For Tutors

MeBio　数学テキスト

中学への算数

—問題と解答—

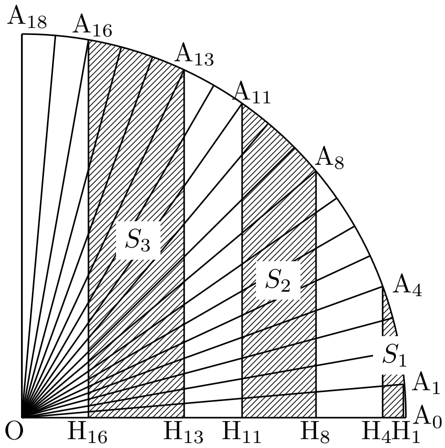
Edited by kamei

第 1 章

問題

§ 1　問題

問題 1–1–1　図のように半径 r の四半円の円周を 5° ずつに 18 等分し，A_0〜A_{18} と名前をつける．A_1, A_4, A_8, A_{11}, A_{13}, A_{16} から OA_0 に下ろした垂線の足を H_1, H_4, H_8, H_{11}, H_{13}, H_{16} とする．



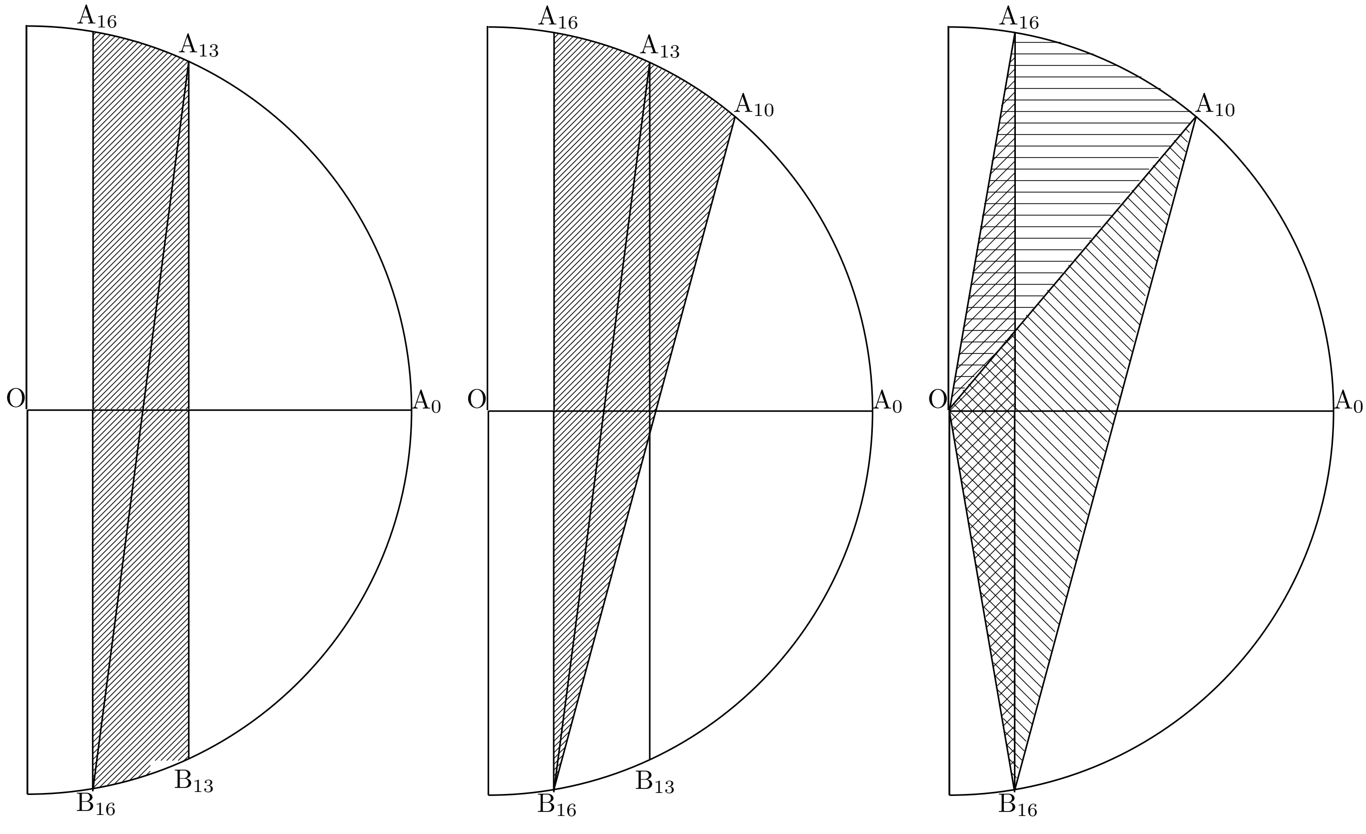
直線 $\mathrm{A}_4\mathrm{H}_4$, $\mathrm{H}_4\mathrm{H}_1$, $\mathrm{H}_1\mathrm{A}_1$ と 弧 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ で囲まれた図形の面積を S_1, 直線 $\mathrm{A}_{11}\mathrm{H}_{11}$, $\mathrm{H}_{11}\mathrm{H}_8$, $\mathrm{H}_8\mathrm{A}_8$ と 弧 $\mathrm{A}_8\mathrm{A}_{11}$ で囲まれた図形の面積を S_2, 直線 $\mathrm{A}_{16}\mathrm{H}_{16}$, $\mathrm{H}_{16}\mathrm{H}_{13}$, $\mathrm{H}_{13}\mathrm{A}_{13}$ と 弧 $\mathrm{A}_{13}\mathrm{A}_{16}$ で囲まれた図形の面積を S_3 とする．

