For Tutors

MeBio　数学テキスト

三好さんの問題

—問題と解答—

Edited by kamei

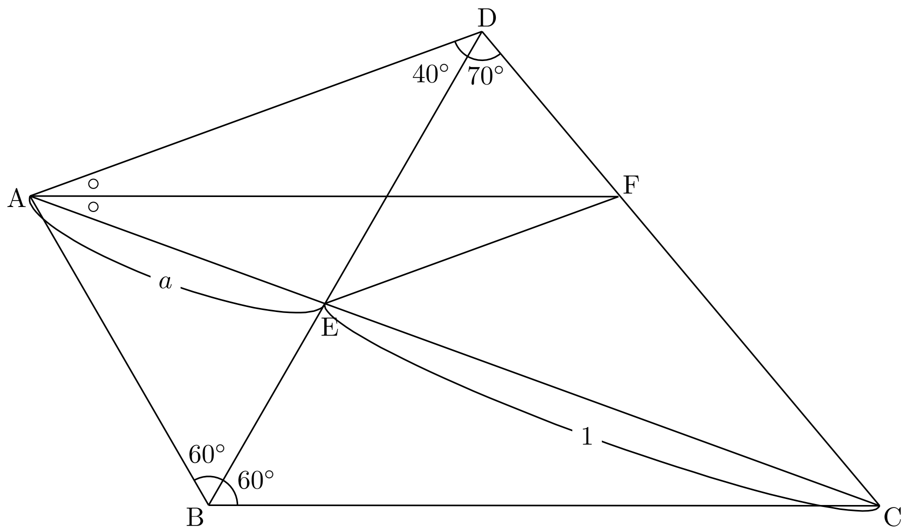
第 1 章

問題

§ 1　問題

メビオ化学科の三好さん（奈良県立医大）が作った問題です．難しいけれどもあることに気付けばすぐにわかるという，大変よく出来たおもしろい問題だと思います．

問題 1–1–1



図において

- $\mathrm{CE} = 1$
- $\angle\mathrm{DAF} = \angle\mathrm{CAF}$
- $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{CBD} = 60^\circ$
- $\angle\mathrm{ADB} = 40^\circ$
- $\angle\mathrm{BDC} = 70^\circ$

である．$\mathrm{AE} = a$ としたとき

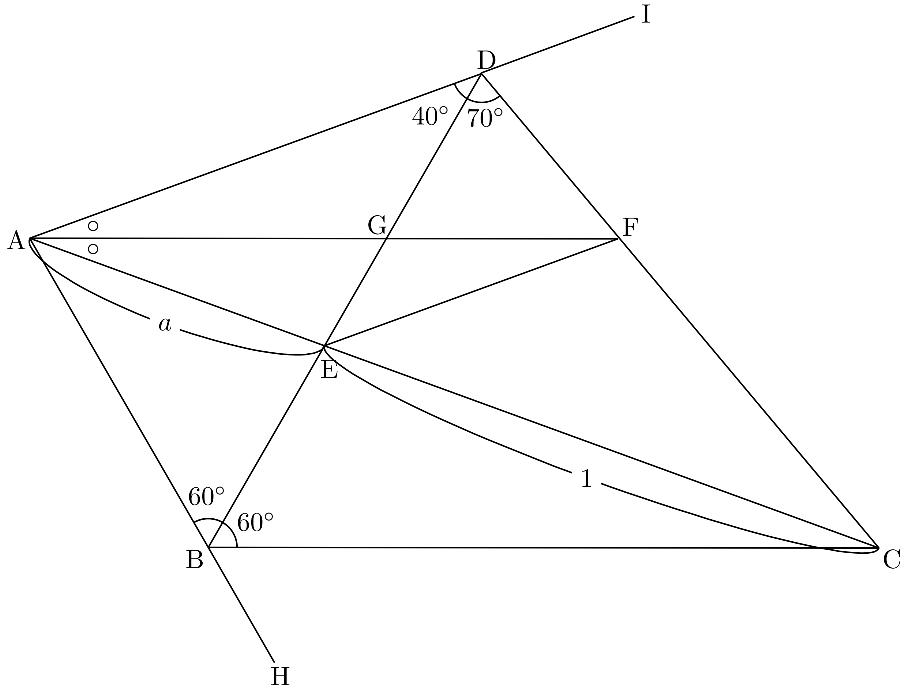
(1)　EF の長さを a を用いて表せ．

(2)　AB の長さを a を用いて表せ．

第 2 章

解答

§ 1　亀井の解答　その 1



図のように点 G, H, I, J を定める．$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{HBC} = 60^\circ$, $\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{IDC} = 70^\circ$ であるから，C は $\triangle\mathrm{ABD}$ の B, D の外角の二等分線の交点になっている．つまり傍心である．これより $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{DAC} = 40^\circ$, $\angle\mathrm{DAF} = \angle\mathrm{CAF} = 20^\circ$ であることがわかる．$\angle\mathrm{ACB} = 20^\circ$, $\angle\mathrm{ACD} = 30^\circ$, $\angle\mathrm{DEC} = 80^\circ$ であることもこれより容易に計算できる．

