

MeBio 数学テキスト

素数定理と明示公式

—ζ 関数とその周辺—

目次

第 1 章 Bernoulli 数と Bernoulli 多項式	4
§ 1 Bernoulli 多項式	4
§ 2 Bernoulli 多項式の計算方法	6
第 2 章 Γ 関数	8
§ 1 Γ 関数の定義と解析接続	8
§ 2 Γ 関数の重要な性質	9
§ 3 Γ 関数の複素数値の位相	10
第 3 章 ζ 関数の解析接続	14
§ 1 ζ 関数の正整数での値 その 1	14
§ 2 ζ 関数の解析接続	15
§ 3 $s = 1$ における Laurent 展開の定数項	20
§ 4 ζ 関数の複素数値の位相	21
第 4 章 ζ 関数の関数等式	24
§ 1 関数等式の証明 その 1	24
§ 2 関数等式の証明 その 2 の準備	27
§ 3 関数等式の証明 その 2	29
§ 4 ζ 関数の正整数での値 その 2	30
第 5 章 素数定理	31
§ 1 概要	31
§ 2 証明の流れ	33
§ 3 Chebyshev 関数・von Mangoldt 関数など	34
§ 4 $\psi(x) \sim x$ および $\vartheta(x) \sim x$ の十分性	36
§ 5 定理 B の証明	38
§ 6 定理 A の証明	40
§ 7 $\operatorname{Re}(s) = 1$ 上に零点が存在しないことの証明	44
§ 8 Wiener 池原の定理の拡張と別証明	45
第 6 章 $\zeta(s)$ の無限積表示	49
§ 1 Jensen の公式	49
§ 2 Hadamard の積表示	50
§ 3 $\zeta(s)$ の無限積表示	51
第 7 章 明示公式	52
§ 1 $\Pi(x)$ の定義と Möbius の反転公式	52
§ 2 $\Pi(x)$ と $\zeta(s)$ の関係	53

第 8 章 おまけ	62
§ 1 使うはずだったが使わなくなった定理など	62

第 1 章

Bernoulli 数と Bernoulli 多項式

$$\sum_{k=0}^x k = \frac{x(x+1)}{2}, \sum_{k=0}^x k^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, \sum_{k=0}^x k^3 = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$$

は受験生が知っているが、 $\sum_{k=0}^x k^9$ を x の 10 次多項式として実際に表せといわれて実行できるだろうか。

$$\text{実は } \sum_{k=0}^x k^n = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}) \text{ と表される. (関孝和, J.Bernoulli) }$$

ここで $B_n(x)$ は Bernoulli 多項式, B_n は Bernoulli 数である. これらは式の形からも想像がつくように ζ 関数と関係が深い. まずはその復習から.

§ 1 Bernoulli 多項式

定義 1-1-1 非負整数 n に対して Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ を次で定義する.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} u^n = \frac{ue^{xu}}{e^u - 1}$$

少しだけ計算してみると

$$\begin{aligned} & \frac{ue^{xu}}{e^u - 1} \\ = & \frac{1 + xu + \frac{x^2u^2}{2} + \frac{x^3u^3}{6} + \frac{x^4u^4}{24} + \dots}{1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + \frac{u^3}{24} + \frac{u^4}{120} + \dots} \\ = & \left(1 + xu + \frac{x^2u^2}{2} + \frac{x^3u^3}{6} + \frac{x^4u^4}{24} + \dots \right) \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} - \frac{u^3}{720} + \dots \right) \\ = & 1 + \left(x - \frac{1}{2} \right) u + \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \frac{u^2}{2} + \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \frac{u^3}{6} + \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \right) \frac{u^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

従って $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}$, $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$ ということになる. (ただしこの計算法では大変.)

$B_n(x)$ は x の n 次多項式で, 最高次の係数が 1 になっている.

定義 1-1-2 非負整数 n に対して Bernoulli 数 B_n を次で定義する.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} u^n = \frac{u}{e^u - 1}$$

明らかに $B_n = B_n(0)$ であり, $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}$ ということになる.

しかし Bernoulli 数が Bernoulli 多項式から作られるのではなく, Bernoulli 多項式が Bernoulli 数から作られると考える方が普通である.

定理 1-1-3
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k B_{n-k} x^k$$

証明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} u^n = \frac{u}{e^u - 1} \cdot e^{xu} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} u^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} u^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k} \cdot x^k}{(n-k)!k!} u^n$$

□

Σ 公式のためには Bernoulli 数より Bernoulli 多項式の方が重要な感じがするが, Bernoulli 数は ζ 関数の特殊値として表れるので, 基本的なことは分かっているといけない.

命題 1-1-4

- (1) $B_1 = -\frac{1}{2}$ 以外の奇数番目の Bernoulli 数は 0 である.
- (2) $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}$ のように, 偶数番目の Bernoulli 数は正負が交互に並ぶ.

証明

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} u^n = \frac{u}{e^u - 1} \quad \text{と} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-u)^n = \frac{-u}{e^{-u} - 1} = \frac{-ue^u}{1 - e^u} = \frac{ue^u}{e^u - 1}$$
 を辺々引くと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} u^n \{1 - (-1)^n\} = \frac{u - ue^u}{e^u - 1} = -u \text{ より分かる.}$$

(2) 定理 3-1-1 で証明するが, $\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$ が成り立つ. $\zeta(2m) > 0$ であるから主張は正しい.

□

定理 1-1-5 n, x を自然数とすると $\sum_{k=0}^x k^n = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(x+1) - B_{n+1})$ が成り立つ.

証明 定義 1-1-1 より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} u^n = \frac{ue^{(x+1)u}}{e^u - 1} - \frac{ue^{xu}}{e^u - 1} = \frac{ue^{xu}(e^u - 1)}{e^u - 1} = ue^{xu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n u^{n+1}}{n!}$$

この両辺の u^{n+1} の係数を比較して $\frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!}$ を得る, 従って

$$\sum_{k=0}^x k^n = \sum_{k=0}^x \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)}{n+1} = \frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}}{n+1}$$

□

先ほどの計算に適用すると $\sum_{k=0}^{x-1} k^3 = \frac{B_4(x) - B_4}{4} = \frac{1}{4} (x^4 - 2x^3 + x^2) = \frac{(x-1)^2 x^2}{4}$ が確認できる.

§ 2 Bernoulli 多項式の計算方法

$\sum_{k=1}^n k^9$ の公式を求めるには $B_{10}(x)$ を求める必要がある. これを実際に求めるときは, 級数から Bernoulli 数を計算して Bernoulli 多項式を作り出すよりは, 積分を繰り返して作り出す方が速い. それを解説する.

命題 1-2-1 $B_{n+1}'(x) = (n+1)B_n(x)$

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} u^n = \frac{ue^{xu}}{e^u - 1}$ の両辺を x で微分すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} u^n = \frac{u^2 e^{xu}}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} u^{n+1}$$

この両辺の u^{n+1} の係数を比較すればよい. □

これより $B_{n+1}(x) = \int (n+1)B_n(x) dx + C$ と表されることが分かったが, 問題は積分定数の決定である. これに関しては次の通り.

補題 1-2-2 $n \geq 2$ のとき $B_n(1) = B_n$

証明 これは $\sum_{k=0}^0 k^n = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(1) - B_{n+1})$ より直ちに導かれる. □

これにより $B_n(x)$ が分かっているとき, 不定積分を 2 回繰り返して $B_{n+2}(x)$ を作り (ただし x の 1 次の項の係数 $B_{n+2,1}$ と定数項 B_{n+2} は未知) $B_{n+2}(1) = B_{n+2}$ によって $B_{n+2,1}$ を決定すれば B_{n+1} が決定できる. これを繰り返して $B_n(x)$ を求めることが出来る^{1, 2}.

例 1-2-3

(1a) $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ より $B_2(x) = x^2 - x + B_2$ (2 倍して不定積分した),

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3B_2x + B_3$ (3 倍して不定積分した).

(1b) $B_3(1) - B_3 = 0$ より $1 - \frac{3}{2} + 3B_2 = 0 \iff B_2 = \frac{1}{6}$. 従って $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

(2a) $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ より $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + B_3$ (3 倍して不定積分した),

$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 4B_3x + B_4$ (4 倍して不定積分した).

(2b) $B_4(1) - B_4 = 0$ より $1 - 2 + 1 + 4B_3 = 0 \iff B_3 = 0$. 従って $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

この方法で $B_n(x)$ を求めていくのが実際問題としては最短なのではないだろうか. ちなみにこの方法による計算結果は次の通り.

$B_0(x) = 1$

¹ これは $B_n(x)$ の不定積分で求めた $B_{n+1}(x)$ の定数項を, $\int_0^1 B_{n+1}(x) dx = 0$ の条件で決定しているのと同じことである.

² $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$ は $B_n(x)$ の区間 $[0, 1]$ における平均が 0 ということだから, Euler-Maclaurin の和公式の誤差項に $\int_a^b B_n(x - [x])f^{(n)}(x) dx$ が表れるのは納得がいく.

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$$

...

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15x^8}{2} - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{6}$$

従って $\sum_{k=1}^{x-1} k^9 = \frac{1}{10} \left(x^{10} - 5x^9 + \frac{15x^8}{2} - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3x^2}{2} \right)$ であることがわかった.

第 2 章

Γ 関数

§ 1 Γ 関数の定義と解析接続

定義 2-1-1 大学受験生に対しては Γ 関数は普通次のように定義されるだろう。

$$s > 0 \text{ に対して } \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

□

$s > 0$ において $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つことが分かる。また $\Gamma(1) = 1$ も容易に分かる。従って n を自然数とすると $\Gamma(n+1) = n!$ である。また、 $\Gamma(s)$ を複素関数とみると、この定義式は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で収束して正則関数を表す、しかもその領域内で $\Gamma(s)$ は 0 にならない。

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ より $\Gamma(s)$ は全平面に解析接続される。 $s = -n$ で一位の極を持ち、留数は $(-1)^n \frac{1}{n!}$ であることが容易に分かる。零点は持たないが $\lim_{\operatorname{Im}(s) \rightarrow \pm\infty} \Gamma(s) = 0$ である。(Euler, Gauss の公式から容易に示すことが出来る。)

$\Gamma(z)$ は階乗関数の非整数値への拡張になっている。

$$5! = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \doteq \frac{10! \cdot 10^5}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}$$

であるから、整数とは限らない実数 z に対しても

$$(z-1)! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} n^{z-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{z(z+1) \cdots (z+n)} n^z$$

と定義するのが良さそうである。実際、上式の右辺は $\Gamma(z)$ に収束する。

命題 2-1-2 Euler, Gauss の公式

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{z(z+1) \cdots (z+n)} n^z$$

□

この表示も後で使う。しかしいろいろな証明のためには零点や極の位置のよく分かる無限積表示の方が便利がよい。

定理 2-1-3 Weierstrass

$$\text{任意の複素数 } z \text{ に対して } \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

□

この表示が $\Gamma(z)$ の極が $z = 0, -1, -2, \dots$ であること, および $\Gamma(z)$ が零点を持たないことを端的に表している. 補正因子は収束性の要求および大局的なずれの調整のために必要である. 命題 2-1-2 と定理 2-1-3 はほぼ同値な内容を述べていて, 導出も容易である.

§ 2 Γ 関数の重要な性質

命題 2-2-1 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

証明 B 関数 $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ が $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ を満たすことはよく知られている. これに $x = y = \frac{3}{2}$ を代入する. $\Gamma(x+y) = \Gamma(3) = 2$ である. また $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}$ である. これより $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ がわかり, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ が得られる.

