For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール
2017年6月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 6 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1　実数全体で定義され実数値を取る関数 f で，次の条件を満たすものをすべて求めよ．

・任意の実数 x, y に対して $\{f(x+f(y))\}^2 = f(x^2) + f(y^2) + 2xf(y)$ が成り立つ．

第 2 章

解答

§ 1　$f(x^2) = f(x)^2$

式に番号をつけておこう．

$$ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}y \in \mathbb{R},\ \{f(x+f(y))\}^2 = f(x^2) + f(y^2) + 2xf(y) \tag{2.1} $$

(2.1) に $x=-1,\ y=1$ を代入すると

$$ \{f(-1+f(1))\}^2 = f((-1)^2) + f(1^2) + 2(-1)f(1) \tag{2.2} $$

を得るが，これは $f(-1+f(1)) = 0$ を意味する．そこで $a = f(1) - 1$ と置く．$f(a) = 0$ である．

(2.1) に $y = a$ を代入すると

$$ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ \{f(x+f(a))\}^2 = f(x^2) + f(a^2) + 2xf(a) \text{ つまり } \{f(x)\}^2 = f(x^2) + f(a^2) \tag{2.3} $$

を得る．これに $x = a$ を代入すると $f(a)^2 = 2f(a^2)$ となるから，$f(a) = 0$ より $f(a^2) = 0$ である．(2.3) に代入し直すことにより

$$ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x^2) \tag{2.4} $$

がわかる．従って $r \geqq 0$ であれば $f(r) = f(\sqrt{r}^2) = f(\sqrt{r})^2 \geqq 0$ となるから f は $\mathbb{R}_+$ から $\mathbb{R}_+$ への写像である．（ただし $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ と置いた．0 も含む 0 以上の実数の集合である．）

§ 2　$f(0) = 0$

$f(0) = 0$ であることを証明しよう．(2.4) に $x = 0$ を代入すると $f(0)^2 = f(0)$ となるから $f(0) = 0,\ 1$ である．また (2.4) に $x = 1$ を代入すると $f(1)^2 = f(1)$ となるから $f(1) = 0,\ 1$ である．

(i) $f(1) = 1$ の場合．$a = f(1) - 1 = 0$ となるから $f(a) = 0$ に代入して $f(0) = 0$ である．

(ii) $f(1) = 0$ の場合．(2.1) に $x = -1,\ y = 0$ を代入すると

$$ \{f(-1+f(0))\}^2 = f(1) + f(0) - 2f(0) = -f(0) \tag{2.5} $$

しかし $f(0) = 0,\ 1$ であり左辺は非負であるから $f(0) = 0$ しかあり得ない．

以上より $f(0) = 0$ が示された．

この後 f による $\mathbb{R}_+$ の像 $f(\mathbb{R}_+)$ が 0 以外の元を含むか否かで場合分けして考えることにする．

§ 3　$f(\mathbb{R}_+) = \{0\}$ の場合

この場合 ${}^{\forall}x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$ であるが，$x < 0$ の場合も $f(x)^2 = f(x^2) = 0$ であるから $f(x) = 0$ である．つまり $f(x)$ は恒等的に 0 となる関数で，これが解として適することも明らかである．

§ 4　$f(\mathbb{R}_+) \risingdotseq \{0\}$ の場合

この場合 f は $\mathbb{R}_+$ 上で恒等写像である．($\iff {}^\forall x \geqq 0,\ f(x) = x$)　それを示そう，まず次の補題から．

補題 2.1　(1) $c \in f(\mathbb{R}_+)$ なら $f(c) = c$ である．

(2) $c_1,\ c_2 \in f(\mathbb{R}_+)$ なら $c_1 + c_2 \in f(\mathbb{R}_+)$ である．

(3) $c_1,\ c_2 \in f(\mathbb{R}_+)$ なら $|c_1 - c_2| \in f(\mathbb{R}_+)$ である．

証明

(1) $c = f(b)$ とする．(2.1) に $x = 0,\ y = b$ を代入すると

$$f(0 + f(b))^2 = f(0) + f(b^2) \Longrightarrow f(c)^2 = c^2 \Longrightarrow f(c) = c \ \ (\because c \geqq 0,\ f(c) \geqq 0)$$

(2) (2.1) に $x = c_1,\ y = c_2$ を代入する．$f(c_1) = c_1,\ f(c_2) = c_2$ などに注意して

$$\begin{aligned} & f(c_1 + f(c_2))^2 = f({c_1}^2) + f({c_2}^2) + 2c_1 f(c_2) \\ \Longrightarrow\ \ & f(c_1 + c_2)^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 + 2c_1c_2 \\ \Longrightarrow\ \ & f(c_1 + c_2) = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

