代入し直すと $f(x)-xf\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=x \iff f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x}-1$ を得る．これは $\dfrac{f(x)}{x}\in S$ を意味する． □

定理 2.4 $f(x)=x-1$

証明　$x=0$ の場合は成り立っている．$x\fallingdotseq 0$ とする．$y=\dfrac{f(x)}{x}+1$ とおく．命題 2.2, 命題 2.3 より $y\in S$ だから $f(y)=y-1=\dfrac{f(x)}{x}$ である．(2.1) に $y=\dfrac{f(x)}{x}+1$ を代入する．

$$\begin{aligned}
&f(f(x)-xf(y))=2f(x)-xy\\
\Longrightarrow\ &f\left(f(x)-x\cdot\frac{f(x)}{x}\right)=2f(x)-x\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)\\
\Longrightarrow\ &f(0)=2f(x)-f(x)-x\\
\Longrightarrow\ &f(x)=x-1
\end{aligned}$$

逆にこの場合 (2.1) において

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= f(f(x)-xf(y)) = f(x-1-x(y-1)) = x-1-x(y-1)-1 = -xy+2x-2 \\
\text{右辺} &= 2f(x)-xy = 2(x-1)-xy = -xy+2x-2
\end{aligned}$$

より関数方程式は成り立っている．

□

結論　$f(x)=x-1$ である，

§ 3　最初の解法

最初は §1 の後，以下のように要領悪く解いていた．もったいないので残しておく．

$f(1)=0,\ f(0)=-1,\ f(-1)=-2$ から $f(x)=x-1$ ではないかと予想できる．実際 $f(x)=x-1$ は (2.1) を満たす．そこで次の集合を考えよう．

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=x-1\}$$

命題 2.5 次が成り立つ．

(1) $x\in S,\ y\in S \Longrightarrow -xy+2x-1\in S$

(2) $x\in S \Longrightarrow \pm x+\mathbb{Z}\subset S$

(3) $x\in S,\ y\in S \Longrightarrow xy\in S$

(4) $x\fallingdotseq 0 \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\in S$

(5) $x(\fallingdotseq 0)\in S,\ \Longrightarrow \dfrac{1}{x}\in S$

(6) $x\in S,\ y\in S \Longrightarrow x\pm y\in S$

証明

(1) $x\in S,\ y\in S$ とすると (2.1) において

$$f(f(x)-xf(y))=2f(x)-xy \Longrightarrow f(x-1-x(y-1))=2(x-1)-xy \Longrightarrow f(-xy+2x-1)=-xy+2x-2$$

これは $-xy+2x-1\in S$ を意味する．

(2) $y=1\in S$ だから $x\in S\Longrightarrow -xy+2x-1=x-1\in S$．また，$x=1\in S$ だから
$y\in S\Longrightarrow -xy+2x-1=-y+1\in S$．これらより題意が従う．

(3) (2) を使う．$x\in S,\ y\in S\Longrightarrow x\in S,\ y+2\in S\Longrightarrow -x(y+2)+2x-1=-xy-1\in S\Longrightarrow xy\in S$

(4) f は全射だから任意の $x\in\mathbb{R}_{\fallingdotseq 0}$ に対し $f(x)-xf(y)=x$ を満たす y が存在する．その $x,\ y$ に対して

$$f(f(x)-xf(y))=2f(x)-xy \Longrightarrow f(x)=2f(x)-xy \Longrightarrow y=\frac{f(x)}{x}$$

これを $f(x)-xf(y)=x$ に代入し直すと $f(x)-xf\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=x \iff f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x}-1$ を得る．

これは $\dfrac{f(x)}{x}\in S$ を意味する．

(5) $x\in S,\ x\fallingdotseq 0$ とすると (4) より $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}\in S$．すると (2) より $\dfrac{1}{x}\in S$．

(6) $x=0$ の場合は成立している．$y \in S$ も仮定すると (3)(5) より $\dfrac{y}{x} \in S \Longrightarrow 1 \pm \dfrac{y}{x} \in S \Longrightarrow x\left(1 \pm \dfrac{y}{x}\right) \in S$ となって示された．

□

以上より次がわかった．

系 2.6 S は体を成す． □

定理 2.7 $S=\mathbb{R}$ である．

証明　$S \fallingdotseq \mathbb{R}$ とする．$z \in \mathbb{R}-S$ をとる．もちろん $z \fallingdotseq 0$ である．この場合命題 2.5 (4) より $\dfrac{f(z)}{z}=s$ とおくと $s \in S$ であることがわかっている．従って $s+1 \in S$ でもある．(2.1) に $x=z,\ y=s+1$ を代入する．

$$
\begin{aligned}
& f(f(z)-zf(s+1)) = 2f(z)-z(s+1) \\
\Longrightarrow\quad & f(sz-zs) = 2sz-z(s+1) \\
\Longrightarrow\quad & f(0) = sz-z \\
\Longrightarrow\quad & -1 = sz-z \\
\Longrightarrow\quad & z = \frac{1}{1-s}
\end{aligned}
$$

しかしこれは $s \in S,\ z \notin S$ に反している．つまりこのような z は存在せず，$\mathbb{R}-S=\phi$ である． □

以上よりすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x)=x-1$ であることがわかった．

しかし本質は $y=\dfrac{f(x)}{x}+1$ を代入することだけだと後で気付いたわけである．