注 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ と覚えておけばよい. □

$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}$ と置く. $f(z)$ の零点と $\sin \pi z$ の零点は $z = \dots, 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ で一致している. しかも $f(z+1) = \frac{1}{\Gamma(z+1)\Gamma(-z)} = \frac{1}{z\Gamma(z) \cdot \frac{\Gamma(1-z)}{-z}} = -f(z)$ だから半周期 1 の平行移動で -1 倍になる

ことも一致している. 従って定数倍の違いしかなさそうである. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\pi}$ だから, その定数

は π であろう. (もしくは $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(1)^2} = 1$ と $(\sin \pi z)'|_{z=0} = \pi \cos \pi z|_{z=0} = \pi$ を比較してもよい.)
ちゃんとした証明は次の通り.

定理 2-2-2 $\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$

証明

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{\Gamma(z) \cdot (-z)\Gamma(-z)} = -\frac{1}{z} \left\{ \cdot z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \left\{ (-z) e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \end{aligned}$$

□

倍角公式の見当も容易につく. $\Gamma(2z)$ は $z = 0, -\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}, \dots$ に一位の極を持つ. $\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \dots$ に一位の極を持ち, $\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$ は $z = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ に一位の極を持つから, $\Gamma(2z)$ と $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$ は近そうである,

やはり $f(z) = \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$ と置くと

$$f\left(z + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)\Gamma(z+1) = \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)z\Gamma(z) = zf(z)$$

一方 $\Gamma\left(2\left(z + \frac{1}{2}\right)\right) = \Gamma(2z+1) = 2z\Gamma(2z)$ だから、2倍のずれを繰り返すと、 $f(z)$ と $\frac{1}{2^{2z}}\Gamma(2z)$ が定数倍の違いしかないと思われる。仮にこれが正しいとして $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2^{2z}}\Gamma(2z)$ と置いてみると、 $z = \frac{1}{2}$ を代入して $\sqrt{\pi} \cdot 1 = \frac{k}{2} \cdot 1$ より $k = 2\sqrt{\pi}$ であろう。

定理 2-2-3 Gauss, Legendre の積公式 $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2z}}\Gamma(2z)$

証明

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! \cdot n^{z-1}}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \cdot \frac{n! \cdot n^{z-\frac{1}{2}}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{3}{2}\right)\cdots\left(z + n - \frac{1}{2}\right)}}{\frac{(2n)! \cdot (2n)^{2z-1}}{2z(2z+1)(2z+2)\cdots(2z+2n-1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n!}{(2n)!} \cdot 2^{2n} \cdot \frac{\frac{n^z}{2} \cdot \frac{n^z}{\sqrt{n}}}{\frac{n^z}{2} \cdot \frac{n^z}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n!}{(2n)!} \cdot \frac{2 \cdot 2^{2n}}{2^{2z}\sqrt{n}} \end{aligned}$$

ここで Stirling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ より $\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ が容易に分かるので、

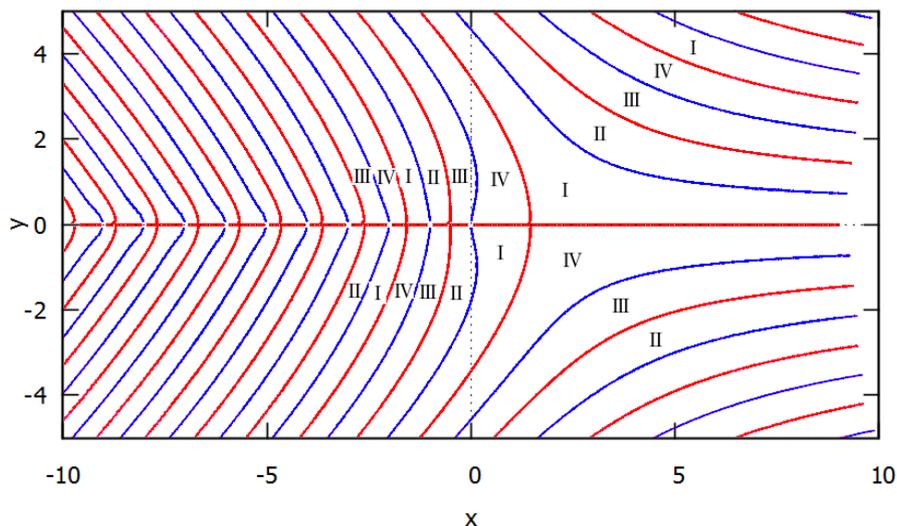
$$\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n!}{(2n)!} \cdot \frac{2 \cdot 2^{2n}}{2^{2z}\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2z}}$$

が得られる¹。

§ 3 Γ関数の複素数値の位相

下の図は $\Gamma(z)$ の値が実数になる z と純虚数になる z を図示したものである。

¹ この定理は $\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}}{n^{nz}}\Gamma(nz)$ と一般化される。



図の赤線が $\{z \in \mathbb{C} \mid \Gamma(z) \text{ が実数}\}$, 青線が $\{z \in \mathbb{C} \mid \Gamma(z) \text{ が純虚数}\}$ を表す.

$\lim_{z \rightarrow +0} \Gamma(z) = +\infty, \lim_{z \rightarrow +\infty} \Gamma(z) = +\infty$ はよく知られている. 従って $\Gamma(z)$ は \mathbb{R}_+ 上に極小値を持つが, それは近似値では $\Gamma(1.46163) = 0.8856031944$ 位である. ここが複素関数としては2次の分岐点となっていて Riemann 面としては2重被覆となっている. 従って $z = 1.46163$ から垂直方向に正の実数値のラインが出ている. このラインの虚部 $\rightarrow \pm\infty$ の極限值は $+0$ である. 実際, あらゆる実数値 σ に対し $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \Gamma(\sigma + \tau i) = 0$ であり, $\Gamma(z) = 0$ は解を持たない.

原点は一位の極で, 真上の青線は $-\infty i \rightarrow -0i$, 真下の青線は $+\infty i \rightarrow +0i$ の値をとる. \mathbb{R}_+ 上で赤線の交わっている部分はすべて2次の分岐点, 赤線と青線の集まっているところはすべて一位の極となっている. I は複素数平面の第一象限に値をとる領域を表す. II, III, IV も同様である.

原点から出ている青線は少したわんでいる．これは $\Gamma(z)$ の原点でのローラン展開で確認できる．実際にやってみた． $\Gamma(z)$ が純虚数 $\iff \frac{1}{\Gamma(z)}$ が純虚数 であるから，逆数の Taylor 展開を考える． $z=0$ の近辺で

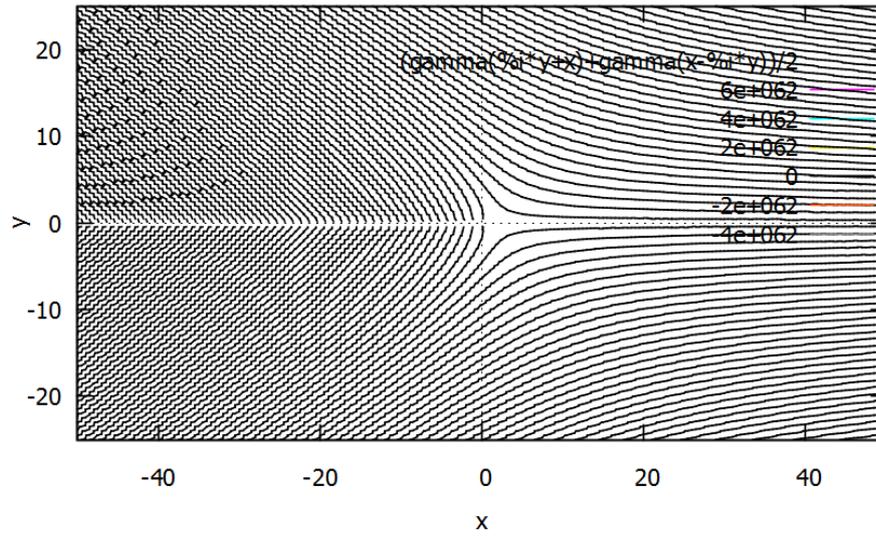
$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \\
 &= ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \\
 &= z \left(1 + \gamma z + \frac{\gamma^2 z^2}{2} + \frac{\gamma^3 z^3}{6} + \frac{\gamma^4 z^4}{24} + \frac{\gamma^5 z^5}{120} + \dots\right) \\
 &\quad \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + 0z - \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} - \frac{z^4}{8n^4} + \frac{z^5}{30n^5} - \frac{z^6}{144n^6} + \dots\right) \\
 &= z \left(1 + \gamma z + \frac{\gamma^2 z^2}{2} + \frac{\gamma^3 z^3}{6} + \frac{\gamma^4 z^4}{24} + \frac{\gamma^5 z^5}{120} + \dots\right) \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{\zeta(2)}{2} z^2 + \frac{\zeta(3)}{3} z^3 + \frac{\zeta(2)^2 - 2\zeta(4)}{8} z^4 + \frac{6\zeta(5) - 5\zeta(2)\zeta(3)}{30} z^5\right) \\
 &= z + \gamma z^2 + \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\zeta(2)}{2}\right) z^3 + \left(\frac{\gamma^3}{6} - \frac{\gamma\zeta(2)}{2} + \frac{\zeta(3)}{3}\right) z^4 \\
 &\quad + \left(\frac{\gamma^4}{24} - \frac{\gamma^2\zeta(2)}{4} + \frac{\gamma\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(2)^2 - 2\zeta(4)}{8}\right) z^5 \\
 &\quad + \left(\frac{\gamma^5}{120} - \frac{\gamma^3\zeta(2)}{12} + \frac{\gamma^2\zeta(3)}{6} + \frac{\gamma(\zeta(2)^2 - 2\zeta(4))}{8} + \frac{6(\zeta(5) - 5\zeta(2)\zeta(3))}{30}\right) z^6 + \dots \\
 &= z + \gamma z^2 + \frac{(6\gamma^2 - \pi^2) z^3}{12} + \frac{(2\gamma^3 - \pi^2\gamma + 4\zeta(3)) z^4}{12} + \frac{(60\gamma^4 - 60\pi^2\gamma^2 + 480\zeta(3)\gamma + \pi^4) z^5}{1440} \\
 &\quad + \frac{(12\gamma^5 - 20\pi^2\gamma^3 + 240\zeta(3)\gamma^2 + \pi^4\gamma - 40\zeta(3)\pi^2 + 288\zeta(5)) z^6}{1440} + \dots \\
 &= z + 0.5772156z^2 - 0.6558780z^3 - 0.04200263z^4 + 0.1665386z^5 - 0.04219773z^6 + \dots
 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
 f(bi) &= bi - 0.5772156b^2 + 0.6558780b^3i - 0.04200263b^4 + 0.1665386b^5i + 0.04219773b^6 + \dots \\
 &= (-0.5772156b^2 - 0.04200263b^4 + 0.04219773b^6 + \dots) + (b + 0.6558780b^3 + 0.1665386b^5 + \dots)i
 \end{aligned}$$

これより b が 0 から大きくなるにつれ $f(bi)$ は，虚部はほぼ b と同じ大きさに増加していくが，実部はまず少しだけ負の値を取り，その後 (b^6 の項が効いて) 正に転じることがわかる．

また，図を見ると赤線，青線とも傾き ± 1 に収束しそうな感じがする．(が，気のせいだろう．そのような関数は $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = c$ で $c = a + ai$ となる場合しかないと思われる．) もっとスケールの大きな図は次のようになっている．



第 3 章

ζ 関数の解析接続

§ 1 ζ 関数の正整数での値 その 1

Euler による $\sin \pi z$ の無限積表示 $\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ において, 左辺を Taylor 展開して z^{2n} の係数を比較すると, $\zeta(2n)$ が求められる. 例えば, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ などが計算できる. もっと一般的に次の定理が成り立つ.

