For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール２月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題と解答と拡張

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2017 年 2 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1　任意の正の整数 n と正の実数 $x_2,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対し

$$n\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2(x_1+x_2+\cdots+x_k) > M(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$$

が成り立つような実数 M の最大値を求めよ．

§ 2　手がかり

$x_1+x_2+\cdots x_k = y_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ と置く．また $y_0=0,\ y_n=a$ とする．$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=a$ である．これを使うと

$$\begin{aligned} & n\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2(x_1+x_2+\cdots+x_k) > M(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3 \\ \Longleftrightarrow\quad & n\sum_{k=1}^{n} (y_k-y_{k-1})^2 y_k > Ma^3 \end{aligned}$$

この式は大雑把に考えると $n\displaystyle\int_0^a ydy^2 > Ma^3$ のように考えられる．（このままでは色々と意味不明であるが.）この方針で詰めていこう．

§ 3　定式化

$f(x)$ を区間 $[a,\ b]$ における連続関数とする．$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ を区間 $[a,\ b]$ の分割としよう．ここで分割に対し $\Delta=\mathrm{Max}\{x_k-x_{k-1}\}$ と置き，分割を細かくして $\Delta\to 0$ となる極限を考える．Riemann 積分の定義より $I=\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx$ である．

では $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})^2$ は何かと考えてみると，これは 0 である．これは先の積分に収束する数列の各項に，小さい数を掛けたに過ぎない．

そこでもう少しまともな結果が出るように $J = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1})^2$ は何かと考えてみよう．この値は分割の仕方 $\{x_k\}$ に依存するであろう．（従って極限は存在しない．）

例えば $x_k = a + \dfrac{b-a}{n}k$ のように区間を n 等分した場合には，

$$J = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

である．しかしいつでもこのようにはいくわけではない．

§ 4　解答

$f(x)$ を正かつ（狭義）単調増加な関数とする．n 次元ベクトル

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} &= (1,\ 1,\ \cdots,\ 1) \\
\overrightarrow{v} &= \left(\sqrt{f(x_1)}(x_1 - x_0),\ \sqrt{f(x_2)}(x_2 - x_1),\ \cdots,\ \sqrt{f(x_n)}(x_n - x_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

に対してコーシー・シュワルツの不等式 $|\overrightarrow{u}|^2|\overrightarrow{v}|^2 \geqq (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$ を使うと

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^2\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{f(x_k)}(x_k - x_{k-1})\right)^2$$

この等号は $\sqrt{f(x_1)}(x_1 - x_0) = \sqrt{f(x_2)}(x_2 - x_1) = \cdots = \sqrt{f(x_n)}(x_n - x_{n-1})$ のとき成り立つ．これは実現可能である，

$$\begin{aligned}
& (x_1 - x_0) : (x_2 - x_1) : \cdots : (x_n - x_{n-1}) \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{f(x_1)}(x_1 - x_0)} : \frac{1}{\sqrt{f(x_2)}(x_2 - x_1)} : \cdots : \frac{1}{\sqrt{f(x_n)}(x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

とすればよい．

$f(x)$ は単調増加だから数列の和は必ず積分値よりも大きい．従って $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{f(x_k)}(x_k - x_{k-1}) > \int_a^b \sqrt{f(x)}dx$ が成り立ち，$\Delta \to 0$ の場合 $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{f(x_k)}(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b \sqrt{f(x)}dx$ である．

以上より

$$n\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 > \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}dx\right)^2$$

かつ

$$\inf\left\{n\sum_{k=1}^{n} \sqrt{f(x_k)}(x_k - x_{k-1})\right\} = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}dx\right)^2$$

がわかった．

$a = 0,\ b = 1,\ f(x) = x$ とすると問題 1–1–1 の場合になり，$M = \left(\int_0^1 \sqrt{x}dx\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ が答となる．

§ 5　派生したこと

単調増加でない場合は数列が下から積分値に収束してくる部分も持つので，極限を取る前の数列の和に関する大小関係に関しては何も言えなくなる．（極限値に関しては単調性は関係なく同じ評価が得られるだろう．）