(3) (2.1) に $x = -c_1,\ y = c_2$ を代入する．$f(c_1) = c_1,\ f(c_2) = c_2$ などに注意して

$$\begin{aligned} & f(-c_1 + f(c_2))^2 = f(-{c_1}^2) + f({c_2}^2) - 2c_1 f(c_2) \\ \Longrightarrow\ \ & f(-c_1 + c_2)^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 - 2c_1c_2 \\ \Longrightarrow\ \ & f(|c_1 - c_2|) = |c_1 - c_2| \end{aligned}$$

□

命題 2.2 $f(\mathbb{R}_+) \risingdotseq \{0\}$ であれば $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ である．

証明　$f(b) = c > 0$ となる $b,\ c \in \mathbb{R}_+$ が存在する．それを固定する．$x \in \mathbb{R}_+$ を任意に取る．(2.1) より

$$\{f(x + f(b))\}^2 = f(x^2) + f(b^2) + 2xf(b) \tag{2.6}$$

補題 2.1 (2) より $f(x^2) + f(b^2) \in f(\mathbb{R}_+)$ である．また $\{f(x + f(b))\}^2 = f((x + f(b))^2) \in f(\mathbb{R}_+)$ だから補題 2.1 (3) より $2xf(b) = f((x + f(b))^2) - \{f(x^2) + f(b^2)\} \in f(\mathbb{R}_+)$ である．($2xf(b) \geqq 0$ であることに注意)
$f(b) = c > 0$ より x としてすべての非負実数を動かすと，$2xf(b)$ はすべての非負実数を動く．□

定理 2.3 $x \geqq 0$ であれば $f(x) = x$

証明　命題 2.2 より $x \geqq 0$ であれば $x \in f(\mathbb{R}_+)$ であり，補題 2.1 (1) より $f(x) = x$．□

これで 0 以上の x に対する $f(x)$ の値は確定した，残ったのは負の実数に対する関数値であるが，これに関しては次の通り．

定理 2.4 $x < 0$ であれば $f(x) = x$ もしくは $f(x) = -x$ であるが，このどちらであるかは各 x ごとに自由に決めてよい．

証明　(2.4) より $f(x)^2 = f(x^2) = x^2$ だから $f(x) = \pm x$ である．これをどちらに決めようが

$$\begin{aligned} f(x+f(y))^2 &= f(x \pm y)^2 = f((x \pm y)^2) = (x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy \\ f(x^2) + f(y^2) + 2xf(y) &= x^2 + y^2 \pm 2xy \qquad \text{（すべて復号同順）} \end{aligned}$$

であるから (2.1) は成り立っている．　□

結論：$f(x)$ は次のいずれかである．

- $f(x) = 0$
- $f(x) = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ \pm x & (x < 0) \quad \text{符号は } x \text{ ごとに任意に決めてよい．} \end{cases}$

§5　楽屋落ち

最初は補題 2.1 に「(4) $c \in f(\mathbb{R}_+)$ なら $\sqrt{c} \in f(\mathbb{R}_+)$ である．」という主張を付け加え，$f(\mathbb{R}_+)$ が $\mathbb{R}_+$ で稠密な部分集合であることを示した．一方

$$x \in \mathbb{R}_+,\ c \in f(\mathbb{R}_+),\ x \geqq c \Longrightarrow f(x) \geqq f(c) = c$$

が容易に証明できるので，実数 x を $f(\mathbb{R}_+)$ の元で下から漸近評価すると $f(x) \geqq x$ がいえる．同様に上からも評価してやろうと思ったが，うまくいかなかった．解法としてはそちらの方が面白かったのだが．

$f(\mathbb{R}_+)$ は本当に $\mathbb{R}_+$ よりも小さい集合かも知れないとも考えた．その場合は有理数体 $\mathbb{Q}$ に二次拡大を無限に繰り返して出来る代数体と $\mathbb{R}$ の共通部分になったりするのではないかと思ったのだが，この体も数学的対象として面白そうである．

第 3 章

類題

類題をネットで探したところ,「関数方程式」藏田力丸（執筆時，灘高校 2 年生） というのが見つかった．(https://nada-mathclub.jimdo.com/app/download/12351718489/2015FE.pdf?t=1491728891)

そこでは解法も含めて関数方程式の考え方が解説されており，なかなか興味深い．そこの練習問題を（答は見ずに）解いてみたのが以下である．（とはいえ後から答を見たら当然ながら解法はほぼ同じにならざるを得ないようである.）

§ 1　IMO 2011 A3

問題 3–1–1　次の条件を満たす実数から実数への関数 $(f,\ g)$ の組を決定せよ．

$$ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}y \in \mathbb{R},\ g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y) \tag{3.1}$$

解答

(3.1) の左辺は $x,\ y$ の対称式であるが，右辺はそうではない．そういう場合，新たな関係式を作ることが出来る．今の場合 $g(f(x+y)) = g(f(y+x))$ より

$$ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}y \in \mathbb{R},\ f(x) + (2x+y)g(y) = f(y) + (2y+x)g(x) \tag{3.2}$$