$\angle\mathrm{EDF} = \angle\mathrm{IDF} = 70^\circ$, $\angle\mathrm{DAF} = \angle\mathrm{EAF} = 20^\circ$ であるから，F は $\triangle\mathrm{ADE}$ の A の内角と D の外角の二等分線の交点になっている．つまり傍心である．これより $\angle\mathrm{DEF} = \angle\mathrm{CEF} = 40^\circ$ であることがわかる．$\angle\mathrm{AFE} = 20^\circ$ であることもこれより容易に計算できる．従って $\mathrm{AF} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}$, $\mathrm{AD} \mathbin{/\!/} \mathrm{EF}$ でもある．

以上の準備の下に (1), (2) を計算しよう．ただ，具体的な数値を文字 a で表す方法は一意的ではないだろうから，a の定義式を求めておかないといけない．

$\triangle\mathrm{AEF}$ は二等辺三角形であるから $\mathrm{EF} = a$ である．（これが (1) の答．）$\triangle\mathrm{ECF}$ に関する正弦定理より

$$\frac{\mathrm{CE}}{\sin\angle\mathrm{CFE}} = \frac{\mathrm{EF}}{\sin\angle\mathrm{ECF}} \iff \frac{1}{\sin 110^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ} \iff a = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{1}{2\cos 20^\circ}(\fallingdotseq 0.532)$$

3 倍角の公式より $\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ \iff \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2a^3} - \dfrac{3}{2a} \iff a^3 + 3a^2 - 1 = 0$．これが a の定義方程式である．この式は $\mathbb{Q}$ 上既約な 3 次方程式であり，$\mathbb{Q}(a)$ は $\mathbb{Q}$ の 3 次拡大になっている．

AB を a で表そう．まず $\triangle$CEF $\backsim$ $\triangle$CAD であるから CE : EF = CA : AD．これより AD $= a(1+a)$．
次に AB $= b$, BE $= c$ と置く．$\triangle$ABE $\backsim$ $\triangle$DBA であるから $a : b : c = a(1+a) : (a+c) : b$．これより $a+c = b(1+a)$, $b = c(1+a)$ が得られ，c を消去して $b = \dfrac{a+1}{a+2}$ がわかる．

これを (2) の答としてもよい訳だが．a の二次式の形で表すことも出来る．$a^3+3a^2-1 = (a+2)(a^2+a-2)+3 = 0$ より

$$\frac{a+1}{a+2} = 1 - \frac{1}{a+2} = 1 - \frac{(a^2+a-2)}{(a+2)(a^2+a-2)} = 1 - \frac{(a^2+a-2)}{-3} = \frac{a^2+a+1}{3}$$

§ 2　亀井の解答　その 2

傍心に気付かない場合は三角関数を駆使して解くことになる．例えば次の通り．AB $= b$ と置こう．$\triangle$ABD に正弦定理を適用すると BD $= \dfrac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$AB $= 2b\cos 40^\circ$ がわかる．

次に $\triangle$BCD に正弦定理を適用して BC $= \dfrac{\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}$BD $= \dfrac{\cos 20^\circ}{\cos 40^\circ} \times 2b\cos 40^\circ = 2b\cos 20^\circ$ を得る．
そこで $\angle$ACB $= \alpha$ と置くと，

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}}{\mathrm{BC} + \frac{1}{2}\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{2b\cos 20^\circ + \frac{1}{2}b} = \frac{\sqrt{3}}{4\cos 20^\circ + 1} = \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{4\cos 20^\circ \sin 20^\circ + \sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{2\sin 40^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{2\sin(60^\circ - 20^\circ) + \sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ\right) + \sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ
\end{aligned}$$

より $\alpha = 20^\circ$ を得る．
（この変形はかなり苦しいと思う．$\dfrac{\sqrt{3}}{4\cos 20^\circ + 1}$ を見て $\tan 20^\circ$ だと気付けるうまい方法はないだろうか？）