$f(x) \geqq 0$ と限らない場合はどうだろうか．これについて考えてみたところ，次の結果が得られた．（正しい？）

命題 1–5–1　$f(x) \geqq 0$ ではない場合，$\inf \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 \right\} = -\infty$ である．

まず次の補題を示しておこう．

補題 1–5–2　区間 $[0,\ 1]$ で $f(x) > 0$ とすると $\sup \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 \right\} = \infty$ である．

証明　$f(x) > 0$ より $f(x) \geqq K$ となる正の定数 K が存在する．$x_k = \sqrt{\dfrac{k}{n}}$ としてみると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 &\geqq \sum_{k=1}^{n} nK \left(\sqrt{\frac{k}{n}} - \sqrt{\frac{k-1}{n}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} K \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)^2 \\
= \quad \sum_{k=1}^{n} K \left(\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \right)^2 &\geqq \sum_{k=1}^{n} K \left(\frac{1}{2\sqrt{k}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{K}{4k}
\end{aligned}
$$

これは $n \to \infty$ のとき無限大に発散する．□

系 1–5–3　区間 $[0,\ 1]$ で $f(x) < 0$ とすると $\inf \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 \right\} = -\infty$ である．

証明　$\inf \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} nf(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 \right\} = \sup \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n(-f(x_k))(x_k - x_{k-1})^2 \right\}$ より明らか．

命題 1–5–1 の証明　$f(x) < 0$ となる部分が開集合として存在するので，それに含まれる閉区間をとり，その区間に関して系 1–5–3 の結果を適用すればよい．□

§ 6　さらに気になったこと

$a < b < c$ とする．区間 $[a,\ b]$ を m 個，$[b,\ c]$ を n 個に分割し，

$$
a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b < x_{m+1} < \cdots x_{m+n-1} < x_{m+n} = c
$$

とする．$f(x)$ が正かつ単調増加とすれば，前節の結果より

$$
\begin{aligned}
m \sum_{k=1}^{m} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 &> \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}dx \right)^2 \\
n \sum_{k=m+1}^{m+n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 &> \left(\int_b^c \sqrt{f(x)}dx \right)^2 \\
(m+n) \sum_{k=1}^{m+n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})^2 &> \left(\int_a^c \sqrt{f(x)}dx \right)^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．しかも右辺はそれぞれ左辺の下界 (inf) になっている．$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}+\sum_{k=m+1}^{m+n}=\sum_{k=1}^{m+n}$ であるから次が成り立つはずである．

$$\frac{1}{m}\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}dx\right)^2+\frac{1}{n}\left(\int_b^c\sqrt{f(x)}dx\right)^2\geqq\frac{1}{m+n}\left(\int_a^c\sqrt{f(x)}dx\right)^2$$

こうなるともう積分は関係なくなり，次のように表現できる．

定理 1–6–1　$p,\ q,\ A,\ B$ が正の実数，$p+q=1$ とすると

$$\frac{1}{p}A^2+\frac{1}{q}B^2\geqq(A+B)^2$$

直接証明

$$\begin{aligned}
&\text{左辺}-\text{右辺}\\
=\ &\frac{1}{p}A^2+\frac{1}{q}B^2-(A+B)^2\\
=\ &\left(\frac{1}{p}-1\right)A^2+\left(\frac{1}{q}-1\right)B^2-2AB\\
=\ &\frac{1-p}{p}A^2+\frac{1-q}{q}B^2-2AB\\
=\ &\frac{q}{p}A^2+\frac{p}{q}B^2-2AB\\
=\ &\left(\sqrt{\frac{q}{p}}A-\sqrt{\frac{p}{q}}B\right)^2\\
\geqq\ &0
\end{aligned}$$