この $x,\ y$ を入れ換えても新たな関係式は得られないが，$x,\ y,\ z$ の 3 文字でローテーションするとうまくいく場合がある．

$$\begin{aligned} f(x) + (2x+y)g(y) &= f(y) + (2y+x)g(x) \\ f(y) + (2y+z)g(z) &= f(z) + (2z+y)g(y) \\ f(z) + (2z+x)g(x) &= f(x) + (2x+z)g(z) \end{aligned}$$

これら 3 式を足して整理すると次が得られる．

$$ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}y \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}z \in \mathbb{R},\ (x-y)g(z) + (y-z)g(x) + (z-x)g(y) = 0 \tag{3.3}$$

これは $(x,\ g(x)),\ (y,\ g(y)),\ (z,\ g(z))$ が一直線上に並ぶことを意味する．つまり $g(x)$ は一次関数である．（与式をさらに変形して $\dfrac{g(z)-g(x)}{z-x} = \dfrac{g(y)-g(x)}{y-x}$ を導いてもよい．もしくは $g(x) = (g(1)-g(0))x + g(0)$ を導いてもよい.）

ここまで来れば簡単で， $g(x) = px + q$ と置き (3.2) に $y = 0$ を代入すると $f(x) = px^2 - qx + f(0)$ を得る．$f(0) = r$ と置き $f(x) = px^2 - qx + r,\ g(x) = px + q$ を (3.1) に代入しても答が得られるが，(3.1) に先に $y = -2x$ を代入して得られる $g(f(-x)) = f(x)$ に代入する方が容易である．実際

$$
\begin{aligned}
& g(f(-x)) = f(x) \\
\iff & p(px^2+qx+r)+q = px^2-qx+r \\
\iff & p^2 = p,\ pq = -q,\ pr+q = r \\
\iff & (p,\ q,\ r) = (0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ r)
\end{aligned}
$$

これらは確かに解として適する．

答：$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(x)=x^2+r \\ g(x)=x \end{cases}$

§ 2　和田杯 2014

問題 3–2–1

$$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geqq 1}\quad {}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ {}^{\forall}y\in\mathbb{Q},\ f(x)f(x+y) = f(2x+y)+(f(x)-1)f(y) \tag{3.4}$$

解答

(3.4) に $y=-x$ を代入する．

$$ {}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ f(x)f(0) = f(x)+(f(x)-1)f(-x) \tag{3.5}$$

これを移行すると次を得る．

$$ {}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ f(x)(f(0)-1) = (f(x)-1)f(-x) \tag{3.6}$$

(i) **$f(a)=1$ となる $a\in\mathbb{Q}$ が存在する場合**

${}^{\exists}a,\ f(a)=1$ とすると (3.6) に $x=a$ を代入して $f(a)(f(0)-1)=0$ となるが，$f(a)\geqq 1$ であるから $f(0)=1$ となる．それを (3.6) に代入すると ${}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ (f(x)-1)f(-x)=0$ となる．再び $f(-x)\geqq 1$ より ${}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ f(x)=1$ がわかる．これは (3.4) の解として適する．

(ii) **$f(a)=1$ となる $a\in\mathbb{Q}$ が存在しない場合**

${}^{\forall}x,\ f(x)>1$ とする．(3.6) の x を $-x$ に置き換えて

$$ {}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ f(-x)(f(0)-1) = (f(-x)-1)f(x) \tag{3.7}$$

(3.6), (3.7) を辺々書けて $f(x)f(-x)(>1)$ で割ると

$$ {}^{\forall}x\in\mathbb{Q},\ (f(-x)-1)(f(x)-1) = (f(0)-1)^2 \tag{3.8}$$

ここで $f(0)-1=c$ と置こう．$f(0)>1$ より $c>0$ である．そしてこの c を用いて $f(-x)=\dfrac{c^2}{f(x)-1}+1$ となる．これを (3.6) に代入して

$$
\begin{aligned}
& f(x)c = (f(x)-1)\left(\frac{c^2}{f(x)-1}+1\right) \\
\iff & f(x)c = c^2+f(x)-1 \\
\iff & f(x)(c-1) = (c+1)(c-1)
\end{aligned}
$$

$c \fallingdotseq 1$（つまり $f(0) \fallingdotseq 2$）のときは ${}^\forall x,\ f(x) = c+1$ となる．これが解として適することは容易にわかる．そこで以下では $c=1$（つまり $f(0)=2$）の場合を考えよう．

命題 3.1 ある有理数 r に対する関数値が $f(r) = v+1\ (v>0)$ だとする．非負整数 n に対して $f(nr) = v^n+1$ である．