定理 3-1-1 正の整数 m に対し

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$$

証明 $\zeta(s)$ の負整数での値と関数等式を使った証明は後の節で与える. ここでは直接証明しよう.

$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ の両辺を対数微分すると

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2z}{n^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{n^2}\right)^m \right\} = \frac{1}{z} - \sum_{m=0}^{\infty} 2\zeta(2m+2)z^{2m+1}$$

これに z をかけて $\pi z \cot \pi z = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} 2\zeta(2m+2)z^{2m+2} = 1 - \sum_{m=2}^{\infty} 2\zeta(2m)z^{2m}$ の形にしておく.

一方で

$$\pi z \cot \pi z = \pi z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi z \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \pi iz \left(1 + \frac{2}{e^{2\pi iz} - 1}\right) = \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1}$$

であるが, Bernoulli 数の定義は $\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k$ であつたから

$$\pi z \cot \pi z = \pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} = \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi iz)^k$$

従つて $1 - \sum_{m=2}^{\infty} 2\zeta(2m)z^{2m} = \pi iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2\pi iz)^k$ ということになり, $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$

とともに $-2\zeta(2m) = \frac{B_{2m}}{(2m)!} (2\pi i)^{2m}$ つまり $\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$ が証明された. \square

§2 ζ関数の解析接続

定義 3-2-1

- partial ζ関数を $\zeta_{\equiv a(N)}(s) = \sum_{n \equiv a \pmod{N}} \frac{1}{n^s}$ で定義する.
- Hurwitz ζ関数を $\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ で定義する.

明らかに次がなり立つ

$$(1) \quad \zeta_{\equiv a(1)}(s) = \zeta(s), \quad \zeta(s, 1) = \zeta(s)$$

$$(2) \quad L(s, \chi) = \sum_{a=1}^N \chi(a) \zeta_{\equiv a(N)}(s)$$

$$(3) \quad \zeta\left(s, \frac{a}{N}\right) = N^s \zeta_{\equiv a(N)}(s)$$

解説 3-2-2 方法1

まずは $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ として考える.

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s, x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s} \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{x+n}\right)^s \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x+n)u} u^s \frac{du}{u} \quad \left(u = \frac{t}{x+n} \text{ と置換}\right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{1 - e^{-u}} u^s \frac{du}{u} \end{aligned}$$

この積分を区間 $(0, 1)$ と $(1, \infty)$ に分けて考える. $(1, \infty)$ での積分は s の値によらずに収束し, 全 s 平面での正則関数を与える. 一方 $(0, 1)$ での積分に関しては $\sigma > 1$ でないと収束しない. Bernoulli 多項式が

$\frac{ue^{xu}}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} u^n$ で定義されたことを思い出すと, $\frac{-ue^{-xu}}{e^{-u} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-u)^n$ を使って $\sigma > 1$ においては次のように表される.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{1-e^{-u}} u^s \frac{du}{u} &= \int_0^1 \frac{-ue^{-xu}}{e^{-u}-1} u^{s-2} du \\
 &= \int_0^1 \frac{-ue^{-xu}}{e^{-u}-1} u^{s-2} du \\
 &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-u)^n u^{s-2} du \\
 &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-1)^n u^{n+s-2} du \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-1)^n \left[\frac{u^{n+s-1}}{n+s-1} \right]_0^1 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} \frac{(-1)^n}{n+s-1}
 \end{aligned}$$

$\frac{ue^{xu}}{e^u-1}$ の収束半径が 2π であることより $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|B_n(x)|}{n!}} = \frac{1}{2\pi}$ が分かるので、 $\frac{|B_n(x)|}{n!} = O\left(\left(\frac{1}{2\pi} + \varepsilon\right)^n\right)$

である。従ってこの式は全 s 平面における有理型関数を表す。

以上により $\Gamma(s)\zeta(s, x)$ は全 s 平面における有理型関数に解析接続されることが分かった。 $\Gamma(s)$ 自体が全 s 平面における有理型関数に解析接続されるので、これは $\zeta(s, x)$ が全 s 平面における有理型関数に解析接続されることを意味する。

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{1-e^{-u}} u^s \frac{du}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} \frac{(-1)^n}{n+s-1}$$

は $s = 1, 0, -1, \dots$ に 1 位の極を持つ可能性がある他は正則であり、 $s = 1 - n$ における留数は $\frac{B_n(x)}{n!} (-1)^n$ である。(もしもこの値が 0 であれば、極は持たない。)

$\Gamma(s)$ が $s = 1 - n$ に 1 位の極を持ち、その留数が $(-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$ であったことと合わせると、次が結論される。

系 3-2-3 $\zeta(1-n, x) = -\frac{1}{n} B_n(x)$ □

特に $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$, $B_n(1) = B_n$ であるから次も結論される。

系 3-2-4

- (1) $\zeta(s)$ は負の偶数値において零点を持つ。つまり $\zeta(-2m) = 0$
- (2) $\zeta(s)$ は負の奇数値において Bernoulli 数で表される有理数値を持つ¹。 $\zeta(1-2m) = -\frac{1}{2m} B_{2m}$

□

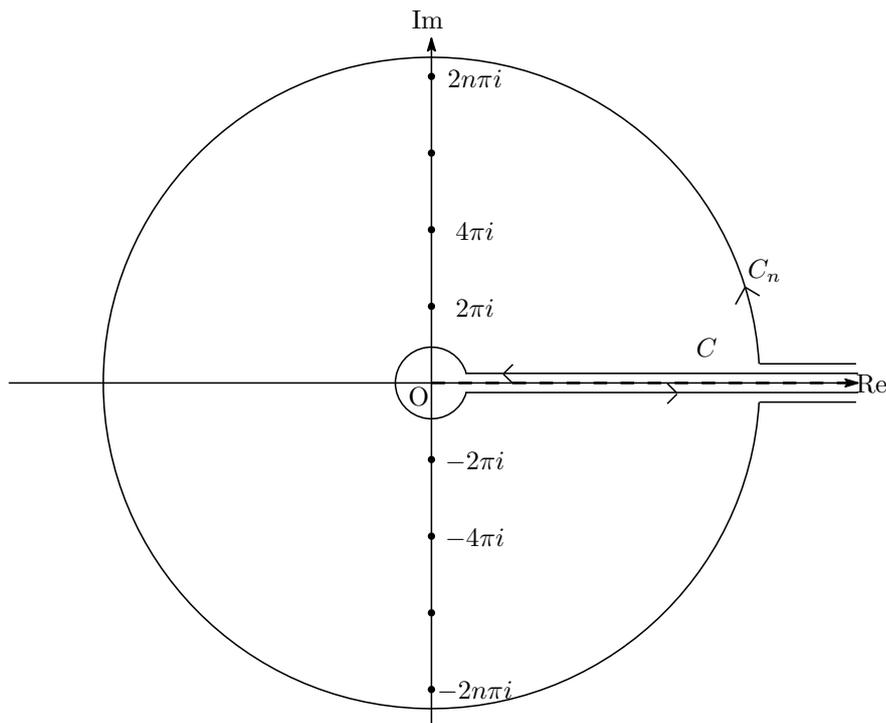
例 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \zeta(-5) = -\frac{1}{252}, \zeta(-7) = \frac{1}{240}, \zeta(-9) = -\frac{1}{132},$
 $\zeta(-11) = \frac{691}{32760}, \zeta(-13) = -\frac{1}{12}$

¹ 暗記的には $\zeta(1-2m) = \sum n^{2m-1} \doteq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \{B_{2m}(x) - B_{2m}\} \doteq -\frac{1}{2m} B_{2m}$ と覚えるとよい。無限大に発散するところが 0 になっているが、無限和の場合はよくあることであろう。

解説 3-2-5 方法 2 Riemann 方法 1 (ただし $x = 1$) で得られる関係式

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

が, そのままでは全 s 平面で定義できないのは, $u = 0$ で被積分関数が発散するからである. そこで実軸無限大の少し上 $+\infty + 0i$ から $+\delta + 0i$ までたどり, 原点の周りを反時計回りに小さく一周し, $+\delta - 0i$ から $+\infty - 0i$ までたどる経路 C を考え, 同じ関数の経路 C に沿う積分を考える. ただし u^s の枝は, $u + 0i$ において $e^s \log u$ となるようにとる. $u - 0i$ では $e^{s(\log u + 2\pi i)} = e^{2\pi i s} u^s$ ということになる.



この経路における積分であれば, 原点の周りでは適当な半径の円周上を回るとしておくだけでよく, 収束や解析性に問題はない. 収束は $u \rightarrow \infty$ のところだけを気にすればよいが, 指数関数の急減少性よりこの積分は全 s 平面で定義される整関数であることがわかる, 特に $\sigma > 1$ の場合には原点での値が 0 になるので

$$\begin{aligned} \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du &= - \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i s} u^{s-1}}{e^u - 1} du \\ &= (e^{2\pi i s} - 1) \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \end{aligned}$$

が成り立つ. 結局 ($\sigma > 1$ で) 次の等式が得られた. これは $\zeta(s)$ が全平面に解析接続されることを表す.

$$(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s) = \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

ここで $e^{2\pi i s} - 1 = e^{\pi i s}(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}) = 2ie^{\pi i s} \sin \pi s$ と $\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}$ を使うと次の式が得られる.

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\pi i s} \Gamma(1-s) \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

(この内容は関数等式の証明に続く)

注意 3-2-6 Riemann 本人は z 平面を実軸正の部分で切り, $f(z) = \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$ を $z \in \mathbb{R}_+$ で正の実数値を取るように定義した上でそれを解析接続している.

注意 3-2-7 $\int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$ の意味を確定させるために, u 平面から正の実数を除いて \log の枝を指定する必要があったのだが, s が 2 以上の整数の場合その必要はなく $f(u)$ の値は全平面で確定する. この場合経路が消えるので, 積分値は 0 である. つまり $\int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$ は $s = 2, 3, \dots$ を零点に持つ. この零点は $\Gamma(1-s)$ の極 $s = 1, 2, 3, \dots$ のうちの $s \geq 2$ の部分を打ち消し, $\zeta(s)$ が $s > 1$ で正則であることに対応する.

また $s = 1$ の場合, 明らかに積分値は $2\pi i$ である. $\Gamma(1-s)$ は $s = 1$ で 1 位の極を持ちその留数は -1 であるが, これは $\zeta(s)$ が $s = 1$ に一位の極を持ち, 留数が 1 であることに対応する.

系 3-2-8 $\zeta(s)$ の積分表示より, 負整数値での $\zeta(s)$ の値を決定することが出来る.

n を自然数とする. $\zeta(-n) = -\frac{\Gamma(1+n)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz$ であるが, n が整数の場合は \log の枝にかかわらず $(-z)^{-n-1}$ の値が確定するので, 積分経路 C は原点の周りを回る小円だと思ってよい. つまり積分結果は $2\pi i \times (\text{留数})$ である. 実行してみると

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= -\frac{\Gamma(1+n)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz \\ &= -\frac{n!}{2\pi i} \int_C (-1)^{-n-1} \frac{z}{e^z - 1} z^{-n-2} dz \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-n-2} dz \\ &\qquad\qquad\qquad (k - n - 2 = -1 \iff k = n + 1 \text{ の項だけが問題}) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \cdot 2\pi i \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

系 3-2-9

- (1) $\zeta(s)$ は負の偶数値において零点を持つ. つまり $\zeta(-2m) = 0$
- (2) $\zeta(s)$ は負の奇数値において Bernoulli 数で表される有理数値を持つ. $\zeta(1-2m) = -\frac{1}{2m} B_{2m}$

□

注意 3-2-10 この関数等式 $\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\pi i s} \Gamma(1-s) \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$ を左辺と右辺の零点と極の関係でとらえるのも重要 (というか常識) であると思われる.