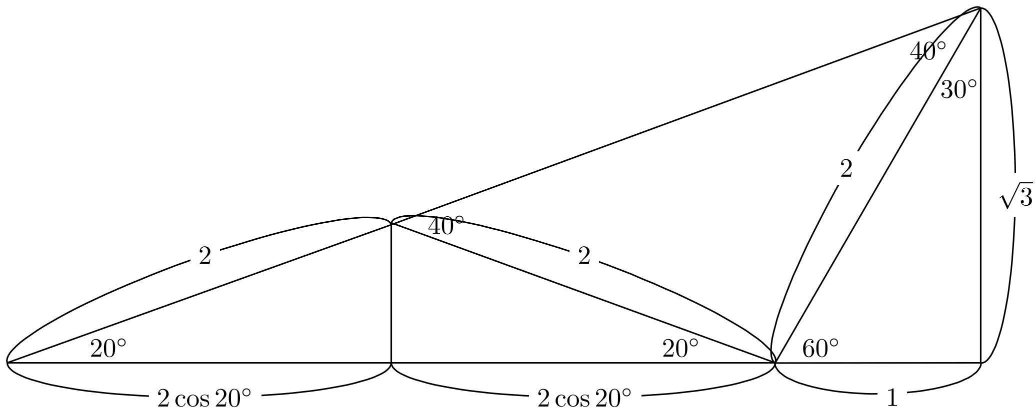
今度は $\angle$AFE $= \beta$ と置こう．$\triangle$AED に正弦定理を適用すると AD $= \dfrac{\sin 100^\circ}{\sin 40^\circ}$AE $= \dfrac{\sin 100^\circ}{\sin 40^\circ}a$ がわかる．

次に $\triangle$ADF に正弦定理を適用して AF $= \dfrac{\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ}$AD $= \dfrac{\sin 110^\circ \sin 100^\circ}{\sin 50^\circ \sin 40^\circ}a = \dfrac{\cos 20^\circ \cdot 2\sin 50^\circ \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ \cdot 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}a$
$= \dfrac{\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ}a$ を得る．

最後に $\triangle$AEF に正弦定理を適用して $\sin\beta = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}\sin 140^\circ = \dfrac{a}{\frac{\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ}a}\sin 140^\circ = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 50^\circ}\sin 140^\circ = \sin 20^\circ$
より $\beta = 20^\circ$ を得る．

$\alpha = \beta = 20^\circ$ を得たら後は解法 1 と同じ．

補足 2–2–1　$\dfrac{\sqrt{3}}{4\cos 20^\circ + 1} = \tan 20^\circ$ に関して新家さんが次の図から明らかだと教えてくれました．



§ 3　亀井の解答　その 3

△ABC において $\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=a:1$ がすぐにわかるので，$\mathrm{AB}=ka$, $\mathrm{BC}=k$ と置き，余弦定理 $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos 120°$ に代入して $(1+a)^2=(ka)^2+k^2-2ka\cdot k\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ から $k=\dfrac{1+a}{\sqrt{a^2+a+1}}$，従って $\mathrm{AB}=\dfrac{a(a+1)}{\sqrt{a^2+a+1}}$ と解いていたのだが，こんな解答で許してもらえるはずがない．先の答との整合性は

$$a^2(a+2)^2=a^4+4a^3+4a^2=(a^3+3a^2-1)(a+1)+a^2+a+1 \iff \sqrt{a^2+a+1}=a(a+2)$$

により保たれていることが確認出来る．もしくは $\sqrt{a^2+a+1}$ に Galios 群を作用させて得られる数値から，この式が a^2+2a に一致することがわかる．

補足 2–3–1　$\dfrac{a+1}{a+2}=\dfrac{a(a+1)}{\sqrt{a^2+a+1}}=\dfrac{a^2+a+1}{3}$ の関係が気になったので $\mathbb{Q}(a)$ について調べてみた.

(1)　$\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ は 3 次巡回拡大であり, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q})=<\sigma>$ とすると $\sigma(a)=a^2+2a-2\left(=\dfrac{1}{2\cos 140°}\fallingdotseq -0.6527\right)$, $\sigma^2(a)=-a^2-3a-1\left(=\dfrac{1}{2\cos 260°}\fallingdotseq -2.8793\right)$ である.

(2)　$\mathbb{Q}(a)$ の整数環は $\mathbb{Z}[a]$，判別式は $d(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q})=81$．分岐するイデアルは (3) のみで，$(3)=(a+2)^3$ となっている.

(3)　$\mathbb{Z}[a]$ の類数は 1 である.