証明　帰納法で示そう．$n=0,\ 1$ の場合は自明である．$n \leqq k$ のときの成立を仮定する．$n=k+1$ の場合の成立を示したい．(3.4) に $x=r,\ y=(k-1)r$ を代入すると

$$\begin{aligned} & f(r)f(kr) = f((k+1)r) + (f(r)-1)f((k-1)r) \\ \iff\quad & (v+1)(v^k+1) = f((k+1)r) + v(v^{k-1}+1) \\ \iff\quad & f((k+1)r) = (v+1)(v^k+1) - v(v^{k-1}+1) = v^{k+1}-1 \end{aligned}$$

これは $n=k+1$ でも成立することを表している．□

定理 3.2 $f(1) = w+1\ (w>0)$ だとする．$q = \dfrac{n}{m}$ に対して $f(q) = w^q+1$ である．

証明　$(f(-q)-1)(f(q)-1) = 1$ であるから $q>0$ の場合のみ示せばよい．命題 2.4 より $f(n)+1 = w^n+1$ である．また, $f(n)+1 = \left(f\left(\dfrac{n}{m}\right)-1\right)^m+1$ でもある．従って $w^n = \left(f\left(\dfrac{n}{m}\right)-1\right)^m$ つまり $f\left(\dfrac{n}{m}\right)-1 = w^{\frac{n}{m}}$ となる．以上により示された．□

ここで得られた $f(x) = w^x+1\ (w>1)$ が解として適することは容易に確かめられる．

答： $f(x) = w^q+1\ (w>1)$ または　$f(x) = c\ (c \geqq 1)$

§ 3　JMO 2012

問題 3–3–1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad {}^\forall x \in \mathbb{R},\ {}^\forall y \in \mathbb{R},\ f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y) \tag{3.9}$$

解答

(3.9) に $y=x$ を代入する．

$${}^\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(2x)f(0)) = x^2 - xf(x) \tag{3.10}$$

また (3.9) に $y=-x$ を代入する．

$${}^\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(0)f(2x)) = x^2 + xf(-x) \tag{3.11}$$

(3.10), (3.11) より $-xf(x) = xf(-x)$ を得る．従って $x \fallingdotseq 0$ なら $f(-x) = -f(x)$ である．そこで $f(0)=0$ を示したい．

$f(0)=a$ と置く．(3.11) に $x=y=0$ を代入して

$$f(f(0)f(0)) = 0^2 - 0f(0) \text{ つまり } f(a^2) = 0 \tag{3.12}$$

今度は (3.11) に $x=0,\ y=a^2$ を代入して

$$f(f(a^2)f(-a^2)) = 0^2 - a^2 f(a^2) \text{ つまり } f(0) = 0 \tag{3.13}$$

すると (3.10) より ${}^\forall x,\ x^2 - xf(x) = 0$ がわかる．これは $x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) = x$ であることを意味するが，$f(0)=0$ でもあったので ${}^\forall x,\ f(x) = x$ である．

§ 4　IMO 2010

問題 3–4–1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}y \in \mathbb{R},\ f([x]y) = f(x)[f(y)] \tag{3.14}$$

解答

(3.14) に $y = 0$ を代入する．

$$^{\forall}x \in \mathbb{R},\ f(0) = f(x)[f(0)] \tag{3.15}$$

(i) $[f(0)] \fallingdotseq 0$ **の場合**.

$f(x) = \dfrac{f(0)}{[f(0)]}$ となるから $f(x) = k$（定数）である．すると (3.15) は $k = k[k]$ となるが，$[f(0)] = [k] \fallingdotseq 0$ より $k \fallingdotseq 0$ がわかるから $[k] = 1$ ということになる．つまり $1 \leqq k < 2$ である．これは解として適する．

(ii) $[f(0)] = 0$ **の場合**.

(3.15) より $f(0) = 0$ である．$0 \leqq^{\exists} a < 1,\ f(a) \fallingdotseq 0$ の場合，(3.14) に $x = a$ を代入すると

$$^{\forall}y \in \mathbb{R},\ f([a]y) = f(a)[f(y)] \tag{3.16}$$

となるが，$[a] = 0,\ f(0) = 0,\ f(a) \fallingdotseq 0$ より $^{\forall}y,\ [f(y)] = 0$ がわかる．これを (3.14) に代入すると

$$^{\forall}x \in \mathbb{R},\ ^{\forall}y \in \mathbb{R},\ f([x]y) = 0 \tag{3.17}$$

$[x]y$ はあらゆる実数値を取り得るので，$^{\forall}x,\ f(x) = 0$ ということになる．

答： $f(x) = 0$ または　$f(x) = k\ (1 \leqq k < 2)$

§ 5　EGMO 2014

問題 3–5–1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}y \in \mathbb{R},\ f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y)) \tag{3.18}$$

