For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール 12 月

—問題と解答—

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

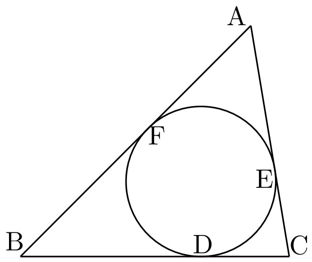
東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2016 年 12 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

鋭角三角形 ABC の 3 つの傍接円のうち，辺 BC, CA, AB に接点を持つものをそれぞれ $w_{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{B}}, w_{\mathrm{C}}$ とする．ここで
$w_{\mathrm{B}}, w_{\mathrm{C}}$ の共通外接線のうち三角形 ABC の辺ではないものを ℓ_{A},
$w_{\mathrm{C}}, w_{\mathrm{A}}$ の共通外接線のうち三角形 ABC の辺ではないものを ℓ_{B},
$w_{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{B}}$ の共通外接線のうち三角形 ABC の辺ではないものを ℓ_{C} とおく．
これら三直線の内接円が $\ell_{\mathrm{A}}, \ell_{\mathrm{B}}, \ell_{\mathrm{C}}$ と接する点をそれぞれ $\mathrm{P_A}, \mathrm{P_B}, \mathrm{P_C}$ とするとき，三直線 $\mathrm{AP_A}, \mathrm{BP_B}, \mathrm{CP_C}$ は一点で交わることを示せ.

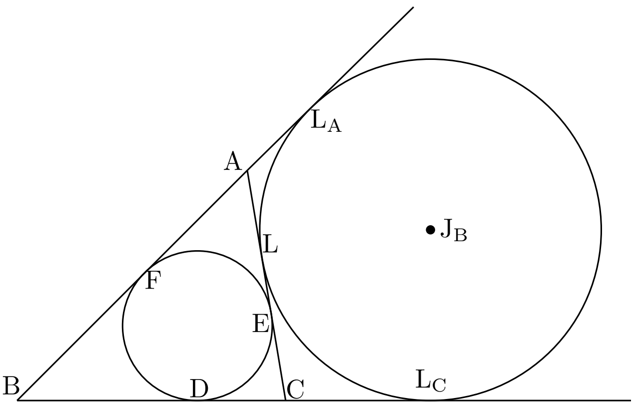
§ 2　解答

三辺の長さを $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$ と置く．簡単のため $c > a > b$ とするが，他も場合も同様に出来る．三角形 ABC の内接円と辺 BC, CA, AB の接点を D, E, F と置く．



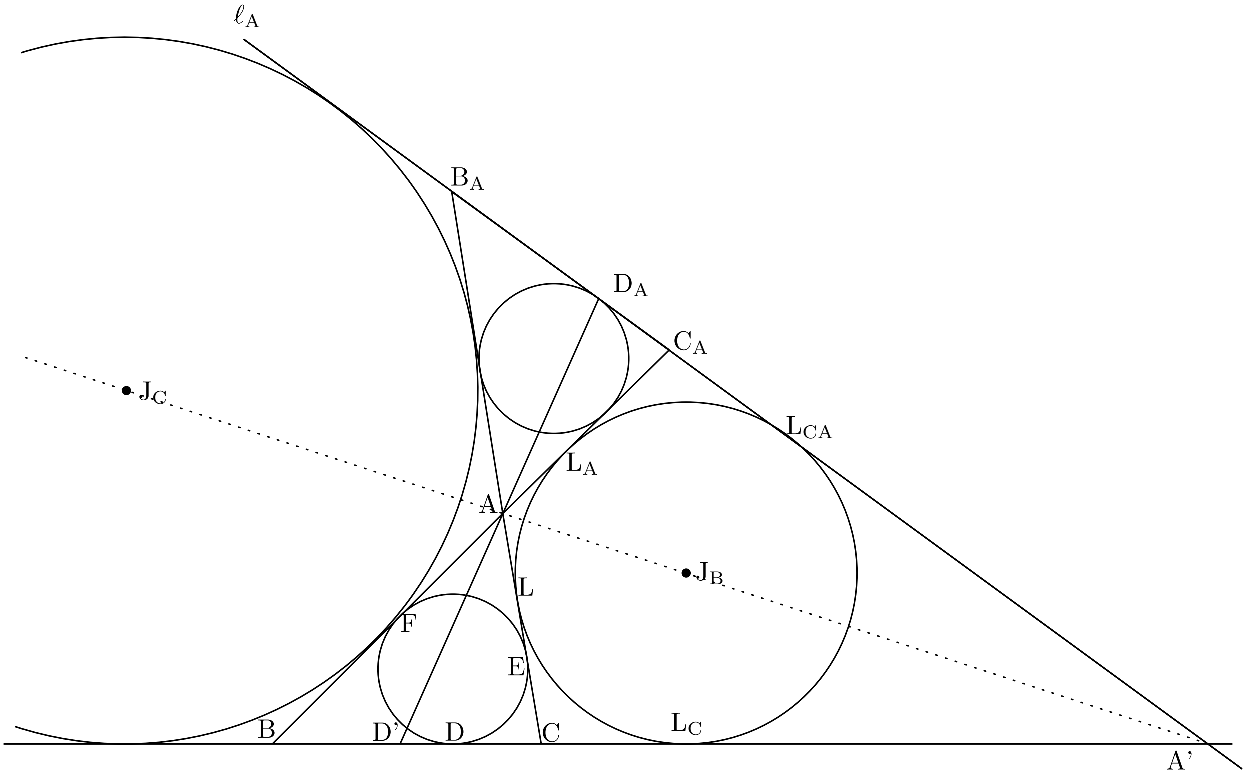
$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = x$, $\mathrm{BD} = \mathrm{BF} = y$, $\mathrm{CD} = \mathrm{CE} = z$ と置く．$x = \dfrac{-a+b+c}{2}$, $y = \dfrac{a-b+c}{2}$, $z = \dfrac{a+b-c}{2}$ であることは容易にわかる．