等号は $\sqrt{\dfrac{q}{p}}A-\sqrt{\dfrac{p}{q}}B$ つまり $A:B=p:q$ のとき成立する．□

別解 $f(x)=p\left(x-\dfrac{A}{p}\right)^2+q\left(x-\dfrac{B}{q}\right)^2=(p+q)x^2-2(A+B)x+\dfrac{A^2}{p}+\dfrac{B^2}{q}$ は決して負にならないので判別式に関して

$$\frac{D}{4}=(A+B)^2-\left(\frac{A^2}{p}+\frac{B^2}{q}\right)\leqq0$$

といってもよい．要するにコーシー・シュワルツである．等号条件もこれから出る．□

ということで証明は非常に簡単であるし，等号条件も §4 の結果と一致するのであるが，気になったのは定理 1–6–1 の解釈の仕方である．これほど簡単な式が納得のいく意味を持っていないはずがないと思うのだが，残念ながら今のところ思いつけないでいる．どなたか教えていただけないであろうか.

その後もう少し考えて次の表記を得た．定理 1–6–1 の両辺は $A,\ B$ に関して斉次だから $A+B$ で割り $a=\dfrac{A}{A+B}$, $b=\dfrac{B}{A+B}$ と置き換えることにより，次のように書ける．

「$a,\ b,\ p,\ q$ は正の実数，$a+b=1,\ p+q=1$ のとき $p^{-1}a^2+q^{-1}b^2\geqq1$ が成り立つ.」

さらに指数部分を一般化して次が成り立つことも確認した．

定理 1–6–2　$a,\ b,\ p,\ q$ は正の実数，$a+b=1,\ p+q=1$ とする．

$$\begin{cases} m<-1,\ 0<m \text{ のとき} & p^{-m}a^{m+1}+q^{-m}b^{m+1} \geqq 1 \\ m=0,\ -1 \text{ のとき} & p^{-m}a^{m+1}+q^{-m}b^{m+1} = 1 \\ -1<m<0 \text{ のとき} & p^{-m}a^{m+1}+q^{-m}b^{m+1} \leqq 1 \end{cases}$$

が成り立つ．不等式の等号は $a=p$ かつ $b=q$ のとき成立する．

証明　$m=0,\ -1$ の場合は自明である．以下 $m \fallingdotseq 0,\ -1$ とする．

$$f(p)=p^{-m}a^{m+1}+q^{-m}b^{m+1}=p^{-m}a^{m+1}+(1-p)^{-m}(1-a)^{m+1}$$

と置く．

$$\begin{aligned} f'(p) &= -mp^{-m-1}a^{m+1}+m(1-p)^{-m-1}(1-a)^{m+1} \\ &= m\left\{\left(\frac{1-a}{1-p}\right)^{m+1}-\left(\frac{a}{p}\right)^{m+1}\right\} \end{aligned}$$

$m>0$ の場合増減表は次のようになる．

p	(0)		a		(1)
$f'(p)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(p)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

従って証明された．$m<-1,\ -1<m<0$ の場合も同様にして証明される．　□

定理 1–6–2 で $a,\ b,\ p,\ q$ をそれぞれ $a^2,\ b^2,\ p^2,\ q^2$ で置き換えると，条件が $a^2+b^2=1,\ p^2+q^2=1$ となるので，$\overrightarrow{v}=(a,\ b),\ \overrightarrow{u}=(p,\ q)$ を単位ベクトルとして考える方針があるのかも知れない．

変数を増やす一般化も可能であることに気付いた．

定理 1–6–3　$a_1,\ \cdots a_n,\ p_1,\ \cdots p_n$ は正の実数，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=1,\ \sum_{k=1}^{n} p_k=1$ とする．

$$\begin{cases} m<-1,\ 0<m \text{ のとき} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {p_k}^{-m}{a_k}^{m+1} \geqq 1 \\ m=0,\ -1 \text{ のとき} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {p_k}^{-m}{a_k}^{m+1} = 1 \\ -1<m<0 \text{ のとき} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {p_k}^{-m}{a_k}^{m+1} \leqq 1 \end{cases}$$

が成り立つ．不等式の等号は $a_k=p_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき成立する．

証明　他もまったく同様だから，$m>0,\ n=3$ のときを証明しよう．$p+q+r=1,\ a+b+c=1$ とする．$n=2$ の場合の成立より

$$p^{-m}a^{m+1}+(q+r)^{-m}(b+c)^{m+1} \geqq 1$$

および

$$\left(\frac{q}{q+r}\right)^{-m}\left(\frac{b}{b+c}\right)^{m+1}+\left(\frac{r}{q+r}\right)^{-m}\left(\frac{c}{b+c}\right)^{m+1}\geqq 1$$