解答

(3.18) に $y = -f(x)$ を代入すると

$$^{\forall}x \quad f(2f(x)^2 + 2xf(-f(x))) = 0 \tag{3.19}$$

となる．これは $f^{-1}(0) \fallingdotseq \phi$ を意味する．ここで $f^{-1}(0)$ は一点からなる集合であることを示そう．

$a \fallingdotseq b$ に対し $f(a) = f(b) = 0$ だと仮定する．(3.18) に $(x,\ y) = (a,\ a)$ を代入すると $f(a^2) = a^2$ を, $(x,\ y) = (a,\ b)$ を代入すると $f(b^2) = ab$ を，$(x,\ y) = (b,\ a)$ を代入すると $f(a^2) = ba$ を，$(x,\ y) = (b,\ b)$ を代入すると $f(b^2) = b^2$ を得る．従って $a^2 = ab = b^2$ となるが，これは $a \fallingdotseq b$ に矛盾する．

これより $^{\exists 1}a\ s.t.\ f(a) = 0$ がわかった．(3.19) に $x = a$ を代入すると $f(f(a)^2 + 2af(-f(a)) + f(a)^2) = 0$ つまり $f(2af(0)) = 0$ を得るが，$f^{-1}(0) = \{a\}$ であるから $2af(0) = a$ となる．従って $a = 0$ または $f(0) = \dfrac{1}{2}$ でなければならない．

(i) $a = 0$ **の場合**

$f(0) = 0$ であり $f(x) = 0 \iff x = 0$ である．(3.18) に $x = 0$ を代入すると

$$^{\forall}y \quad f(y^2) = yf(y) \tag{3.20}$$

また (3.19) に $y = 0$ を代入すると

$$^{\forall}x \;\; f(f(x)^2) = xf(x) \tag{3.21}$$

(3.20) に $y = f(x)$ を代入すると

$$^{\forall}x \;\; f(f(x)^2) = f(x)f(f(x)) \tag{3.22}$$

(3.21), (3.22) より $^{\forall}x \;\; f(x)f(f(x)) = xf(x)$ となるが，$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq 0$ であるから $f(f(x)) = x$ となる．$x = 0$ の場合ももちろん $f(f(x)) = x$ であるから f は全単射だとわかる．

また (3.20), (3.21) より $^{\forall}x \;\; f(f(x)^2) = f(x^2)$ となるが，f は単射だから $^{\forall}x \;\; f(x)^2 = x^2$ つまり $^{\forall}x \;\; f(x) = \pm x$ とわかる．

① $^{\exists}b \fallingdotseq 0,\ f(b) = b$ の場合

(3.20) の右辺は $x,\ y$ の対称式だから $^{\forall}x^{\forall}y f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = f(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2)$ が成り立つ．f は単射であるから

$$^{\forall}x^{\forall}y \;\; y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2 \tag{3.23}$$

である，これに $y = b$ を代入すると $b^2 + 2xf(b) + f(x)^2 = x^2 + 2bf(x) + f(b)^2$ が得られるが，$f(b) = b \fallingdotseq 0,\ f(x)^2 = x^2$ より $^{\forall}x \;\; f(x) = x$ となる．これは解として適する，

② $^{\exists}b \fallingdotseq 0,\ f(b) = -b$ の場合

① と同様に $b^2 + 2xf(b) + f(x)^2 = x^2 + 2bf(x) + f(b)^2$ が得られるが，$f(b) = -b \fallingdotseq 0,\ f(x)^2 = x^2$ より $^{\forall}x \;\; f(x) = -x$ となる．これは解として適する，

(ii) $a \fallingdotseq 0$ **の場合**

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ である．(3.23) に $y = 0$ を代入すると $2xf(0) + f(x)^2 = x^2 + f(0)^2$ つまり $f(x)^2 = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$ となるので $f(x) = \pm\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ とわかる．ただし，$f(x)$ は関数として $x - \dfrac{1}{2}$ か $-x + \dfrac{1}{2}$ であるとは限らず，各 x ごとにばらばらに $\pm\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ の値を取るかも知れない．

いずれにせよ $f(x)^2 = x^2 - x + \dfrac{1}{4},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ であるから，(3.23) に $y = \dfrac{1}{2}$ を代入して

$$\frac{1}{4} + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = x^2 + f(x)$$

これより $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$ が得られる．これが解として適することを見るのは容易である．

答： $f(x) = x$ または　$f(x) = -x$ または　$f(x) = \dfrac{1}{2} - x$

§ 6　JMO 2013

問題 3–6–1

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \quad ^{\forall}m \in \mathbb{Z},\ ^{\forall}n \in \mathbb{Z},\ f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn) \tag{3.24}$$