(4)　3 以外の有理素数 p は, $p\equiv\pm1 \pmod 9$ のとき完全分解し, それ以外のとき remain prime である．例えば (2), (5), (7), (11), (13), (23) などはそのまま素イデアルであるのに対し．$(17)=(a+4)(a^2+2a-2)(-a^2-3a+3)$, $(19)=(3a+1)(3a^2+6a+5)(-3a^2-9a-2)$ のように分解される.

(5)　$\mathbb{Z}[a]$ の単数群は $<\pm1>\times<a>\times<-a-1>$（と思われる．未確認.）

a および $a+1$ は単数であり $(a+2)$ は 3 乗すると (3) になる素イデアルだから，$\dfrac{a+1}{a+2}=\dfrac{a(a+1)}{\sqrt{a^2+a+1}}$ $=\dfrac{a^2+a+1}{3}$ はすべて $3^{-1/3}$ のオーダーの分数イデアルを表している.

補足 2–3–2　「$\sqrt{a^2+a+1}$ に Galios 群を作用させて得られる数値から，この式が a^2+2a に一致することがわかる」と書いたが，実際の計算を載せておく.

まず数値的に $\sqrt{a^2+a+1}=1.347296$, $\sqrt{\sigma(a^2+a+1)}=0.879385$, $\sqrt{\sigma^2(a^2+a+1)}=2.532089$ を求めておく．加減の結果整数になるのは $1.347296-0.879385+2.532089=3.000000$ だけだから $\sqrt{a^2+a+1}=1.347296$,

$\sigma(\sqrt{a^2+a+1}) = -0.879385$, $\sigma^2(\sqrt{a^2+a+1}) = 2.532089$ と見当がつく．実際この 3 数は $x^3-3x^2+3=0$ の 3 解である．

$\sqrt{a^2+a+1} = pa^2+qa+r$ $(p,\ q,\ r \in \mathbb{Q})$ とおくと，

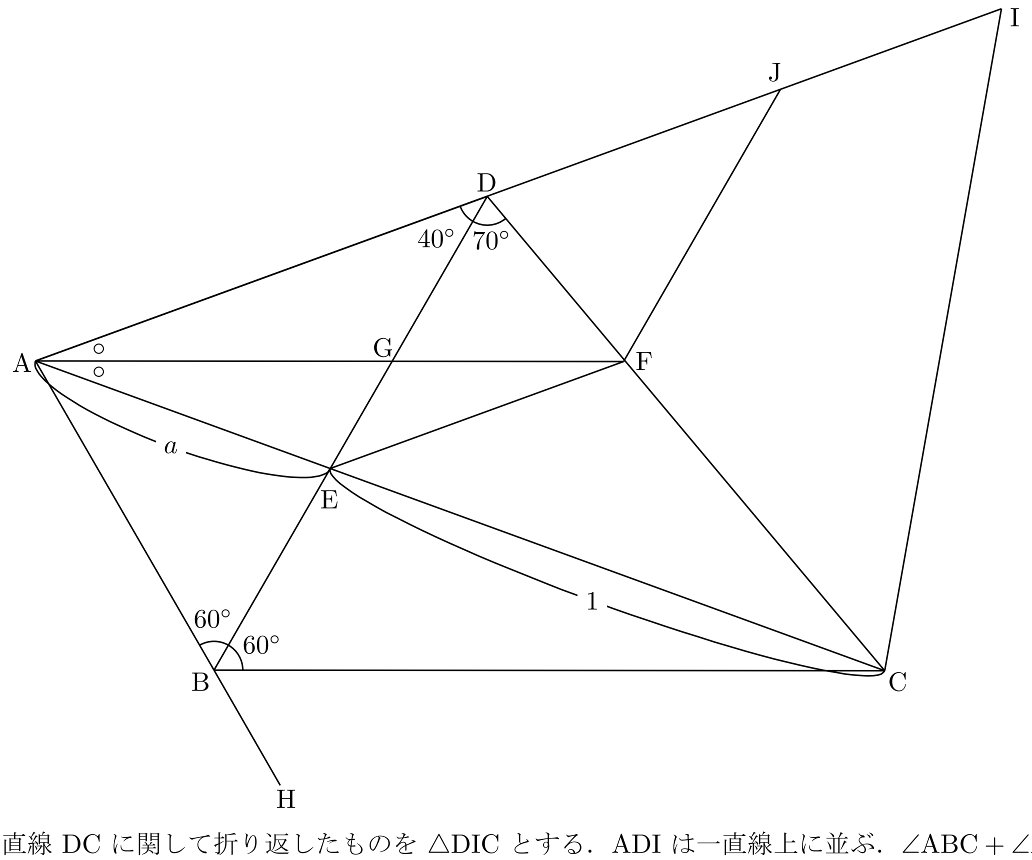
$$\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+a+1} \\ \sigma(\sqrt{a^2+a+1}) \\ \sigma^2(\sqrt{a^2+a+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ \sigma a^2 & \sigma a & 1 \\ \sigma^2 a^2 & \sigma^2 a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ \sigma a^2 & \sigma a & 1 \\ \sigma^2 a^2 & \sigma^2 a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+a+1} \\ \sigma(\sqrt{a^2+a+1}) \\ \sigma^2(\sqrt{a^2+a+1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.532089^2 & 0.532089 & 1 \\ (-0.6527)^2 & -0.6527 & 1 \\ (-2.8793)^2 & -2.8793 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.347296 \\ -0.879385 \\ 2.532089 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 2.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