が成り立つ．後者は

$$q^{-m}b^{m+1}+r^{-m}c^{m+1}\geqq (q+r)^{-m}(b+c)^{m+1}$$

と変形されるから，定理は成り立つ．□

この証明からすると和が 1 になる条件をなくした方がよいのかも知れない．その場合は次となる．

定理 1–6–4　$a_1,\ \cdots a_n,\ p_1,\ \cdots p_n$ は正の実数とする．

$$\begin{cases} m<-1,\ 0<m \text{ のとき} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}{p_k}^{-m}{a_k}^{m+1}\geqq\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^{-m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{m+1} \\ m=0,\ -1 \text{ のとき} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}{p_k}^{-m}{a_k}^{m+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^{-m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{m+1} \\ -1<m<0 \text{ のとき} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}{p_k}^{-m}{a_k}^{m+1}\leqq\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^{-m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{m+1} \end{cases}$$

が成り立つ．不等式の等号は $a_k=p_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき成立する．□

変数を複素数に置き換えると次が得られる．（Bohr の不等式と呼ばれるらしい．）

定理 1–6–5　$z_1,\ \cdots,\ z_n$ を複素数，$p_1,\ \cdots p_n$ は正の実数とする．

$$\sum_{k=1}^{n}{p_k}^{-1}|z_k|^2\geqq\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^2$$

□

この形の場合，指数の条件を緩めることが出来る．

定理 1–6–6　$z_1,\ \cdots,\ z_n$ を複素数，$p_1,\ \cdots p_n$ は正の実数とする．$0<n\leqq 2$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n}{p_k}^{-1}|z_k|^n\geqq\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^n$$

□

複素数に拡張するのではなく $p,\ q$ と $a,\ b$ の対称性を保ちながら指数部分の自由度を上げることが出来た．結果は次の通りである．

定理 1–6–7　$p,\ q,\ a,\ b$ 正の実数，$p+q=1,\ a+b=1$ とする．$f(p)=p^ma^n+q^mb^n=p^ma^n+(1-p)^m(1-a)^n$ とおく．

(1)　$(m,\ n)=(0,\ 0)$ の場合 $f(p)=2$ である．

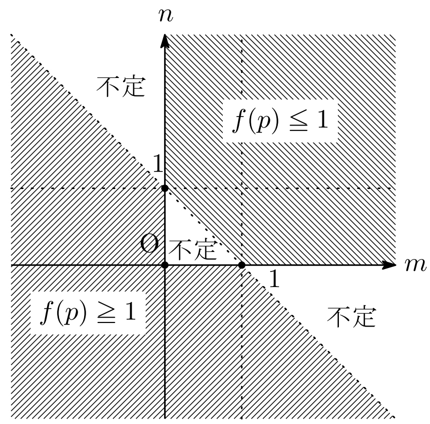
(2)　$(m,\ n)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$ の場合 $f(p)=1$ である．

(3)　（$m \leqq 0$ または $n \leqq 0$）かつ $m+n \leqq 1$ の場合 $f(p) \geqq 1$ である.

(4)　$m \geqq 0$ かつ $n \geqq 0$ かつ $m+n \geqq 1$ の場合 $f(p) \leqq 1$ である.

(5)　それ以外の $(m,\ n)$ の場合 $f(p)$ と 1 の大小関係は決定できない.

(6)　$(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ 以外の (3), (4) の等号は $m+n=1$ かつ $p=a$ ($\iff q=b$) のときのみ成立する.