	零点	極
$\zeta(s)$	-2, -4, -6, -8, ... 非自明な零点	1
$\Gamma(1-s)$	なし	1, 2, 3, 4, 5, ...
$\int_C \frac{u^{s-1}}{e^u-1} du$..., -6, -4, -2, 2, 3, 4, 5, ... 虚数零点	なし

$\int_C \frac{u^{s-1}}{e^u-1} du$ の実零点は次のように考える。

$$\int_C \frac{u^{s-1}}{e^u-1} du = \int_C \frac{u}{e^u-1} u^{s-2} du = \int_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k u^k}{k!} u^{s-2} du = \int_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^{k+s-2} du$$

である。s が整数でない実数の場合は log の枝が閉じないので、積分値は 0 にはならない。s が整数の場合

$$\text{積分値が } 0 \iff u^{-1} \text{ の係数が } 0 \iff B_{1-s} = 0 \iff s = \dots, -6, -4, -2, 2, 3, 4, \dots$$

(Bernoulli 数 B_k が 0 になるのは k が負のとき 3 以上の正の奇数のときである。) ちょうどうまく消し合って左辺と右辺の極、零点が一致するのが分かる。

解説 3-2-11 方法 3 黒川・小山「絶対数学」

まず最初に嘘の証明から。

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s-k} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(s+k) = 1 + \zeta(s) - s\zeta(s+1) + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(s+k) \end{aligned}$$

これがなぜだめかという、 $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1$ だから級数の各項がどれも発散しているためである。($\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$ の $\frac{1}{1^s}$ の部分が原因である。)

収束に注意して変形すると

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^{-s} = 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \\ &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 2^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-k} \\ &= 1 + 2^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1) = 1 + 2^{-s} + \zeta(s) - s\zeta(s+1) + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1) \end{aligned}$$

これより

$$\zeta(s+1) = 1 + \frac{2^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1)$$

二項係数 $\binom{-s}{k}$ は k に関して多項式であり、 $\zeta(s+k) - 1$ は k に関して指数関数的に減少するので、右辺の級数部分は $\text{Re}(s) \geq \sigma > -1$ で絶対一様収束する。これは左辺を見ると $\zeta(s)$ が $\text{Re}(s) > 0$ に解析接続されることを表す。以下 Γ 関数の場合と同様に解析接続を繰り返せばよい。

系 3-2-12

- (1) $\zeta(s)$ は $s = 1$ に一位の極を持ち、そこでの留数は 1 である.
- (2) $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$
- (3) $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$
- (4) $\zeta(-2) = 0$

§ 3 $s = 1$ における Laurent 展開の定数項

$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right) = 0.57721\dots$ を Euler 定数とすると, $\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$ である. これを示しておこう. まずは Euler-Maclaurin の和公式から.

補題 3-3-1 $f(x)$ を C^1 級の関数とする. 次が成り立つ.

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx + \left(a - [a] - \frac{1}{2} \right) f(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) f(b)$$

(これは $f(x)$ の整数値での和を定積分で近似したときの誤差の評価を与える式と見なすことができる.)

証明 $\rho(x) = B_1(x - [x]) = x - [x] - \frac{1}{2}$ と置く. Riemann-Stieltjes 積分の部分積分により

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) d[x] \\ &= \int_a^b f(x) d \left(x - \frac{1}{2} - \rho(x) \right) \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) d\rho(x) \quad \left(\because d \left(x - \frac{1}{2} \right) = dx \right) \\ &= \int_a^b f(x) dx - [f(x)\rho(x)]_a^b + \int_a^b f'(x)\rho(x) dx \end{aligned}$$

従って成り立つ. □

この結果を $\zeta(s)$ に適用しよう. ひとまず $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$ とする.

$$\begin{aligned} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \int_{1-0}^{\infty} \frac{1}{x^s} d[x] \\ &= \int_{1-0}^{\infty} \frac{1}{x^s} dx + \int_{1-0}^{\infty} \left(\frac{-s}{x^{s+1}} \right) \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) dx - \left[\frac{1}{x^s} \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \right]_{1-0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-s} \left[\frac{1}{x^{s-1}} \right]_{1-0}^{\infty} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \end{aligned}$$

$x - [x] - \frac{1}{2}$ は有界だから右辺の積分は $\operatorname{Re}(s) > -1$ で収束する. 従ってこの式は $\zeta(s)$ の $\operatorname{Re}(s) > -1$ までの解析接続を与える. $s = 1$ が一位の極であり, そこでの留数が 1 であることも分かる. そうして

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) &= \frac{1}{2} - \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^2} dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \int_1^N \left(-\frac{1}{x} + \frac{[x]}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \right) dx \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \log N + \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{[x]}{x^2} dx - \left[\frac{1}{2x} \right]_1^N \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \log N + \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{x^2} dx - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \log N - \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{k}{x} \right]_k^{k+1} - \frac{1}{2N} \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \log N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k}{k} \right) - \frac{1}{2N} \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \log N + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2N} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N - \frac{1}{2N} \right) \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

これより $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)$ であり, $\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$ であることがわかった².

注 3-3-2 高次の Euler–Maclaurin の和公式

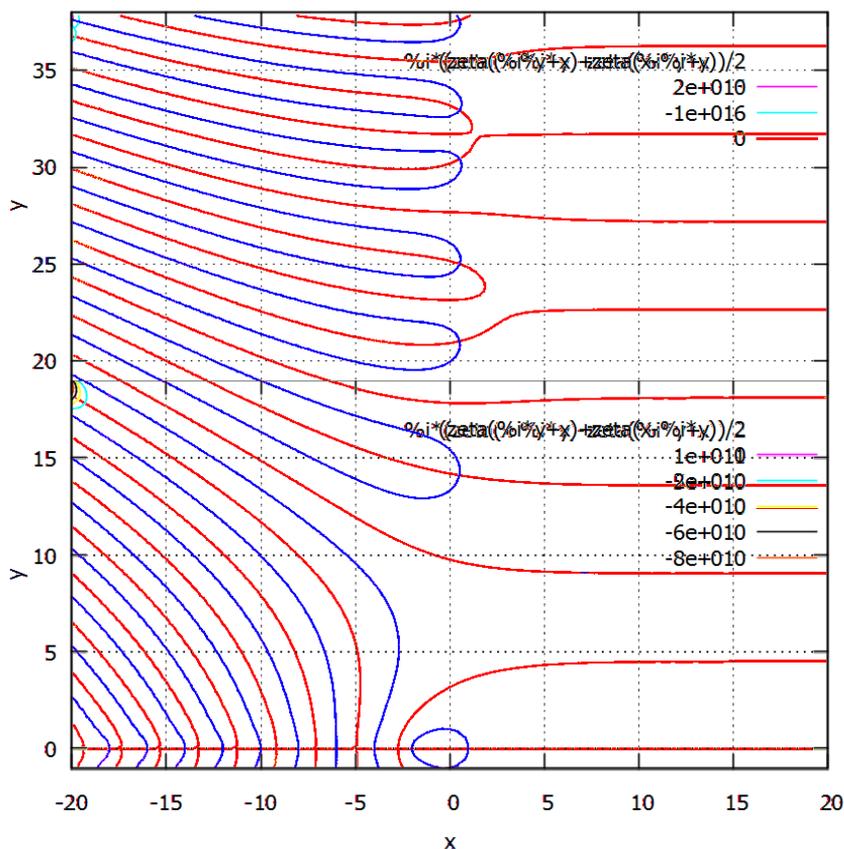
$$\begin{aligned}
&\sum_{a < n \leq b} f(n) \\
&= \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{k=1}^K \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) \\
&\quad + \frac{1}{(2k+1)!} \int_a^b B_{2k+1}(x - [x]) f^{(2k+1)}(x) dx
\end{aligned}$$

を使うと $\zeta(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > -2K$ まで解析接続できることがわかる. K を大きく取ることにより全平面に解析接続されることが証明できる.

§ 4 ζ関数の複素数値の位相

次の図は $\zeta(s)$ の値が実数になる s と純虚数になる s を図示したものである.

² $\zeta(s)$ の $s = 1$ での Laurent 展開 $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (s-1)^m$ の係数 γ_m を一般 Euler 定数と呼ぶ.

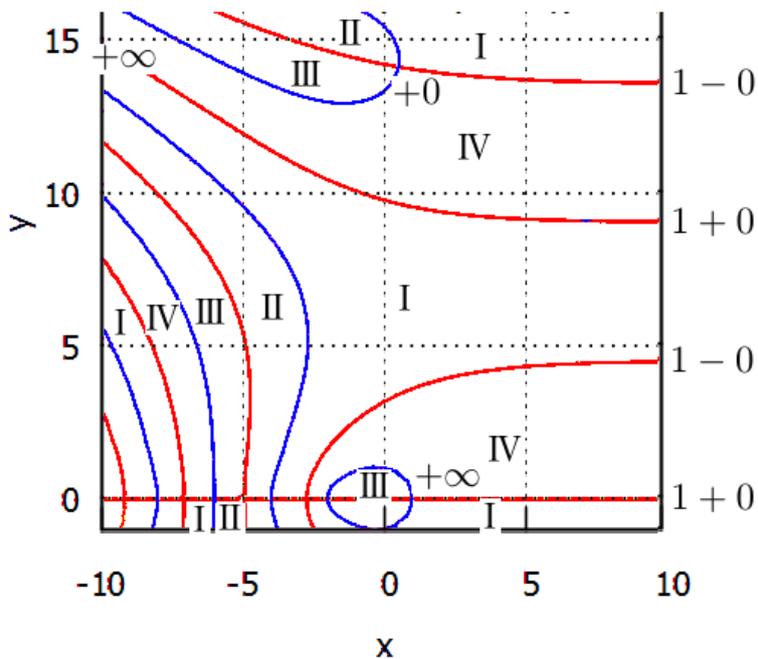


図の赤線が $\{s \in \mathbb{C} \mid \zeta(s) \text{ が実数}\}$, 青線が $\{s \in \mathbb{C} \mid \zeta(s) \text{ が純虚数}\}$ を表す.

赤線と青線の交点が 0 を表す. よく知られているように, 負の偶数で 0 を取る他は $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ だけでしか 0 を取らないだろうというのが見て取れる. ただし交点で赤線と青線は直交しているが, 鉛直, 水平になっているわけではない.

$\text{Re}(s) > 1$ の部分には赤線しかない. 等角写像としてどうなっているのか一瞬迷ったが, 実は $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \zeta(\sigma + i\tau) = 1$ ということであった. つまり Riemann 面として 1 の周りを無限回被覆しているのである.

そのあたりの事情を拡大図で示す.