これより $\sqrt{a^2+a+1} = a(a+2)$ であることがほぼわかった．（数値計算の結果だから追証しておく方がよい．）

§ 4　大川内さんの解答



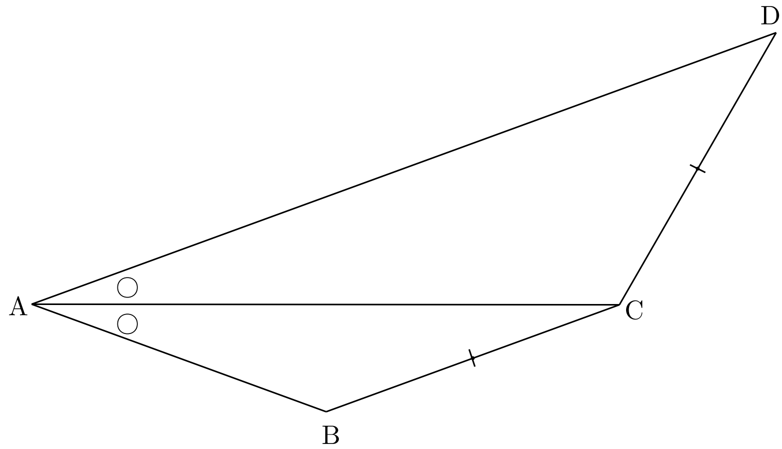
$\triangle$DBC を直線 DC に関して折り返したものを $\triangle$DIC とする．ADI は一直線上に並ぶ．$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{AIC} = 180°$ だから，$\square$ABCI は円に内接する．BC $=$ CI なのでそれぞれに対応する円周角は等しく $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAI} = 40°$ である．従って $\angle\mathrm{CAF} = \angle\mathrm{FAI} = 20°$ もわかる．

次に $\triangle$DEF を直線 DF に関して折り返したものを $\triangle$DJF とする．EF $=$ FJ であり，かつ $\angle\mathrm{EAF} = \angle\mathrm{FAJ}$ であるから，$\square$AEFJ は円に内接する．（注：後出）

従って $\angle\mathrm{DFE} = \angle\mathrm{DFJ} = 70°$, $\angle\mathrm{DEF} = 40°$, $\angle\mathrm{AFE} = 20°$ などがわかる．

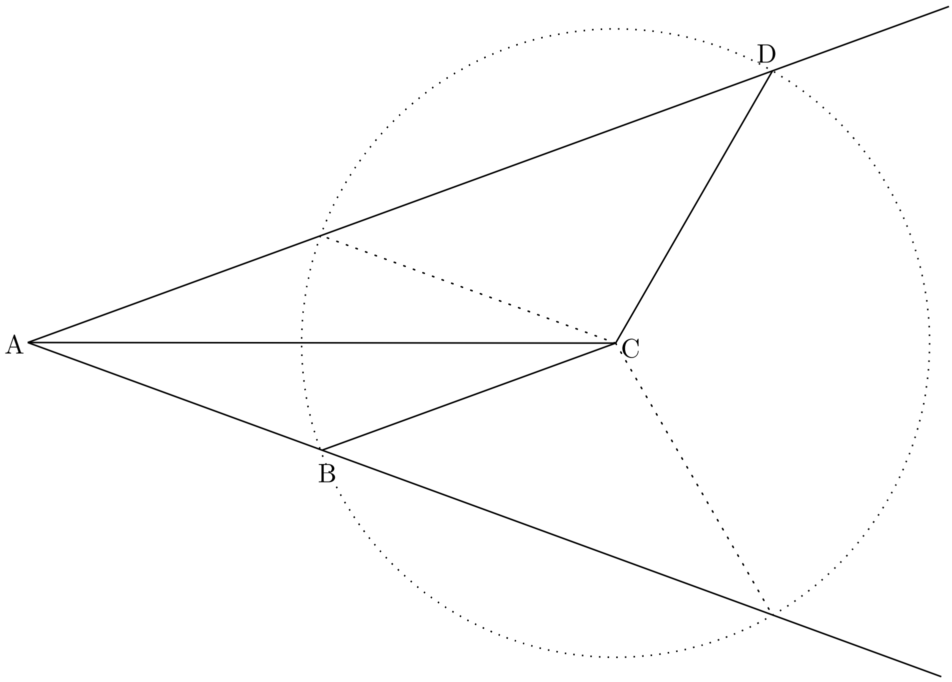
後は「亀井の解法」と同様.