次に三角形 ABC の傍接円 w_{B} と辺 BC, CA, AB の接点を $\mathrm{L_C}$, L, $\mathrm{L_A}$ と置く．



$\mathrm{AL} = \mathrm{AL_A} = z = \dfrac{a+b-c}{2}$, $\mathrm{CL} = \mathrm{CL_C} = x = \dfrac{-a+b+c}{2}$ であることは容易にわかる．

傍接円 $w_\mathrm{A}, w_\mathrm{B}, w_\mathrm{C}$ の中心を $\mathrm{J_A}, \mathrm{J_B}, \mathrm{J_C}$ とする．ℓ_A は直線 BC を直線 $\mathrm{J_CAJ_B}$ に関して対称変換したものだから，ℓ_A, BC, $\mathrm{J_CAJ_B}$ は一点で交わる．その点を $\mathrm{A'}$ と置く．



直線 $\mathrm{J_CAJ_BA'}$ に関する B, D, C, $\mathrm{L_C}$ の対称点を $\mathrm{B_A}, \mathrm{D_A}, \mathrm{C_A}, \mathrm{L_{CA}}$ とすると，$\mathrm{B_AD_A} = \mathrm{BD} = y = \dfrac{a-b+c}{2}$, $\mathrm{D_AC_A} = \mathrm{DC} = z = \dfrac{a+b-c}{2}$, $\mathrm{C_AL_{CA}} = \mathrm{CL_C} = x = \dfrac{-a+b+c}{2}$ が成り立っている．

後で必要となるので $\mathrm{A'C_A}(=\mathrm{A'C})$ の長さを求めておこう．$\mathrm{A'C_A}(=\mathrm{A'C}) = p$ と置く．三角形 $\mathrm{A'B_AC}$ と直線 $\mathrm{BAC_A}$ に関するメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{A'C_A}}{\mathrm{C_AB_A}} \times \frac{\mathrm{B_AA}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BA'}} = 1$$

$$\iff \quad \frac{p}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{a+p} = 1 \iff cp = ab + bp \iff p = \frac{ab}{c-b}$$

（別解）　次のように解くことも出来る．直線 BC と ℓ_{A} のなす角は $C-B$ なので，

$$p = \mathrm{AC_A}\sin\frac{\pi - A}{2}\times\frac{1}{\sin\dfrac{C-B}{2}} = b\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{C-B}{2}} = b\frac{\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{C-B}{2}} = b\frac{\sin A}{\sin C - \sin B} = \frac{ba}{c-b}$$