赤線同士が実軸上で交わっているところは2次の分岐点で、実関数としては極値になっている。その値は $\zeta(-2.7173) = 0.009159890$ (極大), $\zeta(-4.9367) = 0.00398644166$ (極小).
 問題：赤線の幅は $\sigma \rightarrow \infty$ のとき一定値に収束するか？ する場合その意味は？

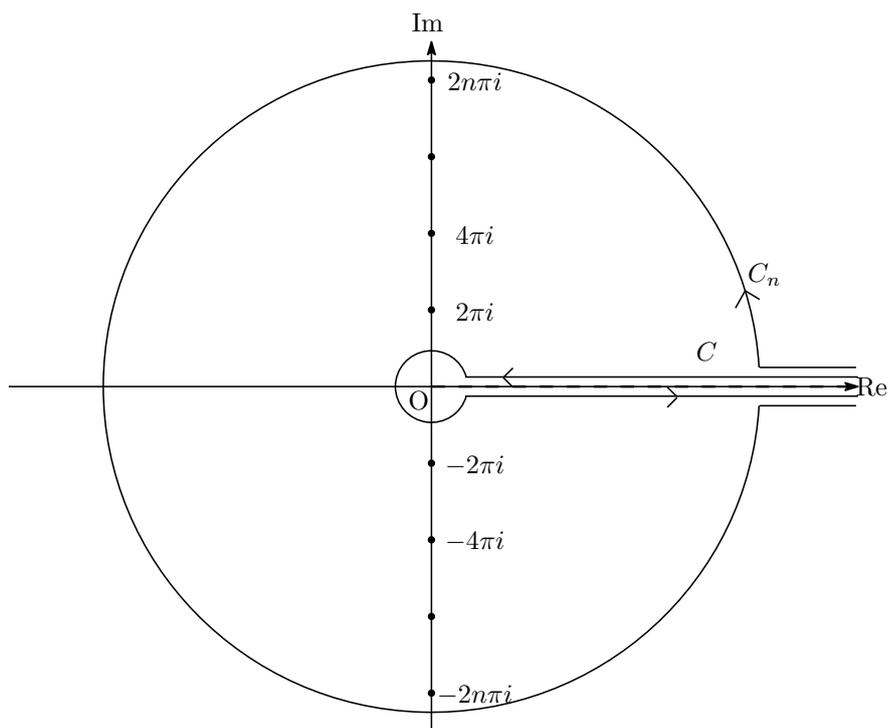
第 4 章

ζ 関数の関数等式

ζ 関数は関数等式 $\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$ を満たす. この証明を 2 通り与えておこう.

§ 1 関数等式の証明 その 1

定理 4-1-1 Riemann 解析接続のところで示したように $\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\pi i s} \Gamma(1-s) \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$ であった.



実軸無限大の少し上 $+\infty+0i$ から $(2n+1)\pi+0i$ までたどり, 原点の周りを反時計回りに半径 $(2n+1)\pi$ で一周し, $(2n+1)\pi-0i$ から $+\infty-0i$ までたどる経路 C_n を考える. 被積分関数は $u = 2\pi ki$ ($k = \pm 2k\pi i$ ($k = 1, 2, \dots, n$)) に一位の極を持ち, そこでの留数は $(2k\pi i)^{s-1}$ なので,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \sum_{k=1}^n \{(2k\pi i)^{s-1} + (-2k\pi i)^{s-1}\}$$

となる. $\text{Re}(s) = \sigma < 0$ とする. $n \rightarrow \infty$ の極限をとるとき, 左辺の積分が 0 に収束することと, 右辺の Σ 部分が $\zeta(1-s) \times$ (簡単な因子) となることを導いてやりたい.

まず $\int_{C_n} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$ に関して. 分母の $e^u - 1$ は n が大きいとき虚軸をほぼ水平に横切るが, $u = x + (2n+1)\pi i$ における値は $e^u - 1 \doteq e^{x+(2n+1)\pi i} - 1 = -(e^x + 1) \doteq -2$ である. そこで $n \rightarrow \infty$ においては $\left| \frac{1}{e^u - 1} \right| = O(1)$ と思ってよい. 分子は $|u^{s-1}| = (2n+1)^{\sigma-1}$ で $\int_C |du| = 2\pi(2n+1)$ だから $\left| \int_{C_n} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \right| = O((2n+1)^\sigma)$ である. これは 0 に収束する.

次に Σ 部分に関して. 偏角の決め方より

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \{ (2k\pi i)^{s-1} + (-2k\pi i)^{s-1} \} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2k\pi)^{s-1} e^{\frac{\pi i(s-1)}{2}} + (2k\pi)^{s-1} e^{\frac{3\pi i(s-1)}{2}} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2k\pi)^{s-1} e^{\pi i(s-1)} \left(e^{-\frac{\pi i(s-1)}{2}} + e^{\frac{\pi i(s-1)}{2}} \right) \right\} \\ &= -(2\pi)^{s-1} e^{\pi i s} \left(e^{-\frac{\pi i(s-1)}{2}} + e^{\frac{\pi i(s-1)}{2}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} \\ &= -2(2\pi)^{s-1} e^{\pi i s} \cos \frac{\pi(s-1)}{2} \zeta(1-s) \\ &= -2(2\pi)^{s-1} e^{\pi i s} \sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1-s) \end{aligned}$$

以上より次の関数等式が得られた.

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{2\pi i} e^{-\pi i s} \Gamma(1-s) \int_C \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} e^{-\pi i s} \Gamma(1-s) \times 2\pi i \left\{ 2(2\pi)^{s-1} e^{\pi i s} \sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1-s) \right\} \\ &= 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \end{aligned}$$

s を $1-s$ に置き換えて $\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$ を得る. □

この関数等式を左辺と右辺の零点と極の関係でとらえるのも重要 (というか必須) であると思われる.

	零点	極
$\zeta(1-s)$	3, 5, 7, 9, ... 非自明な零点	0
$\Gamma(s)$	なし	0, -1, -2, -3, -4, -5, ...
$\cos \frac{\pi s}{2}$..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...	なし
$\zeta(s)$	-2, -4, -6, ... 非自明な零点	1

ちょうどうまく消し合って左辺と右辺の極, 零点が一致するのが分かる.

定理 4-1-2 完備化された ζ 関数 $\hat{\zeta}(s)$ を $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ と定義すると, $\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s)$ が成り立つ.

証明 天下りに与えられた証明を確認するのは簡単であるが, 自力でこの関数にたどり着くための自然な発想で考えてみよう. うまく $\hat{\zeta}(s)$ を作って $\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s)$ を成り立たせるためには, $\hat{\zeta}(s)$ の零点と極が $s = \frac{1}{2}$ に関して対称になっていなければならない. $\zeta(s)$ は非自明な零点を除いて考えると, $s = -2, -4, -6, \dots$ に零点を持ち $s = 1$ に極を持つので, $s = 0, -2, -4, \dots$ に極を持つ $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ をかけておくと零点が消え極が $s = 0, 1$ に残るのでうまくいきそうである.

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) &= \frac{2}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s) \\ \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) &= \frac{2}{(2\pi)^s} \frac{\Gamma(s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned}$$

この右辺の $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ 以外のごちゃごちゃした部分をすっきりさせたい. Gauss, Legendre の積公式より $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^s} \Gamma(s)$ だから, これを使うと

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) &= \frac{2}{(2\pi)^s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\frac{2\sqrt{\pi}}{2^s}} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{s+\frac{1}{2}}} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned}$$

さらに $\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi(1-s)}{2}} = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi s}{2}}$ を使うと

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) &= \frac{1}{\pi^{s-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}}{\pi^{-\frac{1-s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \\ \Leftrightarrow \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned}$$

□

$\hat{\zeta}(s)$ は $s = 1$ に一位の極 (留数は 1), $s = 0$ に一位の極 (留数は -1) を持つ他は正則である. また実軸上に零点を持たない. 零点は $\zeta(s)$ の自明でない零点で, それは $0 < \text{Re}(s) < 1$ の帯状領域にあり, 零点の全体は実軸および $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ に関して対称である. つまり $\hat{\zeta}(s) = 0$ が $s = \rho$ を解に持てば, $s = \bar{\rho}, s = 1 - \rho, s = 1 - \bar{\rho}$ も解である.¹

¹ $\zeta(s)$ の非自明な零点を ρ で表すと $\hat{\zeta}(s) = \frac{1}{s(s-1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \times \text{定数}$ と表されることが示される. (無限積は $|\rho|$ の小さいものから順にかけるものとする.) 明示公式はこれから導かれる.

§ 2 関数等式の証明 その 2 の準備

テータ関数を使った関数等式の証明のために必要となるので、ここで必要な事実を導いておく。

定理 4-2-1 Jacobi の等式 $x > 0$ とする. $\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ とおくと $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \phi\left(\frac{1}{x}\right)$

つまり $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}$ が成り立つ.

証明 1 $e^{-\pi t^2 x}$ は t に関する急減少関数なので, $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 x}$ は収束し, 周期 1 の連続関数となる. 従っ

て Fourier 級数展開して $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{2m\pi i t}$ と表示できる. ここで a_m は

$$\begin{aligned} a_m &= \int_0^1 f(t) e^{-2m\pi i t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 x} \right) e^{-2m\pi i t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 x} e^{-2m\pi i t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x \left(t + \frac{mi}{x}\right)^2 - \frac{\pi m^2}{x}} dt = e^{-\frac{\pi m^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi m^2}{x}} \end{aligned}$$

であるから $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi m^2}{x}} e^{2m\pi i t}$ に $t = 0$ を代入して結果を得る.

□

証明 2 (Poisson の方法 : Whittaker, Watson p.124)

$f(z) = \frac{e^{-\pi z^2 x}}{e^{2\pi i z} - 1}$ は整数値 $z = n$ で留数 $\frac{1}{2\pi i} e^{-\pi n^2 x}$ を持つ. $f(z)$ を $C : -\left(N + \frac{1}{2}\right) - i \rightarrow +\left(N + \frac{1}{2}\right) - i \rightarrow +\left(N + \frac{1}{2}\right) + i \rightarrow -\left(N + \frac{1}{2}\right) + i \rightarrow -N - i$ の経路で積分し, $N \rightarrow \infty$ とすると

$$\phi(x) = \int_{-\infty - i}^{+\infty - i} \frac{e^{-\pi z^2 x}}{e^{2\pi i z} - 1} dz - \int_{-\infty + i}^{+\infty + i} \frac{e^{-\pi z^2 x}}{e^{2\pi i z} - 1} dz$$

となるのがわかる.