$S = S_1 + S_2 + S_3$ を（算数的に）求めよ．

第 2 章

解答

§ 1　解答



OA_0 に関する A_{16}，A_{13} の対称点を B_{16}，B_{13} とする．直線 $\mathrm{A}_{16}\mathrm{B}_{16}$, $\mathrm{A}_{13}\mathrm{B}_{13}$ と 弧 $\mathrm{A}_{13}\mathrm{A}_{16}$, $\mathrm{B}_{13}\mathrm{B}_{16}$ で囲まれる部分の面積は $2S_3$ であるが，これは中央の図のように変形すると，直線 $\mathrm{A}_{16}\mathrm{B}_{16}$, $\mathrm{B}_{16}\mathrm{A}_{10}$ と 弧 $\mathrm{A}_{10}\mathrm{A}_{16}$ で囲まれる部分の面積に等しい．それを右図のように考えると

$$2S_3 = (\text{扇形 }\mathrm{OA}_{10}\mathrm{A}_{16}) + \triangle\mathrm{OB}_{16}\mathrm{A}_{10} - \triangle\mathrm{OA}_{10}\mathrm{A}_{16}$$

となることがわかる．中心角 θ の扇形の面積を $C(\theta)$, 頂角 θ の二等辺三角形の面積を $T(\theta)$ とすると

$$2S_3 = C(30^\circ) + T(130^\circ) - T(160^\circ)$$

ということになる．同様にして

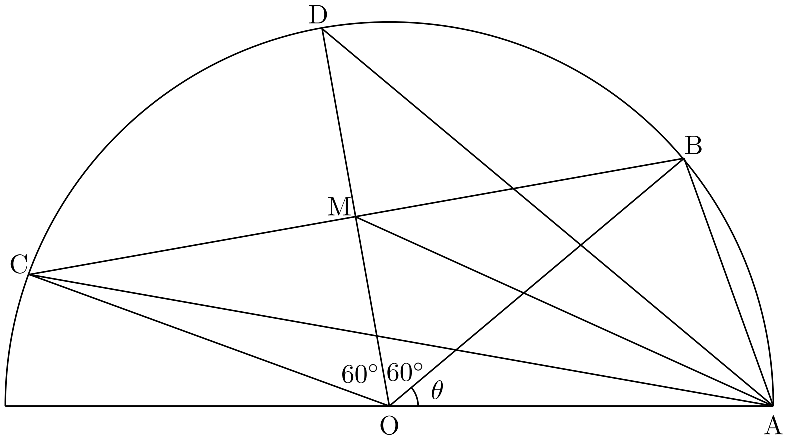
$$2S_1 = C(30^\circ) + T(10^\circ) - T(40^\circ)$$

$$2S_2 = C(30^\circ) + T(80^\circ) - T(110^\circ)$$

もわかる．ここで次の命題を示そう．

命題 2–1–1　$T(\theta)+T(\theta+120^\circ)=T(\theta+60^\circ)$

証明　数学的には $T(\theta)=\dfrac{r^2}{2}\sin\theta$ だから $\sin\theta+\sin(\theta+120^\circ)=2\sin(\theta+60^\circ)\cos 60^\circ=\sin(\theta+60^\circ)$ より明らかなのだが，算数的には次のように考えればよい．



$\angle\mathrm{AOB}=\theta$, $\angle\mathrm{BOD}=\angle\mathrm{DOC}=60^\circ$ とする．図形的に考えて OBDC は菱形であり，BC の中点 M は OD の中点でもある．

$\triangle\mathrm{OAB}=T(\theta)$, $\triangle\mathrm{OAC}=T(\theta+120^\circ)$ であるが，高さを考えると $\dfrac{\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}}{2}=\triangle\mathrm{OAM}$ であるから．$\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}=2\triangle\mathrm{OAM}=\triangle\mathrm{OAD}$ つまり $T(\theta)+T(\theta+120^\circ)=T(\theta+60^\circ)$ が示された．　□

この命題より $T(40^\circ)+T(160^\circ)=T(100^\circ)$, $T(10^\circ)+T(130^\circ)=T(70^\circ)$ であるが，$T(100^\circ)=T(80^\circ)$, $T(70^\circ)=T(110^\circ)$ も明らかなので，

$$
\begin{aligned}
& 2S_1+2S_2+2S_3 \\
= \;& 3C(30^\circ)+T(130^\circ)-T(160^\circ)+T(10^\circ)-T(40^\circ)+T(80^\circ)-T(110^\circ) \\
= \;& 3C(30^\circ)-\{T(40^\circ)+T(160^\circ)-T(80^\circ)\}+\{T(10^\circ)+T(130^\circ)-T(110^\circ)\} \\
= \;& 3C(90^\circ)=\frac{3}{4}\pi r^2
\end{aligned}
$$

従って $S=\dfrac{3}{8}\pi r^2$ である．