注 2–4–1 注について



□ABCD において BC = CD, ∠BAC = ∠CAD とする．△ABC が △ADC に合同でないならば，□ABCD は円に内接する.

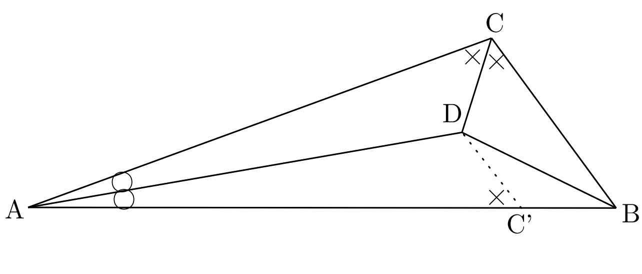
証明は次の図から明らか.



注 2–4–2 内心の存在証明

この解法は本質的には傍心の解法と同じである．ただ傍心の存在証明を，辺への距離を考えずに円周角の定理で行ったことになっている．ということは，内心の存在証明も円周角の定理を利用して出来るに違いない.

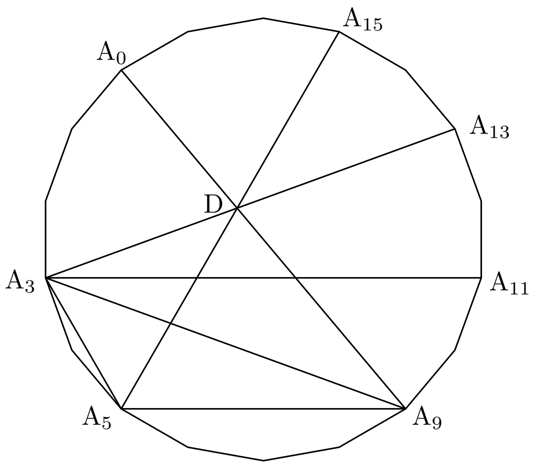
と思って考えてみたら非常に簡単に出来たので書いておく.



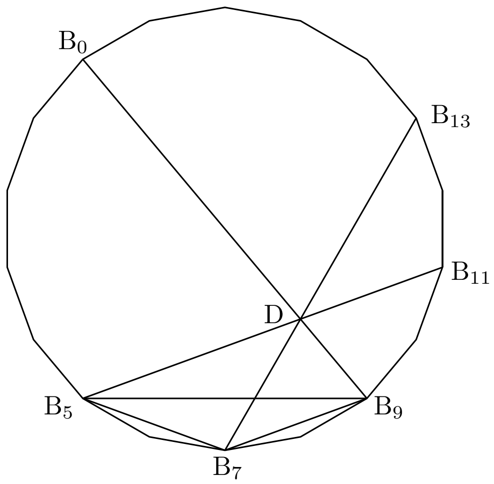
$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と $\angle$C の二等分線の交点を D と置く．簡単のため AB $>$ AC の場合のみ考える．（他の場合も容易.）

$\triangle$ADC を AD に関して折り返したものを $\triangle$ADC$'$ とする．$\angle$DC$'$B $+$ $\angle$DCB $= 180°$ なので $\square$DC$'$BC は円に内接する．CD $=$ C$'$D なので，対応する円周角について $\angle$DBC$' = \angle$DBC が成り立つ.