□

ここで $\text{Im}(z) = -1$ の場合 $|e^{2\pi i z}| = e^{2\pi} > 1$ なので

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty - i}^{+\infty - i} \frac{e^{-\pi z^2 x}}{e^{2\pi i z} - 1} dz = \int_{-\infty - i}^{+\infty - i} \frac{e^{-\pi z^2 x}}{e^{2\pi i z}(1 - e^{-2\pi i z})} dz \\ &= \int_{-\infty - i}^{+\infty - i} e^{-\pi z^2 x} e^{-2\pi i z} (1 + e^{-2\pi i z} + e^{-4\pi i z} + e^{-6\pi i z} + \dots) dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty - i}^{+\infty - i} e^{-\pi z^2 x - 2\pi n i z} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty - i}^{+\infty - i} e^{-\pi x \left(z - \frac{ni}{x}\right)^2 - \frac{\pi n^2}{x}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \int_{-\infty - i}^{+\infty - i} e^{-\pi x \left(z - \frac{ni}{x}\right)^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \end{aligned}$$

また $\text{Im}(z) = 1$ の場合 $|e^{2\pi iz}| = e^{-2\pi} < 1$ なので

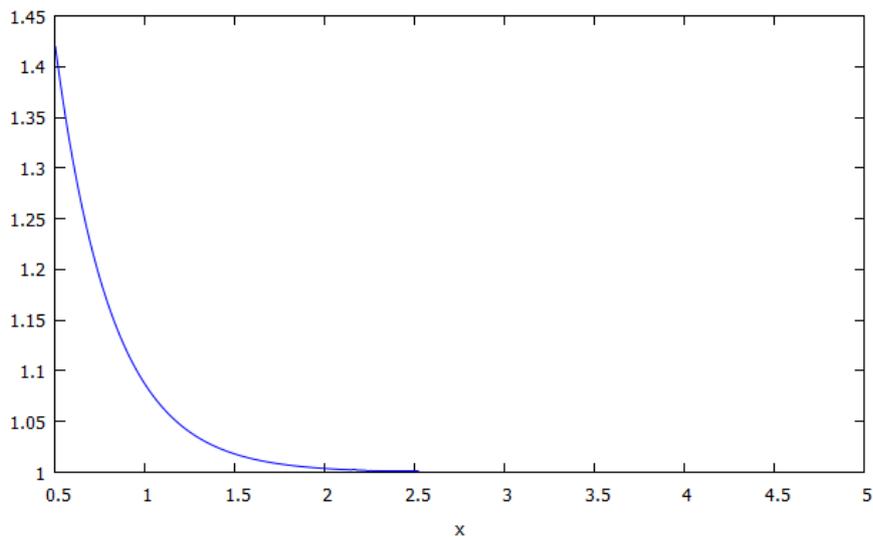
$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty+i}^{+\infty+i} \frac{e^{-\pi z^2 x}}{e^{2\pi iz} - 1} dz = \int_{-\infty+i}^{+\infty+i} \frac{e^{-\pi z^2 x}}{1 - e^{2\pi iz}} dz \\ &= \int_{-\infty+i}^{+\infty+i} e^{-\pi z^2 x} (1 + e^{2\pi iz} + e^{4\pi iz} + e^{6\pi iz} + \dots) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty-i}^{+\infty-i} e^{-\pi z^2 x + 2\pi n iz} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty-i}^{+\infty-i} e^{-\pi x (z + \frac{ni}{x})^2 - \frac{\pi n^2}{x}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \int_{-\infty+i}^{+\infty+i} e^{-\pi x (z + \frac{ni}{x})^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \end{aligned}$$

以上により証明された。 □

注 本来テータ関数 $\theta(z)$ は上半平面上で $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z}$ で定義される関数である。この定理の $\phi(x)$ は

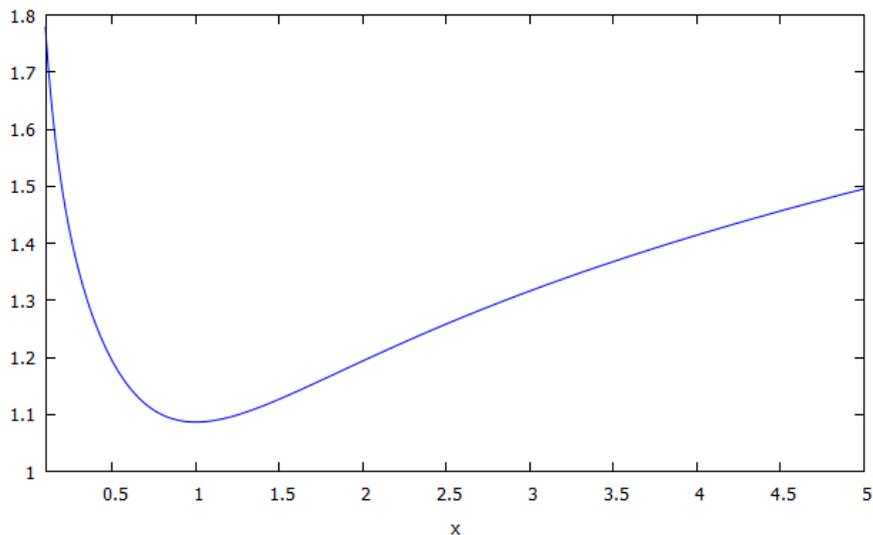
$z = \frac{ix}{2}$ と置き換えたものにほぼ等しい。

$\phi(x)$ のグラフは次のようになる。



ちなみに ϕ の値は $\phi(0.80) = 1.162091289079323$, $\phi(1) = 1.086434811213308$, $\phi(1.25) = 1.03940604737669$ などである。

ただしこれでは関数等式はピンとこない。 $\phi_2(x) = \sqrt[4]{x}\phi(x)$ とおくと関数等式は $\phi_2(x) = \phi_2\left(\frac{1}{x}\right)$ となって視覚的にわかりやすい。その $y = \phi_2(x)$ のグラフは次の通り。



§ 3 関数等式の証明 その 2

定義 4-3-1 完備化された ζ 関数 $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ に対して, 関数等式 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ が成り立つ.

証明 $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ とおく. (これは後に出てくる第二 Chebyshev 関数とは異なる) $\phi(x) = 2\psi(x) + 1$ だから

ら Jacobi の等式より $2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right)$ つまり $\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}$ が成り立つ.

これを使って

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(s) &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t} \left(\frac{\sqrt{t}}{n}\right)^s \frac{dt}{t} \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} (\pi x)^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \quad (t = \pi n^2 x \text{ と置換}) \\ &= \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \int_0^1 \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \end{aligned}$$

$(1, \infty)$ での積分を $x \rightarrow \frac{1}{x}$ と置換すると

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx &= \int_{\infty}^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{s}{2}+1}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) \\
 &= \int_1^{\infty} \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{s}{2}-1}dx \\
 &= \int_1^{\infty} \left(\sqrt{x}\psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}\right)x^{-\frac{s}{2}-1}dx \\
 &= \int_1^{\infty} \psi(x)x^{\frac{1-s}{2}}\frac{dx}{x} + \int_1^{\infty} \frac{1}{2}x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{2}x^{-\frac{s}{2}-1}dx \\
 &= \int_1^{\infty} \psi(x)x^{\frac{1-s}{2}}\frac{dx}{x} + \left[\frac{1}{1-s}x^{\frac{1-s}{2}}\right]_1^{\infty} + \left[\frac{1}{s}x^{-\frac{s}{2}}\right]_1^{\infty} \\
 &= \int_1^{\infty} \psi(x)x^{\frac{1-s}{2}}\frac{dx}{x} - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

従って

$$\hat{\zeta}(s) = \int_1^{\infty} \psi(x)x^{\frac{1-s}{2}}\frac{dx}{x} - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} \psi(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}$$

が得られ $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ が $0 < s < 1$ で成り立つことが分かった。後は解析接続によりすべての s に関してこの等式が成り立つといえる。

□

§ 4 ζ 関数の正整数での値 その2

関数等式が証明されたので、ζ 関数の正整数での値を Bernoulli 数で表すことが出来る。

定理 4-4-1 正の整数 m に対し

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$$

証明 $\zeta(1-2m) = -\frac{1}{2m} B_{2m}$ であった。関数等式より

$$\zeta(1-2m) = \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \Gamma(2m) \cos \frac{\pi 2m}{2} \zeta(2m) = \frac{2}{(2\pi)^{2m}} (2m)! (-1)^m \zeta(2m)$$

であるから

$$\zeta(2m) = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} (-1)^m \zeta(1-2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$$

□

第 5 章

素数定理

§ 1 概要

x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表すとき $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ が成り立つ. これを素数定理という. Gauss が予想し, Hadamard, de la Valée-Pousin が 1896 年に (それぞれ独自に) 解決した. その後いろいろな簡略化が加えられている. この稿では最も簡略な方法で素数定理を証明したい.

一般に, 数列 $\{S_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ での振る舞いを S_n の漸近挙動というが, 素数定理も漸近挙動に関する定理である. 我々が興味があるのは, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($a_k \geq 0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ である場合の S_n の漸近挙動である. 素数定理は

$$a_n = \delta[\pi](n) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が素数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が素数でないとき}) \end{cases} \quad \text{とした場合}^1 \text{ になっている.}$$

そして, この漸近挙動に関する著しい結果に, 次の池原の定理がある.

定理 5-1-1 池原止戈夫 非負実数列 $\{a_n\}$ に対応する Dirichlet 級数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ ($a_n \geq 0$) が $\text{Re}(s) > 1$

で収束し, ある正数 A が存在して $g(s) = f(s) - \frac{A}{s-1}$ が $\text{Re}(s) \geq 1$ まで正則関数として解析接続できるとき,

$$S(x) = \sum_{n \leq x} a_n \sim Ax \text{ が成り立つ.}$$

□

例えば $a_n = 1$ ($\forall n$) の場合は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \zeta(s)$ であるが, $\zeta(s)$ は $s = 1$ に留数 1 の一位の極を持つ以外は $\text{Re}(s) \geq 1$ で正則である. そして確かに $S(x) = [x] \sim x$ が成り立っている.

この定理は驚きである. $\sum_{k=1}^n a_k$ の漸近挙動を知りたいときに, 「では Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ を作って $s = 1$ で留数を調べようか」という発想は, 私にはとても出てきそうにない. (今後そういう局面に出会えたら, 是非試してみたいが.)

先ほどの $\delta[\pi](n)$ に関して池原の定理が使えるかということ, $\pi(x) \sim x$ ではないので使えないはずである. つまり $\sum_{n=1}^{\infty} \delta[\pi](n) n^{-s} = \sum_p p^{-s}$ は $s \rightarrow 1+0$ で発散することは容易に分かるが, 有理型に解析接続できないか $\text{Re}(s) = 1$ 上に $s = 1$ 以外の極を持つかのどちらかであろう. (実は前者である. $\sum_p p^{-s}$ と $\log \zeta(s)$ の差は $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ にお

¹ $\pi(n) = \sum_{k=1}^n \delta[\pi](k)$ である. $\delta[\pi]$ は単に π の階差という意味で用いただけで, 本来定義される順が逆である. 一般的に使用される記号があれば教えてください.