別解終わり □

さらに直線 $\mathrm{D_AA}$ と辺 BC の交点を $\mathrm{D'}$ と置こう．$\mathrm{CD'} = r$ とすると，三角形 $\mathrm{A'B_AC}$ と直線 $\mathrm{D_AAD'}$ に関するメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{A'D_A}}{\mathrm{D_AB_A}}\times\frac{\mathrm{B_AA}}{\mathrm{AC}}\times\frac{\mathrm{CD'}}{\mathrm{D'A'}} = 1 \\
\iff\quad & \frac{p+z}{y}\times\frac{c}{b}\times\frac{r}{r+p} = 1 \\
\iff\quad & (cp+cz)r = byr + bpy \\
\iff\quad & r = \frac{bpy}{cp+cz-by}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\text{分母} &= cp + cz - by \\
&= c\frac{ab}{c-b} + c\frac{a+b-c}{2} - b\frac{a-b+c}{2} \\
&= \frac{1}{2(c-b)}\left\{2abc + (c-b)(ac+bc-c^2) - (c-b)(ab-b^2+bc)\right\} \\
&= \frac{-b^3 - c^3 + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2}{2(c-b)} \\
\text{分子} &= bpy \\
&= b\times\frac{ab}{c-b}\times\frac{a-b+c}{2} \\
&= \frac{a(ab^2 - b^3 + b^2c)}{2(c-b)}
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\dfrac{a(ab^2-b^3+b^2c)}{2(c-b)}}{\dfrac{-b^3-c^3+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2}{2(c-b)}} \\
&= \frac{ab^2(a-b+c)}{-b^3-c^3+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2} \\
\mathrm{BD'} &= a - r \\
&= \frac{ac^2(a+b-c)}{-b^3-c^3+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2}
\end{aligned}$$

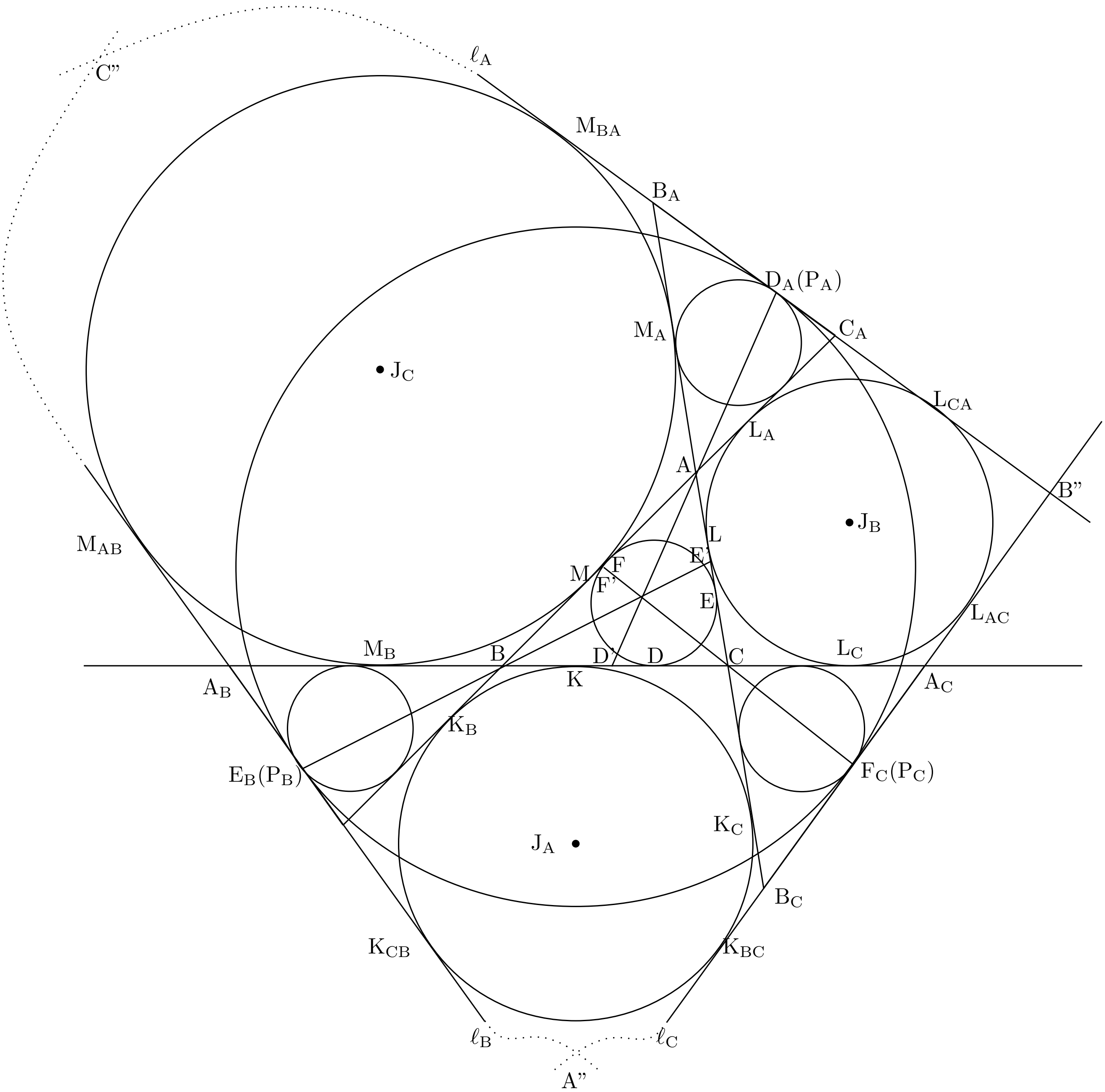
以上のことを ABC の各傍接円に適用する．図では点線で書いてあるが，直線 ℓ_{A}, ℓ_{B} の交点を $\mathrm{C''}$, ℓ_{B}, ℓ_{C} の交点を $\mathrm{A''}$ と置いている．