§ 5　亀井の解答その 4

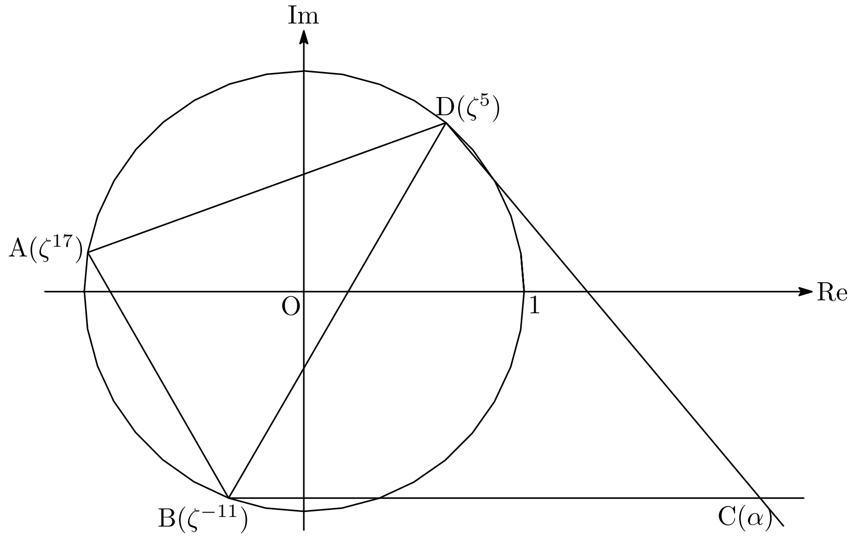


$A_0, A_1, \cdots, A_{17}$ を頂点とする正 18 角形に対し上のような対角線を引く．A_0A_9 は外接円の直径であり，A_3 と A_{15}, A_5 と A_{13} はこの直線に関して線対称の位置にあるから，A_0A_9, A_3A_{13}, A_5A_{15} は一点で交わる．その点を D とすると，$A_3A_5A_9$D が元の問題の四角形 ABCD に適合することがわかる．これより $\angle$BAC $= 40°$ などがわかる.



次に $B_0, B_1, \cdots, B_{17}$ を頂点とする正 18 角形に対し上のような対角線を引く．B_0B_9 は外接円の直径であり，B_5 と B_{13}, B_7 と B_{11} はこの直線に関して線対称の位置にあるから，B_0B_9, B_5B_{11}, B_7B_{13} は一点で交わる．その点を D とすると，$B_5B_7B_9$D が元の問題の四角形 AEFD に適合することがわかる．これより $\angle$AFE $= 20°$ などがわかる.

§ 6　亀井の解答その 5



以下では角度関係のみに注目するので，長さは考えないものとする．複素数平面で考える．1 の複素 36 乗根を $\zeta = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$ で表す．A(ζ^{17}), B(ζ^{-11}), D(ζ^5) と置くと $\angle\mathrm{ABD} = 60^\circ$, $\angle\mathrm{BDA} = 40^\circ$, $\angle\mathrm{DAB} = 80^\circ$ であり，問題の三角形に適合する．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と実軸のなす角が $20^\circ, -60^\circ, 60^\circ$ であることにも注意しておく．

C(α) と置く．$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は実軸に平行だから

$$\alpha - \zeta^{-11} \in \mathbb{R} \iff \alpha - \zeta^{-11} = \overline{\alpha} - \zeta^{11} \iff \alpha - \overline{\alpha} = \zeta^{-11} - \zeta^{11}$$

が成り立つ．また $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ は実軸に対して -50° の方向を向いているから

$$\zeta^5(\alpha - \zeta^5) \in \mathbb{R} \iff \zeta^5(\alpha - \zeta^5) = \zeta^{-5}(\overline{\alpha} - \zeta^{-5}) \iff \zeta^5\alpha - \zeta^{-5}\overline{\alpha} = \zeta^{10} - \zeta^{-10}$$

が成り立つ．2 本まとめて

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \zeta^5 & -\zeta^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-11} - \zeta^{11} \\ \zeta^{10} - \zeta^{-10} \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\zeta^5 - \zeta^{-5}} \begin{pmatrix} -\zeta^{-5} & 1 \\ -\zeta^5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{-11} - \zeta^{11} \\ \zeta^{10} - \zeta^{-10} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\zeta^5 - \zeta^{-5}} \begin{pmatrix} -\zeta^{-16} + \zeta^6 + \zeta^{10} - \zeta^{-10} \\ -\zeta^6 + \zeta^{16} + \zeta^{10} - \zeta^{-10} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って