ける正則関数になることが容易に分かる。従って $s \rightarrow 1 + 0$ では $\sum_p p^{-s} \sim \log \zeta(s) \sim \log \frac{1}{s-1}$ である。この解析接続は無限枚の被覆面を持つ。)

しかし素数定理を $\pi(x) \log x \sim x$ と変形し、 $p \ll x$ に対する $\log p$ と $\log x$ の影響の差は小さいだろうと考えて $a_n = \delta[\pi](n) \log n = \begin{cases} \log p & (n \text{ が素数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が素数でないとき}) \end{cases}$ と置けばうまくいきそうである。(実際うまくいく。)

この関数は後ほど定義する $\lambda(n)$ であり、その和分関数 $\sum_{p \leq x} \log p$ は第一 Chebyshev 関数 $\vartheta(x)$ である。そして $\lambda(n)$

から誘導される Dirichlet 級数 $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$ は、実際に $s = 1$ に留数 1 の一位の極を持つ以外は

$\text{Re}(s) \geq 1$ で正則であることが示される。これと池原の定理から $\vartheta(x) \sim x$ が従い、素数定理が導かれるのである。

(実は以下では、第二 Chebyshev 関数 $\psi(x)$ とその階差である von Mangoldt 関数 $\Lambda(n)$ に関して $\psi(x) \sim x$ を導くことにより証明している。これはどちらでもよいのであって、 $\vartheta(x) \sim x$ と $\psi(x) \sim x$ が同値であることは容易に示される。)

注意 5-1-2 池原の定理は普通、数列 a_n に触れずに $S(x)$ の言葉だけで述べられることが多い。それは以下のようになっている。 $S(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ と置くと、

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (S(n) - S(n-1)) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) n^{-s} - \sum_{n=0}^{\infty} S(n) (n+1)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S(n) (n^{-s} - (n+1)^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} s x^{-s-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} s \int_n^{n+1} S(x) x^{-s-1} dx \\ &= s \int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx \end{aligned}$$

これにより定理を次のように言い換えることが出来る。

「 $S(x) = O(x)$ である非負単調増加関数 $S(x)$ があって $f(s) = s \int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx$ が $\text{Re}(s) > 1$ で収束し、ある正数 A が存在して $g(s) = f(s) - \frac{A}{s-1}$ が $\text{Re}(s) \geq 1$ まで正則関数として解析接続できるとき、 $S(x) \sim Ax$ が成り立つ。」² □

しかし a_n の存在を隠す利点はあまりない。 $S(x)$ が a_n の和分関数になっていて $f(s)$ が a_n の母 Dirichlet 級数である (つまり $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$) と解釈する方がわかりやすいのではなからうか。(もちろん $S(x)$ が階段関数になっていない場合は階差を a_n と解釈することは出来ないが。)

以下では池原の定理は、定理 A、定理 B の 2 段階で証明する。まず前半の定理 A について。

$f(s) = s \int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx$ を変形すると

$$\frac{f(s+1)}{s+1} - \frac{A}{s} = \int_1^{\infty} \frac{S(x) - Ax}{x^{s+2}} dx$$

² $0 \leq x < 1$ のとき $S(x) = 0$ として積分区間を $[0, \infty)$ に広げると、この式は $\frac{f(-s)}{-s}$ が $S(x)$ の Mellin 変換であることを表している。(それがどのような意味を持つかは不明)

となるが、仮定よりこの左辺は $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ で正則である。この結果に次の定理 A を適用する。

定理 5-1-3 (定理 A) 有界, 局所可積分³な $g(x)$ があって $\int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{s+1}} dx$ が $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ まで正則に解析接続されるとする。このとき $\int_1^\infty \frac{g(x)}{x} dx$ が有限確定値に収束し, その値は $\lim_{s \rightarrow +0} \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{s+1}} dx$ に等しい。

□

系 5-1-4 $S(x) \sim O(x)$ である有界, 局所可積分な関数 $S(x)$ に対し $\int_1^\infty \frac{S(x) - Ax}{x^{s+2}} dx$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で正則な関数となるが, これが $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ まで正則に解析接続されるとする。このとき $\int_1^\infty \frac{S(x) - Ax}{x^2} dx$ が有限確定値に収束し, その値は $\lim_{s \rightarrow +0} \int_1^\infty \frac{S(x) - Ax}{x^{s+2}} dx$ に等しい。

証明 定理 A において $g(x) = \frac{S(x) - Ax}{x}$ とすればよい。

□

定理 A は Laplace 変換の形で述べられることが多い。 $x = e^t$ と置換すると

$$\int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{s+1}} dx = \int_0^\infty g(e^t)e^{-st-t} (e^t dt) = \int_0^\infty g(e^t)e^{-st} dt$$

であるから $g(e^t) = I(t)$ と置くと次の定理が導かれる。この場合, 系の証明は $I(t) = f(e^t)e^{-t} - A$ と置くことによってなされる。

定理 5-1-5 (定理 A') 有界, 局所可積分な $I(t)$ に対し, $I(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}I(s) = \int_0^\infty I(t)e^{-st} dt$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で正則な関数となるが, これが $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ (を含むある開領域) まで解析接続できるとする。このとき, $\int_0^\infty I(t) dt$ が存在し, この積分値は (解析接続した意味での) $\mathcal{L}I(0)$ に等しい。要するに $\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^T I(t)e^{-st} dt$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T I(t)e^{-st} dt$ が成り立つ。 (左辺 = $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T I(t) dt = \int_0^\infty I(t) dt$, 右辺 = $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}I(s)$ である。)

□

池原の定理の証明における後半部分は次の通りである。

定理 5-1-6 (定理 B) 非負単調増加である関数 $S(x)$ があって $\int_1^\infty \frac{S(x) - Ax}{x^2} dx$ が有限確定値に収束する場合, $S(x) \sim Ax$ が成り立つ。

□

§ 2 証明の流れ

本稿では以下のように証明を進める。目的意識から問題を追っていくので, 論理の逆順に証明していくことになる。

(1) 第一 Chebyshev 関数 $\vartheta(x)$, その階差数列である $\lambda(n)$, 第二 Chebyshev 関数 $\psi(x)$, その階差数列である von Mangoldt 関数 $\Lambda(n)$ を定義し, 基本的な性質を調べる。

(2) $\psi(x) \sim x$ の成立から素数定理が導かれることを証明する。(感覚的には $\psi(x) = \sum_{p_i \leq x} \log p_i^{m_i} \doteq \pi(x) \log x$

により納得がいく。) また $\vartheta(x) \sim x$ から素数定理が導かれることも証明する。

³ 単調増加性は定理 A には必要ない。定理 B で必要とする。

(3) $\psi(x) \sim x$ であるためには $\int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx$ が収束することが十分条件であることを証明する. (定理 B の証明)

(4) $\int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx = \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1) dt$ である. この値が存在するための十分条件は $\mathcal{L}[\psi(e^t)e^{-t} - 1](s) = \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1)e^{-st} dt$ が $\text{Re}(s) \geq 0$ で正則に解析接続されることである. (定理 A の証明)

(5) $\mathcal{L}[\psi(e^t)](s) = \int_0^\infty \psi(e^t)e^{-st} dt = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ が分かるので, (3) が成り立つためには $\zeta(s)$ が $\text{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たないことを示せばよい. ($\text{Re}(s) = 1$ 上に零点が存在しないことの証明)

一番のポイントを繰り返しておく. 素数定理の証明には $\zeta(s)$ が $\text{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たないことの証明が重要だということはよく知られているが, それがなぜ重要かと言えば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\psi(e^t)e^{-t} - 1](s) &= \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1)e^{-st} dt = -\frac{1}{s+1} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s+1) - \frac{1}{s} \\ \text{および} \quad \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1) dt &= \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx \end{aligned}$$

において $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1)e^{-st} dt = \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1) dt$ が成り立つためには $\int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1)e^{-st} dt$ すなわち $-\frac{1}{s+1} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s+1) - \frac{1}{s}$ が $\text{Re}(s) \geq 0$ まで正則に解析接続されることが十分条件だからである.

この Laplace 変換に関する Tauber 型の定理 $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[I(t)](s) = \int_0^\infty I(t) dt$ (定理 A': Wiener-池原の定理) を, 留数解析を用いる簡明な証明方法 (Newman) によって示す.

§ 3 Chebyshev 関数・von Mangoldt 関数など

この節移項では前節「証明の流れ」に沿って実際に証明していく. まず重要な数論的関数の定義から.

定義 5-3-1

$x > 0$ とする. また n を自然数とする. 以下のように関数を定義する.

(1) 第一 Chebyshev 関数 $\vartheta(x) : \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$

- ① $\vartheta(x)$ は x 以下の素数すべての積の対数である. 例: $\vartheta(10) = \log 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- ② $\vartheta(x) \sim x$ であることが示される. 素数定理はこれから直ちに従う.

(2) 第二 Chebyshev 関数 $\psi(x) : \psi(x) = \log\{\text{l.c.m}(1, 2, \dots, [x] - 1, [x])\}$

- ① 例: $\psi(100) = \log 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97$ である. 数値計算すると $\psi(100) = 94.04$ となる.
- ② $\psi(x) \sim x$ が成り立つ (後出). これから素数定理が証明される.

③ $\vartheta(x)$ と $\psi(x)$ には $\psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \vartheta(\sqrt[k]{x}) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots$ の関係がある. これより

$\vartheta(x) \sim x \iff \psi(x) \sim x$ が直ちに従う.

(3) von Mangoldt 関数 $\Lambda(n) : \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^m \text{ (} p : \text{素数) のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

① $\Lambda(n)$ は第二 Chebyshev 関数の階差関数になっている : $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n - 1)$

② $\Lambda(n)$ の母 Dirichlet 級数は $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ である, つまり $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{p, m} \frac{\log p}{p^{ms}}$

(4) $\lambda(n) : \lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p \text{ (} p : \text{素数) のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

① $\lambda(n)$ は第一 Chebyshev 関数の階差関数になっている : $\lambda(n) = \vartheta(n) - \vartheta(n - 1)$

② $\lambda(n)$ の母 Dirichlet 級数を $\Phi(s)$ と置くと $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$ である. これは $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$

と $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ において解析関数程度の差しかないことが示される.

(5) Möbius 関数 $\mu(n) : \mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ (-1)^r & (n = p_1 p_2 \cdots p_r) \\ 0 & n \text{ が平方因子を持つとき} \end{cases}$

(6) Euler 関数 $\varphi(n) : \varphi(n) = \#\{k \mid k \geq 1, (k, n) = 1\}$

定理 5-3-2 Möbius の反転公式より数論的関数 $f(n), g(n)$ に対して

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

が成り立つ. 以下のような重要な実例がある.

(1) $f(n) = 1$ (定数関数), $g(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$ とする. $1 = \sum_{d|n} g(d)$ は成り立っている. この反転公式は

$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$ である. この公式は直接証明も容易. (というより, 反転公式はこの関係式を使って証明される.)

(2) $f(n) = n, g(n) = \varphi(n)$ とする. $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ は成り立っている. この反転公式は $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$ である.

(3) $f(n) = \log n, g(n) = \Lambda(n)$. 元の公式は $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$, 反転公式は $\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d = \Lambda(n)$.

定理 5-3-3 $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ (つまり $\mu(n)$ に対応する母 Dirichlet 級数は $\frac{1}{\zeta(s)}$)

証明 Möbius 関数 $\mu(n)$ は乗法的関数だから Euler 積より

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \prod_p (\mu(1) + \mu(p)p^{-s} + \mu(p^2)p^{-2s} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{-s}}.$$

□

$f(n), g(n), h(n)$ に対する (形式的) 母 Dirichlet 級数をそれぞれ $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$
 $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$ とおくと,

$$H(s) = F(s)G(s) \iff h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

である. 従って次が成り立つ.

$$(1) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff F(s) = \zeta(s)G(s),$$

$$(2) \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \iff G(s) = \frac{1}{\zeta(s)} F(s)$$

命題 5-3-4
$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

証明 1 $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ に対応する形式的 Dirichlet 級数の等式は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$

ここで左辺は明らかに $-\zeta'(s)$ である. 従って $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ が得られた.

もちろん $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ を $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d$ と変形してから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$ としてもよい.

証明 2 $-\log \zeta(s) = \sum_p \log(1 - p^{-s}) \left(= -\sum_{m, p} \frac{1}{mp^{ms}} \right)$ の両辺を微分して

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_p \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} = \sum_p (p^{-s} + p^{-2s} + \dots) \log p = \sum_p \left(\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^{2s}} + \frac{\log p}{p^{3s}} + \dots \right) \\ &= \sum_p \left(\frac{\Lambda(p)}{p^s} + \frac{\Lambda(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\Lambda(p^3)}{p^{3s}} + \dots \right) = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} \end{aligned}$$

としても分かる. □

§ 4 $\psi(x) \sim x$ および $\vartheta(x) \sim x$ の十分性

この節では $\psi(x) \sim x$ もしくは $\vartheta(x) \sim x$ が成立すれば素数定理が導かれることを示す.

