For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール 2017年7月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 7 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1　どのような正の整数 $a,\ b,\ c$ と 2 以上の整数 n を用いても $a^n + b^n + c^n$ と表せない正の整数が無限個存在することを示せ．

第 2 章

解答

§ 1　最初の発想

指数部分 n に制限はないのだから，　mod　を考えたりすることにより実際に $a^n+b^n+c^n$ の形に表せない数を無限個構成するのは難しいだろう．そういう場合，N 以下で $a^n+b^n+c^n$ の形に表せる自然数の総数が N よりずっと少ないという形で示すことになると思われる．ただし 3 はすべての n に対し $3=1^n+1^n+1^n$ と表されるので，面倒を省くため 3 より大きい数に限定して考えることにする．やってみよう．

$a^n+b^n+c^n$ の形に表せる 3 より大きい自然数の集合を S_0 と置く．

$$S_0=\{m\in\mathbb{N}_{>3}\mid m=a^n+b^n+c^n\ for\ {}^{\exists}a\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}b\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}c\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}n\in\mathbb{N}_{\geqq 2}\}$$

$|\mathbb{N}_{>3}\cap\overline{S_0}|=\infty$ をいえばよい．

N を（十分大きな）自然数とする．S_0 の元で N 以下のものの集合を $S_0(N)$ で表す．

$$S_0(N)=\{m\in S_0\mid 3<m\leqq N\}$$

示したいのは $\displaystyle\lim_{N\to\infty}((N-3)-|S_0(N)|)=\infty$ であるが，$|S_0(N)|$ を評価するのは難しいであろう．そこで m そのものではなく $(a,\ b,\ c)$ の組を考える．この組の数が十分小さいのであれば証明できたことになる．

2 以上の自然数 n と（十分大きな）自然数 N に対し

$$T_n(N)=\{(a,\ b,\ c)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid 3<a^n+b^n+c^n\leqq N\}$$

と置く．$(1,\ 1,\ 1)\notin T_n(N)$ だから $a,\ b,\ c$ のどれかは 2 以上であることに注意しておく．$T_n(N)$ から $S_0(N)$ には $\varphi_n(a,\ b,\ c)=a^n+b^n+c^n$ という自然な写像が存在する．そして

$$\bigcup_{n=2}^{\infty}\varphi_n(T_n(N))=S_0(N)$$

が成り立っている．従って

$$|S_0(N)|\leqq\sum_{n=2}^{\infty}|T_n(N)|$$

右辺は無限和の形をしているが，実際は有限和である．$a,\ b,\ c$ のいずれかは 2 以上だから $2^n\leqq N$ つまり $n\leqq\log_2 N$ でなければ $T_n(N)=\phi$ となるからである．

そこで $2\leqq n\leqq\log_2 N$ をみたす n を固定する．a は $1\leqq a^n\leqq N$ を満たさないといけないから $1\leqq a\leqq N^{\frac{1}{n}}$ で

ある．$b,\ c$ も同様だから $|T_n(N)| \leqq N^{\frac{3}{n}}$ が成り立つ．以上より

$$\begin{aligned}
|S_0(N)| &\leqq \sum_{n=2}^{[\log_2 N]} |T_n(N)| \\
&\leqq \sum_{n=2}^{[\log_2 N]} N^{\frac{3}{n}} \\
&\leqq N^{\frac{3}{2}} + \int_2^{\log_2 N} N^{\frac{3}{x}} dx \\
&= N^{\frac{3}{2}} + \int_{\sqrt{N}}^{2} t^3 \cdot \frac{-\log N}{t(\log t)^2} dt \ ^{*1} \\
&= N^{\frac{3}{2}} + \log N \int_2^{\sqrt{N}} \frac{t^2}{(\log t)^2} dt \\
&\leqq N^{\frac{3}{2}} + \frac{2^2}{(\log 2)^2} + \log N \int_3^{\sqrt{N}} \frac{t^2}{(\log t)^2} dt \ ^{*2} \\
&\leqq N^{\frac{3}{2}} + 9 \log N + \log N \int_3^{\sqrt{N}} t^2 dt \ ^{*3} \\
&= N^{\frac{3}{2}} + 9 \log N + \log N \left[\frac{t^3}{3} \right]_3^{\sqrt{N}} \\
&= N^{\frac{3}{2}} + 9 \log N + \frac{1}{3} N^{\frac{3}{2}} \log N - 9 \log N \\
&= N^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} N^{\frac{3}{2}} \log N
\end{aligned}$$

しかしこれでは $|S_0(N)| < N$ という結論は得られない．そもそも最初の項 $N^{\frac{3}{2}}$ が登場した時点で終わっている．考え直す必要がある．

§ 2　$n = 2,\ 3$ は　mod　で考える

n が素因数 p を持つ場合，$n = pq$ として $a^n + b^n + c^n = (a^q)^p + (b^q)^p + (c^q)^p$ であるから $T_n(N) \subset T_p(N)$ である．従って先程の n としては素数だけを考えればよかったことになる．

$$\bigcup_{2 \leqq p,\ p:prime} \varphi_p(T_p(N)) = S_0(N)$$

先程の評価は粗すぎたので，今回は $p \leqq 3$ の部分と $p \geqq 5$ の部分を分割して，次のように計算してみる．

$$|S_0(N)| \leqq |\varphi_2(T_2(N)) \cup \varphi_3(T_3(N))| + \sum_{5 \leqq p,\ p:prime} |T_p(N))$$

