For Tutors

MeBio　数学テキスト

# あるシグマ公式の証明

—問題と解答—

*Edited by* kamei

# 第 1 章

# 問題

## § 1　問題

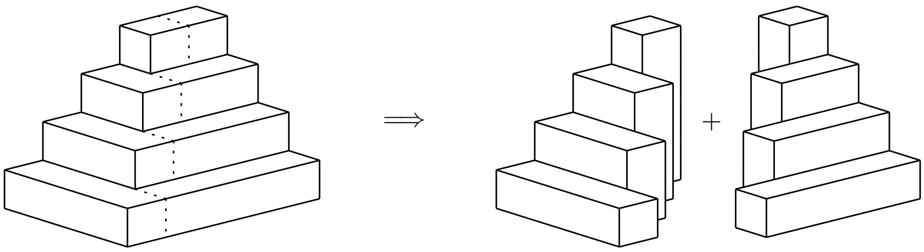
新家さんに次のような問題を出された.

**問題**　$a_1 = 1$ とする. すべての自然数 $n$ に対し $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} a_k a_{n-k}$ を見たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ.　□

答は簡単で, $a_n = n$ である. 類推し, 数学的帰納法で証明すればよい. しかし気になったのは,「どこからこのような問題を発想したかがわからない」と言うことであった.

## § 2　解答 1

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k(n-k)$ を図形的に解釈してみた.



式にすると次のように書くことが出来る.

$$
\begin{aligned}
& f_n(x,\ y,\ z) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n+1-k} \sum_{j=1}^{n-k} x^i y^j z^k \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} (x^1 + x^2 + \cdots + x^{n+1-k})(y^1 + y^2 + \cdots + y^{n-k}) z^k \ \cdots ① \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} x^i y^j (z^1 + z^2 + \cdots + z^{\min\{n+1-i, n-j\}}) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x^i y^j (z^1 + z^2 + \cdots + z^{n+1-i}) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} x^i y^j (z^1 + z^2 + \cdots + z^{n-j}) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} x^i (y^1 + y^2 + \cdots + y^{i-1})(z^1 + z^2 + \cdots + z^{n+1-i}) + \sum_{j=1}^{n-1} (x^1 + x^2 + \cdots + x^j) y^j (z^1 + z^2 + \cdots + z^{n-j}) \ \cdots ②
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} \\
=\ &\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\right\}_{n+1-i\leqq n-j}+\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\right\}_{n+1-i>n-j} \\
=\ &\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\right\}_{j\leqq i-1}+\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\right\}_{j>i-1} \\
=\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j}
\end{aligned}
$$

を使った．この場合前者の和の部分に関しては $\min\{n+1-i, n-j\}=n+1-i$ であり，後者の和の部分に関しては $\min\{n+1-i, n-j\}=n-j$ である．

① を使うと

$$
f_n(1,\ 1,\ 1)=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(n-k)=\sum_{l=1}^{n}l(l+1)\quad (l=n+1-k \text{ と置換})
$$

② を使うと

$$
f_n(1,\ 1,\ 1)=\sum_{i=1}^{n}(i-1)(n+1-i)+\sum_{j=1}^{n-1}j(n-j)=\sum_{il1}^{n}(n-l)l+\sum_{j=1}^{n}j(n-j)
$$

以上により証明できた.