For Tutors

MeBio　数学テキスト

東進数学コンクール10月

―問題と解答―

Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

東京出版発行の「大学への数学」の裏表紙内側に，毎月「東進数学コンクール」が掲載されています．高校生向けの超難問ですが，数学的にも深い意味を持つものばかりで，出題者の能力に感心するばかりです．2016 年 10 月号の問題は次の通りでした．ほったらかしにしておくと完全に忘れてしまうので，メモを残すことにします．

東進の問題 1–1–1

n を正の整数とする．次の 2 条件をみたす正の整数 a, b が存在することを示せ．

・ $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$ なる任意の整数 i, j に対し $ia + jb$ が平方数にならない．

・ a と b は互いに素である．

第 2 章

解答

§ 1　東進の問題に対する亀井の解答

2 と $1+2k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ は互いに素である．どんな n に対しても，うまく k を選べば，$a=2,\ b=1+2k$ が題意を満たす $a,\ b$ になっていることを示そう．「互いに素」は成立しているので平方数にならないように k を選べるかどうかが問題である．

まず次の補題を証明する．

補題 2–1–1　$\{a_n\}$ を初項 a, 公差 d の等差数列としよう．つまり $a_n=a+(n-1)d$ である．ただし $a,\ d$ は自然数とする．$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N\}$ のうちで平方数になっているものの添え字の集合を $S(a,\ d,\ N)$ と置く．つまり

$$S(a,\ d,\ N)=\{n \mid 1\leqq n\leqq N,\ a_n=a+(n-1)d \text{ は平方数 }\}$$

このとき $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\#\{S(a,\ d,\ N)\}}{N}=0$ が成り立つ．

証明　A 以下の平方数は高々 $\sqrt{A}$ 個であるから $\#\{S(a,\ d,\ N)\}\leqq\sqrt{a+(N-1)d}$ が成り立つ．つまり $\#\{S(a,\ d,\ N)\}=o(N^{\frac{1}{2}})$ であり，題意が従う．□

問題の解答

n を固定する．$(a,\ b)$ として互いに素な整数の N 個の組 $(2,\ 1+2k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdot,\ N)$ を考える．これらのうち，与えられた条件を満たすものが一組でも存在すればよい．それを，（$N\to\infty$ のとき）だめな組が余り多くないという評価によって示したい．

ある $i,\ j$ に対して $ia+jb=2i+(1+2k)j$ が平方数になってしまうのは
（ $ia+jb=2i+(1+2k)j$ を k の等差数列と見なすと，初項 $2i+3j$, 公差 $2j$ であるから）
$k\in S(2i+3j,\ 2j,\ N)$ のときである．従って題意を満たさない k の集合は

$$\bigcup_{1\leqq i,\ j\leqq n} S(2i+3j,\ 2j,\ N)$$

ということになるが，

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{\#\left\{\bigcup_{1\leqq i,\ j\leqq n}S(2i+3j,\ 2j,\ N)\right\}}{N}\\ \leqq\ &\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leqq i,\ j\leqq n}\frac{\#\left\{S(2i+3j,\ 2j,\ N)\right\}}{N}\end{aligned}$$

であり，最後の Σ は 0 に収束する数列の高々 n^2 個の和であるから，この値は 0 である．つまり題意を満たさない k は $N\to\infty$ につれて殆ど存在しないことになるので，題意を満たす k を必ず取ることが出来る．