証明

(i)　$m=0$ の場合

$$f(p)=a^n+(1-a)^n \text{ であるから} \begin{cases} n<0 & \text{のとき} \quad f(p)>2 \\ n=0 & \text{のとき} \quad f(p)=2 \\ 0<n<1 & \text{のとき} \quad 1<f(p)<2 \\ n=1 & \text{のとき} \quad f(p)=1 \\ 1<n & \text{のとき} \quad 0<f(p)<1 \end{cases}$$

(ii)　$m>1$ の場合

$f'(p)=mp^{m-1}a^n-m(1-p)^m(1-a)^n=m\{p^{m-1}a^n-(1-p)^m(1-a)^n\}$ であり

$$\begin{aligned} & f'(p)=0 \\ \iff\ & p^{m-1}a^n=(1-p)^m(1-a)^n \\ \iff\ & pa^{\frac{n}{m-1}}=(1-p)(1-a)^{\frac{n}{m-1}} \\ \iff\ & p=\frac{(1-a)^{\frac{n}{m-1}}}{a^{\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{\frac{n}{m-1}}}=\frac{a^{-\frac{n}{m-1}}}{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}} \text{（}=\alpha \text{ と置く）} \end{aligned}$$

増減表は

p	(0)		α		(1)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$	$(1-a)^n$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	a^n

ここで

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left\{\frac{a^{-\frac{n}{m-1}}}{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}}\right\}^m a^n+\left\{\frac{(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}}{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}}\right\}^m (1-a)^n \\ &= \frac{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}}{\left\{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^m} \\ &= \left\{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^{1-m} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
& f(p) \geqq 1 \\
\iff\ & f(\alpha) \geqq 1 \\
\iff\ & \left\{a^{-\frac{n}{m-1}} + (1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^{1-m} \geqq 1 \\
\iff\ & a^{-\frac{n}{m-1}} + (1-a)^{-\frac{n}{m-1}} \leqq 1 \\
\iff\ & -\frac{n}{m-1} \geqq 1 \\
\iff\ & -n \geqq m-1 \\
\iff\ & 1 \geqq m+n
\end{aligned}$$

$f(p)=1$ となるのは $m+n=1$ かつ $p=\alpha$ のときであるが，このとき $\alpha=a$ となるので，$p=a(\iff q=b)$ のときといってよい．

また

$$\begin{aligned}
& f(p) < 1 \\
\iff\ & f(0) \leqq 1 \text{ かつ } f(1) \leqq 1 \\
\iff\ & (1-a)^n \leqq 1 \text{ かつ } a^n \leqq 1 \\
\iff\ & n \geqq 0
\end{aligned}$$

しかし $f(p)=1$ は成立しない．

(iv)　$m=1$ の場合

$f(p) = pa^n + (1-p)(1-a)^n$ は 1 次関数であり，$f(0)=(1-a)^n$, $f(1)=a^n$ であるから

$$\begin{cases} n<0 & \text{のとき}\quad f(p)>1 \\ n=0 & \text{のとき}\quad f(p)=1 \\ n>0 & \text{のとき}\quad f(p)<1 \end{cases}$$

(v)　$0<m<1$ の場合

(ii) と同様 $\alpha = \dfrac{a^{-\frac{n}{m-1}}}{a^{-\frac{n}{m-1}} + (1-a)^{-\frac{n}{m-1}}}$, $f(\alpha) = \left\{a^{-\frac{n}{m-1}} + (1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^{1-m}$ に対して，

p	(0)		α		(1)
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$(1-a)^n$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	a^n

従って

$$\begin{aligned}
& f(p) \leqq 1 \\
\iff\ & f(\alpha) \leqq 1 \\
\iff\ & \left\{a^{-\frac{n}{m-1}} + (1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^{1-m} \leqq 1 \\
\iff\ & a^{-\frac{n}{m-1}} + (1-a)^{-\frac{n}{m-1}} \leqq 1 \\
\iff\ & -\frac{n}{m-1} \geqq 1 \\
\iff\ & -n \leqq m-1 \\
\iff\ & 1 \leqq m+n
\end{aligned}$$

やはり等号は $p=a(\iff q=b)$ のときである．また

$$\begin{aligned} & f(p)>1 \\ \iff\ & f(0)\geqq 1 \text{ かつ } f(1)\geqq 1 \\ \iff\ & (1-a)^n\geqq 1 \text{ かつ } a^n\geqq 1 \\ \iff\ & n\leqq 0 \end{aligned}$$