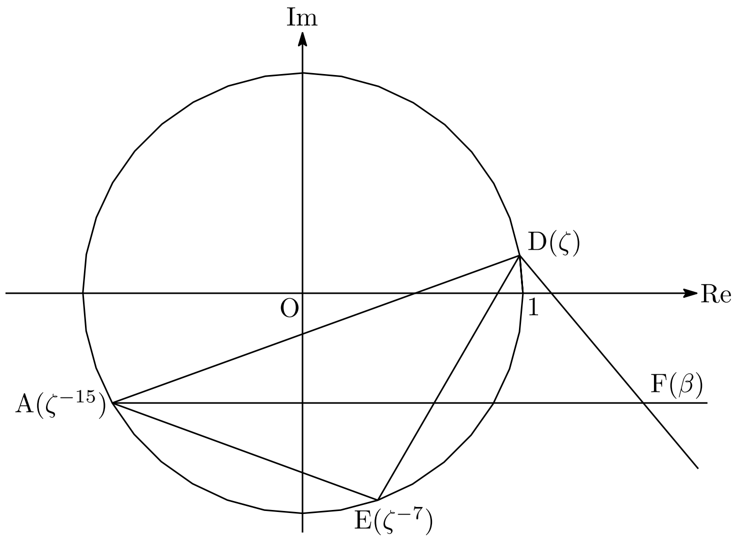
$$\begin{aligned}
\alpha - \zeta^{17} &= \frac{-\zeta^{-16} + \zeta^6 + \zeta^{10} - \zeta^{-10}}{\zeta^5 - \zeta^{-5}} - \zeta^{17} \\
&= \frac{-\zeta^{-16} + \zeta^6 + \zeta^{10} - \zeta^{-10} - \zeta^{22} + \zeta^{12}}{\zeta^5 - \zeta^{-5}} \\
&= \frac{\zeta^{-2}}{\zeta^5 - \zeta^{-5}} \left(-\zeta^{-14} + \zeta^8 + \zeta^{12} - \zeta^{-8} - \zeta^{24} + \zeta^{14}\right) \\
&= \frac{\zeta^{-2}}{\zeta^5 - \zeta^{-5}} \left(\zeta^8 + \zeta^{12} + \zeta^{14} - \zeta^{-8} - \zeta^{-12} + \zeta^{-14}\right)
\end{aligned}$$

これより

$$
\begin{aligned}
&\arg\left(\alpha-\zeta^{17}\right)\\
=\ &\arg\left(\zeta^{-2}\right)-\arg\left(\zeta^{5}-\zeta^{-5}\right)+\arg\left(\zeta^{8}+\zeta^{12}+\zeta^{14}-\zeta^{-8}-\zeta^{-12}+\zeta^{-14}\right)\\
=\ &-20^\circ-90^\circ+90^\circ=-20^\circ
\end{aligned}
$$

つまり $\angle \mathrm{ACB}=20^\circ$ であることがわかった.

今度は $\mathrm{A}(\zeta^{-15})$, $\mathrm{E}(\zeta^{-7})$, $\mathrm{D}(\zeta)$ と置くと $\angle\mathrm{AED}=80^\circ$, $\angle\mathrm{EDA}=40^\circ$, $\angle\mathrm{DAE}=40^\circ$ であり，問題の三角形に適合する．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ と実軸のなす角が 20°, -20°, 60° であることにも注意しておく.



$\mathrm{F}(\beta)$ と置く．先ほどと同じように考えて $\beta-\zeta^{-15}\in\mathbb{R}$, $\zeta^5(\beta-\zeta)\in\mathbb{R}$ より

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}1 & -1\\ \zeta^5 & -\zeta^{-5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\zeta^{-15}-\zeta^{15}\\ \zeta^{6}-\zeta^{-6}\end{pmatrix}\\
\iff \begin{pmatrix}\beta\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}&=\frac{1}{\zeta^5-\zeta^{-5}}\begin{pmatrix}-\zeta^{-5} & 1\\ -\zeta^{5} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta^{-15}-\zeta^{15}\\ \zeta^{6}-\zeta^{-6}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\zeta^5-\zeta^{-5}}\begin{pmatrix}-\zeta^{-20}+\zeta^{10}+\zeta^{6}-\zeta^{-6}\\ -\zeta^{10}+\zeta^{20}+\zeta^{6}-\zeta^{-6}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\beta-\zeta^{-7}&=\frac{-\zeta^{-16}+\zeta^{10}+\zeta^{6}-\zeta^{-6}}{\zeta^5-\zeta^{-5}}-\zeta^{-7}\\
&=\frac{-\zeta^{-16}+\zeta^{10}+\zeta^{6}-\zeta^{-6}-\zeta^{-2}+\zeta^{-12}}{\zeta^5-\zeta^{-5}}\\
&=\frac{\zeta^2}{\zeta^5-\zeta^{-5}}\left(-\zeta^{14}+\zeta^{8}+\zeta^{4}-\zeta^{-8}-\zeta^{-4}+\zeta^{-14}\right)\\
&=\frac{\zeta^2}{\zeta^5-\zeta^{-5}}\left(\zeta^{4}+\zeta^{8}+\zeta^{-14}-\zeta^{-4}-\zeta^{-8}+\zeta^{14}\right)
\end{aligned}
$$

これより $\angle\mathrm{AFE}=20^\circ$ であることがわかる.