解答

(3.24) に $n = -1$ を代入すると

$$^{\forall}m \in \mathbb{Z},\ f(m) + f(-1) = f(-m) + f(-1) \tag{3.25}$$

となる．つまり $f(-m)=f(m)$ であり，f は偶関数である．

次に (3.24) に $n=1$ を代入すると

$$^{\forall}m\in\mathbb{Z},\ f(m)+f(1)=f(m)+f(2m+1) \tag{3.26}$$

つまり $f(2m+1)=f(1)$ となる．$f(1)=s$ とおくと f はすべての奇数に対して $f(2m+1)=s$ とわかる，

$n\equiv 1 \pmod 2$ とすると $mn+m+n\equiv m+m+1\equiv 1 \pmod 2$ となるから $f(n)=f(mn+m+n+1)=s$ である．これを (3.24) に代入すると

$$^{\forall}m\in\mathbb{Z},\ ^{\forall}n\in 2\mathbb{Z}+1,\ f(mn)=f(m) \tag{3.27}$$

が得られる．従って $f(0)$ および $f(2^k)$ $(k\in\mathbb{N})$ の値を決めればよい．$f(2)=t$ と置く．

(3.24) に $(m,\ n)=(2,\ -2)$ を代入すると $f(2)+f(-2)=f(-4)+f(-4)$ となる．f が偶関数であることより $f(4)=f(2)=t$ となる．

(3.24) に $(m,\ n)=(-2,\ -2)$ を代入すると $f(-2)+f(-2)=f(4)+f(0)$ となる．これより $f(0)=t$ がわかる．

(3.24) に $(m,\ n)=(2^k,\ 2)$ を代入すると $f(2^k)+f(2)=f(2^{k+1})+f(2^{k+1}+2^k+2)$ となる．$k\geqq 2$ であれば $2^{k+1}+2^k+2=2(2^k+2^{k-1}+1)\equiv 2 \pmod 4$ であるから $f(2^{k+1}+2^k+2)=f(2)=t$ となり，$f(2^k)=f(2^{k+1})$ がわかる．従って帰納的に $f(2^k)=t$ が証明される．

以上により $f(m)$ はすべての偶数で同じ値 t, すべての奇数で同じ値 s を取ることがわかった．逆にこの条件だけで (3.24) が満たされることは次のように容易にわかる．

$$\begin{aligned}
(m,\ n)\equiv(0,\ 0) \pmod 2 &\implies (mn,\ mn+m+n)\equiv(0,\ 0) \pmod 2,\\
(m,\ n)\equiv(0,\ 1) \pmod 2 &\implies (mn,\ mn+m+n)\equiv(0,\ 1) \pmod 2,\\
(m,\ n)\equiv(1,\ 0) \pmod 2 &\implies (mn,\ mn+m+n)\equiv(1,\ 0) \pmod 2,\\
(m,\ n)\equiv(1,\ 1) \pmod 2 &\implies (mn,\ mn+m+n)\equiv(1,\ 1) \pmod 2,
\end{aligned}$$

答：$f(m)=\begin{cases} s & m\equiv 1 \pmod 2 \\ t & m\equiv 0 \pmod 2\end{cases}$

§ 7 JMO shortlist 2013

問題 3–7–1

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\quad ^{\forall}m\in\mathbb{N},\ ^{\forall}n\in\mathbb{N},\ m^2+f(n)|\ mf(m)+n \tag{3.28}$$

解答

明らかに

$$^{\forall}m\in\mathbb{N},\ ^{\forall}n\in\mathbb{N},\ m^2+f(n)\leqq mf(m)+n \tag{3.29}$$

が成り立つ．移項すると

$$^{\forall}m\in\mathbb{N},\ ^{\forall}n\in\mathbb{N},\ f(n)-n\leqq m(f(m)-m) \tag{3.30}$$

である．$n=1$ を代入すると $f(1)-1\leqq m(f(m)-m)$ であるが，$f(1)\geqq 1$ なのだから $f(m)-m\geqq 0$ つまり $m\leqq f(m)$ である．

ここで $\min\{m(f(m)-m)\mid m\in\mathbb{N}\}=k$ としよう．$k\geqq 0$ である．(3.24) に代入すると

$$^{\forall}n\in\mathbb{N},\ 0\leqq f(n)-n\leqq k \tag{3.31}$$

さて $^{\exists}m^{\exists}n,\ m^2+f(n)\fallingdotseq\ mf(m)+n$ だとしよう．その場合商は 2 以上だから $2(m^2+f(n))\leqq mf(m)+n$ が成り立つ．$n\leqq f(n),\ f(m)\leqq m+k$ を代入して

$$
\begin{aligned}
& 2(m^2+n) \leqq m(m+k)+n \\
\Longrightarrow\quad & m^2+n \leqq mk \\
\Longrightarrow\quad & m^2 \leqq mk \\
\Longrightarrow\quad & m \leqq k
\end{aligned}
$$