$f(p)=1$ は成立しない．

(vi)　$0<m<1$ の場合

(ii) と同様 $\alpha=\dfrac{a^{-\frac{n}{m-1}}}{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}}$, $f(\alpha)=\left\{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^{1-m}$ に対して，

p	(0)		α		(1)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

従って

$$\begin{aligned} & f(p)\geqq 1 \\ \iff\ & f(\alpha)\geqq 1 \\ \iff\ & \left\{a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\right\}^{1-m}\geqq 1 \\ \iff\ & a^{-\frac{n}{m-1}}+(1-a)^{-\frac{n}{m-1}}\geqq 1 \\ \iff\ & -\frac{n}{m-1}\leqq 1 \\ \iff\ & -n\geqq m-1 \\ \iff\ & 1\geqq m+n \end{aligned}$$

しかし境界値が ∞ なので $f(p)\leqq 1$ となることはない．

□

定理 1–6–7 の変数を増やすと次のようになる．証明も定理 1–6–3 と同様に，2 変数での成立を繰り返し使ってやればよい．

定理 1–6–8　$a_1,\ \cdots a_n,\ p_1,\ \cdots p_n$ は正の実数，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=1,\ \sum_{k=1}^{n}p_k=1$ とする．$F=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{p_k}^l{a_k}^m$ とおく．

(1)　$(l,\ m)=(0,\ 0)$ の場合 $F=n$ である．

(2)　$(l,\ m)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$ の場合 $F=1$ である．

(3)　（$l\leqq 0$ または $m\leqq 0$）かつ $l+m\leqq 1$ の場合 $F\geqq 1$ である．

(4)　$l\geqq 0$ かつ $m\geqq 0$ かつ $l+m\geqq 1$ の場合 $F\leqq 1$ である．

(5)　それ以外の $(l,\ m)$ の場合 F と 1 の大小関係は決定できない．

(6)　$(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ 以外の (3), (4) の等号は $m+n=1$ かつ $p_k=a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のときのみ成立する．

□

斉次型で述べることも出来る．

定理 1–6–9　$a_1,\ \cdots a_n,\ p_1,\ \cdots p_n$ は正の実数とする．$F=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{p_k}^l{a_k}^m,\ G=\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^l\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^m$ とおく．

(1)　$(l,\ m)=(0,\ 0)$ の場合 $F=n$ である．

(2)　$(l,\ m)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$ の場合 $F=G$ である．

(3)　（$l\leqq 0$ または $m\leqq 0$）かつ $l+m\leqq 1$ の場合 $F\geqq G$ である．

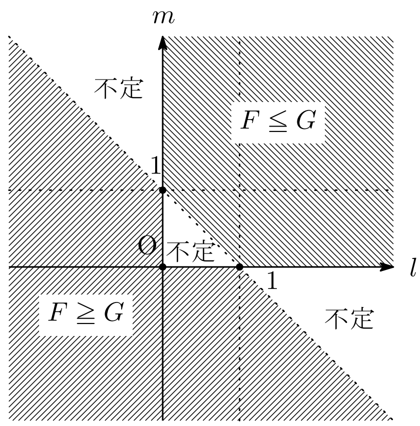
(4)　$l\geqq 0$ かつ $m\geqq 0$ かつ $l+m\geqq 1$ の場合 $F\leqq G$ である．

(5)　それ以外の $(l,\ m)$ の場合 F と G の大小関係は決定できない．

(6)　$(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ 以外の (3), (4) の等号は $m+n=1$ かつ $p_k=a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のときのみ成立する．

□

見やすさのためもう一度図をあげておく．



今までの定理は

1–6–3 は 1–6–8 の $l+m=1$ の場合（1–6–2 はその 2 変数の場合），
1–6–4 は 1–6–9 の $l+m=1$ の場合，
1–6–5 は 1–6–8 の $(l,\ m)=(-1,\ 2)$，2 変数の場合，
1–6–6 は 1–6–8 の $l=-1,\ 0<m\leqq 2$，2 変数の場合

ということになっている．