つまり $a^2 + b^2 + c^2$ または $a^3 + b^3 + c^3$ の形で表せる数は $(a,\ b,\ c)$ の組ではなく表される数次体で評価し，5 以上の素数 p に対して $a^p + b^p + c^p$ の形で表せる数は $(a,\ b,\ c)$ の組の数で評価する．それで本当にうまくいくのかやってみよう．

---

*1 $N^{\frac{1}{x}} = t$ つまり $x = \dfrac{\log N}{\log t}$ と置換している．$x : 2 \to \log_2 N \iff t : \sqrt{n} \to 2$ である．

*2 関数 $\dfrac{t^2}{(\log t)^2}$ は $1 < t < e$ で単調減少，$e < t$ で単調増加であり，$\dfrac{2^2}{(\log 2)^2} \fallingdotseq 8.325,\ \dfrac{3^2}{(\log 3)^2} \fallingdotseq 7.457$

*3 $t \geqq 3 \Longrightarrow \log t \geqq 1$ だから分母を無くした方が大きい．

補題 2.1 $a,\ b,\ c$ を自然数とする．

(1) $a^2+b^2+c^2 \not\equiv 7 \pmod 8$

(2) $a^3+b^3+c^3 \not\equiv 4,\ 5 \pmod 9$

証明

(1) $a^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 8$ よりわかる．

(2) $a^3 \equiv 0,\ 1,\ 8 \pmod 9$ よりわかる．

□

補題 2.2 M を自然数とし，$N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot M = 72M$ と置く．N 以下の自然数のうち $a^2+b^2+c^2$ もしくは $a^3+b^3+c^3$ と表されるものは，高々 $70M$ である．つまり

$$|\varphi_2(T_2(N)) \cup \varphi_3(T_3(N))| \leqq 70M-3$$

証明　中国剰余定理より $72M$ 以下の自然数 x のうち $x \equiv 7 \pmod 8$ かつ $x \equiv 4,\ 5 \pmod 9$ を満たすものが $72M \times \dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{9} = 2M$　存在する．これらは $a^2+b^2+c^2$ とも $a^3+b^3+c^3$ とも表せない．従って表される数は（1, 2, 3 は除いて考えるので）高々 $70M-3$ である．

5 以上の素数に関しては前節の方法を使う．

$$\begin{aligned}
& \sum_{5 \leqq p,\ p:prime}^{[\log_2 N]} |T_p(N)| \\
\leqq\ & \sum_{5 \leqq p,\ p:prime}^{[\log_2 N]} N^{\frac{3}{p}} \\
\leqq\ & \sum_{n=5}^{[\log_2 N]} N^{\frac{3}{n}} \\
\leqq\ & N^{\frac{3}{5}} + \int_5^{\log_2 N} N^{\frac{3}{x}} dx \\
=\ & N^{\frac{3}{5}} + \int_{\sqrt[5]{N}}^{2} t^3 \cdot \frac{-\log N}{t(\log t)^2} dt \\
=\ & N^{\frac{3}{5}} + \log N \int_2^{\sqrt[5]{N}} \frac{t^2}{(\log t)^2} dt \\
\leqq\ & N^{\frac{3}{5}} + \frac{2^2}{(\log 2)^2} \log N + \log N \int_3^{\sqrt[5]{N}} \frac{t^2}{(\log t)^2} dt \\
\leqq\ & N^{\frac{3}{5}} + 9 \log N + \log N \int_3^{\sqrt[5]{N}} t^2 dt \\
=\ & N^{\frac{3}{5}} + 9 \log N + \log N \left[\frac{t^3}{3} \right]_3^{\sqrt[5]{N}} \\
=\ & N^{\frac{3}{5}} + 9 \log N + \frac{1}{3} N^{\frac{3}{5}} \log N - 9 \log N \\
=\ & N^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{3} N^{\frac{3}{5}} \log N
\end{aligned}$$

従って $N=72M$ に対し

$$\begin{aligned}
|S_0(N)| &\leqq |\varphi_2(T_2(N)) \cup \varphi_3(T_3(N))| + \sum_{5 \leqq p,\ p:prime} |T_p(N)) \\
&\leqq 70M - 3 + N^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{3} N^{\frac{3}{5}} \log N \\
&= \frac{70}{72} N - 3 + N^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{3} N^{\frac{3}{5}} \log N
\end{aligned}$$

が得られ，$N=72M$ の形の N に限定した場合

$$\lim_{N \to \infty} ((N-3) - |S_0(N)|) \geqq \lim_{N \to \infty} \left(\frac{2}{72} N - N^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{3} N^{\frac{3}{5}} \log N \right) = \infty$$

が証明された．$(N-3) - |S_0(N)|$ は N に関して広義単調増加なのだから，問題は解決したことになる．