従って $m > k$ であれば $^\forall n,\ m^2+f(n) = mf(m)+n$ ということになる．これを

$$^\forall m > k,\ ^\forall n,\ f(n)-n = m(f(m)-m) \tag{3.32}$$

と書き直すと，左辺 $\leqq k \leqq$ 右辺 となり，$^\forall n,\ f(n)-n=k$ がわかる．これを (3.32) に代入し直すと

$$^\forall m > k,\ k = mk \tag{3.33}$$

となるが，これは $k=0$ を意味する．つまり $^\forall m \in \mathbb{N},\ f(m)=m$ である，これは解として適する．

§ 8　IMO 2012

問題 3–8–1

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \quad {}^\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{Z},\ a+b+c=0,\ f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2 = 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a) \tag{3.34}$$

解答

命題 3.3 次が成り立つ．

(1) $f(0)=0$

(2) $f(-a)=f(a)$

(3) $a+b+c=0$ となる $(a,\ b,\ c)$ に対して $f(a),\ f(b),\ f(c)$ のうちのどれか一つが 0 であれば，残りの 2 つの値は等しい．

(4) $f(2a)=0$ または $f(2a)=4f(a)$

証明

(1) (3.34) に $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ を代入すると $f(0)^2+f(0)^2+f(0)^2 = 2f(0)f(0)+2f(0)f(0)+2f(0)f(0)$ となるから $f(0)=0$ である．

(2) (3.34) に $(a,\ b,\ c)=(a,\ -a,\ 0)$ を代入すると $f(a)^2+f(-a)^2 = 2f(a)f(-a)$ となるから $\{f(a)-f(-a)\}^2=0$ つまり $f(-a)=f(a)$ である．

(3) $f(c)=0$ を (3.34) に代入すると $f(a)^2+f(b)^2=2f(a)f(b)$ となるから $(f(a)-f(b))^2=0$ つまり $f(a)=f(b)$ となる．

(4) $(a,\ b,\ c) = (a,\ a,\ -2a)$ を代入すると $f(a)^2+f(a)^2+f(-2a)^2 = 2f(a)^2+4f(a)f(-2a)$ となるが，$f(-2a)=f(2a)$ を代入して整理すると $f(2a)^2-4f(a)f(2a) = f(2a)(f(2a)-4f(a)) = 0$ となるから $f(2a)=0$ または $f(2a)=4f(a)$ である．

□

(i) $f(1)=0$ **の場合**
命題 3.3 (4) より $f(2)=0$ である．$(a,\ b,\ c)=(-1,\ -k,\ k+1)$ に対して命題 3.3 (2), (3) を適用すると $f(1)=f(k)=0 \Longrightarrow f(k+1)=0$ が得られるから，帰納的に $^\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n)=0$ となる．これは解として適する．

(ii) $f(1)=v \fallingdotseq 0$ **の場合**
命題 3.3 (4) より $f(2)=0,\ 4v$ である．

(ア) $f(1)=v(\fallingdotseq 0),\ f(2)=0$ **の場合**
$\begin{cases} f(2k-1)=v & (k=1,\ 2,\ \cdots) \\ f(2k)=0 & (k=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$ であることを帰納法により証明しよう．$k=1$ の場合はよい．$k \leqq l$ まで成立しているとする．

- $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2l,\ -(2l+1))$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．$f(1)=v,\ f(2l)=0$ だから $f(2l+1)=v$ である．
- $(a,\ b,\ c)=(2,\ 2l,\ -(2l+2))$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．$f(2)=0,\ f(2l)=0$ だから $f(2l+2)=0$ である．

従って $k=l+1$ の場合の成立もいえた．帰納法および命題 3.3 (2) により

$f(n)=\begin{cases} 0 & n:\text{偶数} \\ v & n:\text{奇数} \end{cases}$ となる．これが解として適することは次のようにしてわかる．

$a+b+c=0$ より $a,\ b,\ c$ はすべて偶数か，一つだけが偶数である．

(イ) $f(1)=v(\fallingdotseq 0),\ f(2)=4v$ **の場合**

(3.34) に $(a,\ b,\ c)=(-1,\ -2,\ 3)$ を代入する．$f(-1)=v, f(-2)=4v$ である．$f(3)=x$ とすると，$v^2+16v^2+x^2=8v^2+2vx+8vx$ つまり $x^2-10vx+9v^2=0$ となるから $f(3)=x=v,\ 9v$ である．

① $f(1)=v(\fallingdotseq 0),\ f(2)=4v,\ f(3)=v$ **の場合**
(3.34) に $(a,\ b,\ c)=(-1,\ -3,\ 4)$ を代入する．$f(-1)=v, f(-3)=v$ である．$f(3)=x$ とすると，$v^2+v^2+x^2=2v^2+2vx+2vx$ つまり $x^2-4vx=0$ となるから $f(3)=x=0,\ 4v$ である．