補題 1–2–1　$\mathrm{P_A}$ は $\mathrm{D_A}$ に一致する．

証明　三角形 $\mathrm{A''B''C''}$ において

$$\begin{aligned} \mathrm{B''D_A} &= \mathrm{B''L_{CA}} + \mathrm{L_{CA}C_A} + \mathrm{C_AD_A} \\ &= \mathrm{B''L_{CA}} + x + z \\ \mathrm{B''F_C} &= \mathrm{B''L_{AC}} + \mathrm{L_{AC}A_C} + \mathrm{A_CF_C} \\ &= \mathrm{B''L_{AC}} + z + x \end{aligned}$$

従って $\mathrm{B''D_A} = \mathrm{B''F_C}$ が成り立つ．$\mathrm{C''E_B} = \mathrm{C''D_A}$, $\mathrm{A''F_C} = \mathrm{A''E_B}$ も同様である．これは $\mathrm{D_A}$, $\mathrm{E_B}$, $\mathrm{F_C}$ が三角形 $\mathrm{A''B''C''}$ の内接円の各辺への接点であることを意味する．つまり $\mathrm{P_A}$, $\mathrm{P_B}$, $\mathrm{P_C}$ に一致する．□



問題の証明 1–2–2　直線 $\mathrm{E_BB(P_BB)}$ と辺 AC の交点を E′, 直線 $\mathrm{F_CC(P_CC)}$ と辺 AC の交点を F′ と置こう．問題の主張は AD′, BE′, CF′ が一点で交わるということであるが，これはチェバの定理の逆により容易に証

明できる．先程 $\mathrm{BD}' = \dfrac{ac^2(a+b-c)}{-b^3-c^3+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2}$, $\mathrm{D}'\mathrm{C} = \dfrac{ab^2(a-b+c)}{-b^3-c^3+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2}$ （従って $\mathrm{BD}' : \mathrm{D}'\mathrm{C} = c^2(a+b-c) : b^2(a-b+c)$）を求めたのと同様に，他の長さ（および比）も求めることが出来，それを使うと

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{AF}'}{\mathrm{F}'\mathrm{B}} \times \frac{\mathrm{BD}'}{\mathrm{D}'\mathrm{C}} \times \frac{\mathrm{CE}'}{\mathrm{E}'\mathrm{A}} \\
= & \frac{b^2(a-b+c)}{a^2(-a+b+c)} \times \frac{c^2(a+b-c)}{b^2(a-b+c)} \times \frac{a^2(-a+b+c)}{c^2(a+b-c)} \\
= & 1
\end{aligned}
$$

従って AD', BE', CF' が一点で交わることが証明出来た．□

注 1–2–3　この交点は三角形 ABC の各頂点に $a^2(-a+b+c)$, $b^2(a-b+c)$, $c^2(a+b-c)$ のおもりを置いたときの加重平均点になっている．この点が幾何的に何か重要な点なのかどうかはよくわからない．

注 1–2–4　最初見たときは複素数が使えるかもと思ったのだがどうもそうではないようだ．