また，(3.34) に $(a,\ b,\ c)=(-2,\ -2,\ 4)$ を代入する．$f(-2)=4v$ である．$16v^2+16v^2+x^2=32v^2+16vx+16vx$ つまり $x^2-16vx=0$ となるから $f(3)=x=0,\ 16v$ である．
両方を満たすことより $f(4)=0$ となる．
この後 $f(n)$ の値は周期 4 で繰り返すことが容易に確認出来る．それを数学的帰納法で示そう．示すべき事実は $\begin{cases} f(4k-3)=v & (k=1,\ 2,\ \cdots) \\ f(4k-2)=4v & (k=1,\ 2,\ \cdots) \\ f(4k-1)=v & (k=1,\ 2,\ \cdots) \\ f(4k)=0 & (k=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$ である．$k=1$ の場合はよい．$k \leqq l$ まで成立しているとする．

- $(a,\ b,\ c)=(1,\ 4l,\ -(4l+1))$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．$f(1)=v,\ f(4l)=0$ だから $f(4l+1)=v$ である．
- $(a,\ b,\ c)=(2,\ 4l,\ -(4l+2))$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．$f(2)=4v,\ f(4l)=0$ だから $f(4l+2)=4v$ である．
- $(a,\ b,\ c)=(3,\ 4l,\ -(4l+3))$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．$f(3)=v,\ f(4l)=0$ だから $f(4l+4)=v$ である．

- $(a,\ b,\ c) = (4,\ 4l,\ -(4l+4))$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．$f(4) = 0,\ f(4l) = 0$ だから $f(4l+4) = 0$ である．

従って $k = l+1$ の場合の成立もいえた．帰納法および命題 3.3 (2) によりすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(n)$ が周期 4 で定まることがわかる．これが解として適することは

$$(a,\ b,\ c) \equiv (0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 3),\ (0,\ 2,\ 2),\ (1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 3,\ 3) \pmod 4$$

に対して (3.34) が成立することを確認すればよい．実際すべて成り立っている．

② $f(1) = v(\fallingdotseq 0),\ f(2) = 4v,\ f(3) = 9v$ **の場合**

少し計算すると $f(n) = n^2 v\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ という予想が立つ．それを帰納法により証明しよう．$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の場合はよい．$n \leqq k$ まで成立しているとする．
$f(k+1) = f(-k-1) = x$ と置く．

- $(a,\ b,\ c) = (1,\ k,\ -k-1)$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．

$$\begin{aligned}
& v^2 + k^4 v^2 + x^2 = 2k^2 v^2 + 2vx + 2k^2 vx \\
\Longrightarrow\quad & x^2 - (2k^2+2)vx + (k^2-1)^2 v^2 = \{x - (k-1)^2 v\}\{x - (k+1)^2 v\} = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x = (k-1)^2 v \text{ または } x = (k+1)^2 v
\end{aligned}$$

- $(a,\ b,\ c) = (2,\ k-1,\ -k-1)$ に命題 3.3 (2), (3) を適用する．

$$\begin{aligned}
& (4v)^2 + \{(k-1)^2 v\}^2 + x^2 = 2\cdot 4v \cdot (k-1)^2 v + 2\cdot 4v\cdot x + 2\cdot (k-1)^2 v \cdot x \\
\Longrightarrow\quad & x^2 - (2k^2 - 4k + 10)vx + \{(k-1)^2 - 4\}v^2 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x^2 - (2k^2 - 4k + 10)vx + (k-3)^2 (k+1)^2 v^2 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \{x - (k-3)^2 v\}\{x - (k+1)^2 v\} = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x = (k-3)^2 v \text{ または } x = (k+1)^2 v
\end{aligned}$$

両方を満たさないといけないから $x = (k+1)^2 v$ である．従って $n = k+1$ の場合の成立もいえた．帰納法および命題 3.3 (2) により $f(n) = n^2 v$ である．

これが解として適することは，(3.34) に $(a,\ b,\ c) = (a,\ b,\ -a-b)$ を代入すればわかる．実際

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a^2 v)^2 + (b^2 v)^2 + \{(a+b)^2 v\}^2 = (2a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + 2b^4)v^2 \\
\text{右辺} &= 2(a^2 v)(b^2 v) + 2(a^2 v)\{(a+b)^2 v\} + 2(b^2 v)\{(a+b)^2 v\} = (2a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + 2b^4)v^2
\end{aligned}$$

答：$f(n)$ は偶関数である．恒等的に $f(n) = 0$ という自明な解を除くと，$f(n) = n^2 v$ (v は 0 以外の実数) という周期を持たない解の他に，周期 4（周期 2）を持つ次の 2 系統の解が存在する．

$$(\cdots,\ f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots) = \begin{cases} (\cdots,\ 0,\ v,\ 0,\ v,\ \cdots) \\ (\cdots,\ 0,\ v,\ 4v,\ v,\ \cdots) \end{cases}$$