定理 5-4-1 $\vartheta(x) = O(x)$ である. (Zagier)

証明 $n < p \leq 2n$ の素数は二項係数 ${}_{2n}C_n$ をちょうど一回だけ割りきるので,

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \geq {}_{2n}C_n \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$$

これより $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n \log 4$ がわかる. 整数値とは限らない場合,

$$\vartheta(2x) - \vartheta(x) \leq (\vartheta(2[x]) + \log 2x) - \vartheta([x]) \leq 2[x] \log 4 + \log 2x \leq 2x \log 4 + 2x$$

だから

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) &\leq x \log 4 + x \\ \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) - \vartheta\left(\frac{x}{4}\right) &\leq \frac{x}{2} \log 4 + \frac{x}{2} \\ \dots &\dots \dots \end{aligned}$$

を辺々足して $\vartheta(x) \leq 2x \log 4 + 2x$ を得る. 従って $\vartheta(x) = O(x)$ が成り立つ.

□

定理 5-4-2 $\psi(x) \sim x$ が成り立つことを仮定すると素数定理 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ も成り立つ. (末綱)

証明 区間 $[1, x]$ を前半 $[1, w]$ と後半 $(w, x]$ に分割する. (w をどれぐらいに決めればよいのかは後で議論する.)

すると,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \log 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdots p_{\pi(x)}^{m_{\pi(x)}} \\ &\leq \pi(x) \log x && (\because \forall i, p_i^{m_i} \leq x) \\ &\leq \pi(w) \log x + \sum_{w < p \leq x} \frac{\log p}{\log w} \log x \\ &\leq \pi(w) \log x + \frac{\log x}{\log w} \sum_{w < p \leq x} \log p \\ &\leq \pi(w) \log x + \frac{\log x}{\log w} \psi(x) && (\text{ずいぶん気前のよい評価だ}) \end{aligned}$$

従って $\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{\pi(w) \log x}{x} + \frac{\log x}{\log w} \cdot \frac{\psi(x)}{x}$ が得られる. うまく w を決めて $\frac{\pi(w) \log x}{x} \rightarrow 0$

かつ $\frac{\log x}{\log w} \rightarrow 1$ と出来ればよいが, これは $w = \frac{x}{(\log x)^2}$ とすることで実現できる. □

定理 5-4-3 $\vartheta(x) \sim x$ が成り立つことを仮定すると素数定理 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ も成り立つ.

証明

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x$$

こちら側の評価は上とほぼ同じ. つぎに ϵ を微小な正の数として

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} (1 - \epsilon) \log x = (1 - \epsilon) (\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \log x$$

これより

$$\frac{\vartheta(x)}{1 - \epsilon} \geq (\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \log x \iff \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{1}{1 - \epsilon} \cdot \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\pi(x^{1-\epsilon}) \log x}{x}$$

が得られる. $\pi(x^{1-\epsilon}) \leq x^{1-\epsilon}$ だから, この不等式はさらに次のように変形できる.

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{1}{1 - \epsilon} \cdot \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^\epsilon}$$

先の不等式と合わせて次の不等式を得る.

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^\epsilon}$$

$x \rightarrow \infty$ とすると $\frac{\vartheta(x)}{x} \rightarrow 1$, $\frac{\log x}{x^\epsilon} \rightarrow 0$ より次の評価を得る,

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon}$$

以上より証明された⁴. □

定理 5-4-4 $\vartheta(x) \sim x \iff \psi(x) \sim x$

証明 (\Rightarrow について) $\vartheta(x) \sim x$ とすると, あらゆる x に対し $\vartheta(x) \leq Mx$ となる正数 M が存在する. また $n > \log_2 x \iff x^{1/n} < 2 \iff \vartheta(x^{1/n}) = 0$ なので, $\log_2 x < N \leq 1 + \log_2 x$ となる N をとると

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \cdots + \vartheta(x^{1/N}) \leq \vartheta(x) + Mx^{1/2} + Mx^{1/3} + \cdots + Mx^{1/N} \leq \vartheta(x) + Mx^{1/2} \log_2 x$$

(2 から N まで $N-1$ 個の和が存在し, $N-1 \leq \log_2 x$ である.)

従って $\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{M \log_2 x}{x^{1/2}}$ が成り立ち, 題意は証明される.

(\Leftarrow について) $\psi(x) \sim x$ とすると, あらゆる x に対し $\psi(x) \leq Mx$ となる正数 M が存在する. $\vartheta(x) \leq \psi(x)$ だから $\vartheta(x) \leq Mx$ も成り立つ. 後は (1) のはさみうちを逆に解いて $\frac{\psi(x)}{x} - \frac{M \log_2 x}{x^{1/2}} \leq \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x}$ より成立する.

§ 5 定理 B の証明

定理 5-5-1 (定理 B) $S(x)$ を広義単調増加な局所可積分関数とする. $\int_1^\infty \frac{S(x) - x}{x^2} dx$ が収束するならば, $S(x) \sim x$ である.

(後で示すように $\vartheta(x)$ や $\psi(x)$ はこの $S(x)$ の条件を満たす.)

証明 仮に $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} > 1$ としよう. λ を $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} > \lambda > 1$ となるようにとる. $x_1 < x_2 < \cdots \rightarrow \infty$

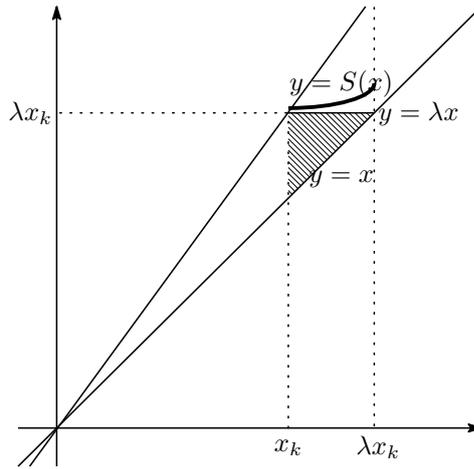
ですべての k に対し $\frac{S(x_k)}{x_k} > \lambda$ となるものがとれる. $S(x)$ は広義単調増加だから $x \in [x_k, \lambda x_k]$ に対し

$$S(x) \geq S(x_k) > \lambda x_k \text{ が成り立つ. 従って } \int_{x_k}^{\lambda x_k} \frac{S(x) - x}{x^2} dx \geq \int_{x_k}^{\lambda x_k} \frac{\lambda x_k - x}{x^2} dx = \int_1^\lambda \frac{\lambda x_k - x_k u}{(x_k u)^2} x_k du = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du$$

最後の定積分は k によらないある正の値 $(\lambda - 1 - \log \lambda)$ をとる. ところが $\int_{x_k}^{\lambda x_k} \frac{S(x) - x}{x^2} dx$ は $k \rightarrow \infty$ のとき

0 に収束しなければならない. これは矛盾である. 従って $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} \leq 1$

⁴ $\psi(x) \geq \vartheta(x)$ だから, 3 行目以降の不等式はそのまま $\psi(x)$ に置き換えても成立する.



次に $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} < 1$ としよう. λ を $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} < \lambda < 1$ となるようにとる. $x_1 < x_2 < \dots \rightarrow \infty$ ですべての k に対し $\frac{S(x_k)}{x_k} < \lambda$ となるものがとれる. $S(x)$ は広義単調増加だから $x \in [\lambda x_k, x_k]$ に対し $S(x) \leq S(x_k) < \lambda x_k$ が成り立つ. 従って $\int_{\lambda x_k}^{x_k} \frac{S(x) - x}{x^2} dx \leq \int_{\lambda x_k}^{x_k} \frac{\lambda x_k - x}{x^2} dx = \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda x_k - x_k u}{(x_k u)^2} x_k du = \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda - u}{u^2} du$ 最後の定積分は k によらないある負の値 $(-\lambda + 1 + \log \lambda)$ をとる. ところが $\int_{\lambda x_k}^{x_k} \frac{S(x) - x}{x^2} dx$ は $k \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束しなければならない. これは矛盾である. 従って $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} \leq 1$

以上より $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = 1$ が証明された. □

定理 5-5-2 定理 A の成立を仮定すれば $\int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx$ は収束する.

証明 先に見たように $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ である. これを変形する.

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{(n+1)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) s \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} dx = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx = s \int_0^{\infty} \psi(e^t) e^{-st} dt$$

これは $\psi(e^t)$ のラプラス変換が $-\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ であることを意味している. $-\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ は $\text{Re}(s) \geq 1$ で有理型に解析接続され, $s = 1$ でのみ留数 1 の極を持つ他は正則だから, $\psi(e^t)$ のラプラス変換を -1 だけ平行移動し極を取り除くためには $I(t) = \psi(e^t)e^{-t} - 1$ の Laplace 変換を考えればよい. $I(t)$ のラプラス変換について

$$\mathcal{L}I(s) = \int_0^{\infty} I(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \psi(e^t)e^{-(s+1)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+1} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s+1) - \frac{1}{s}$$

この結果の $-\frac{1}{s+1} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s+1) - \frac{1}{s}$ は $\text{Re}(s) \geq 0$ において正則である. $\psi(x) = O(x)$ なので $I(t)$ は有界であり,

次に示す定理 5-3-6 の条件を満たすことになる. 従って $\mathcal{L}I(0) = \int_0^{\infty} I(t) dt$ が存在する. しかるに

$$\mathcal{L}I(0) = \int_0^{\infty} I(t) dt = \int_0^{\infty} (\psi(e^t)e^{-t} - 1) dt = \int_0^{\infty} \frac{\psi(e^t) - e^t}{e^t} dt = \int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx$$

であるから題意は示されたことになる.

注意 1 上の式変形は Stieltjes 積分になれた人なら次のようにするのだろうか?

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} d\psi(x) = \left[\frac{1}{x^s} \psi(x) \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} (-s) \frac{1}{x^{s+1}} \psi(x) dx = s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} \psi(x) dx$$

もしくは $\psi(x)$ が Heaviside 関数 $H(x)$ を使って $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)H(x-n)$ と表されることより

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \\ &= \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{x^s} \delta(x-n) dx \\ &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)H(x-n)}{x^s} \right]_1^{\infty} + s \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)H(x-n)}{x^{s+1}} dx \\ &= \left[\frac{1}{x^s} \psi(x) \right]_1^{\infty} + s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} \psi(x) dx \\ &= s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} \psi(x) dx \end{aligned}$$

注意 2 上で $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = s \int_0^{\infty} \psi(e^t)e^{-st} dt$ なる式が得られたが, これは $\psi(e^t)$ のラプラス変換が $-\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ であることを意味している. その場合 Laplace 変換の公式より $\frac{d\psi(e^t)}{dt}$ (超関数!) の Laplace 変換が $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ になるはずである. それを確かめよう.

$$\psi(x) = \sum'_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{m, p} H(x-p^m) \text{ より } \psi(e^t) = \sum_{m, p} H(e^t-p^m). \text{ 従って } \frac{d\psi(e^t)}{dt} = \sum_{m, p} \delta(e^t-p^m)e^t \text{ であり,}$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d\psi(e^t)}{dt} \right] (s) = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{m, p} \delta(e^t-p^m)e^t \right\} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{p, m} \delta(x-p^m)x^{-s} dx = \sum_{p, m} p^{-ms} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

§ 6 定理 A の証明

定理 5-6-1 Wiener-池原 (定理 A') $I(t)$ を有界, 局所可積分な関数とすると, $I(t)$ の Laplace 変換

$\mathcal{L}I(s) = \int_0^{\infty} I(t)e^{-st} dt$ は $\text{Re}(s) > 0$ で正則な関数となるが, これが $\text{Re}(s) \geq 0$ (を含むある開領域) まで解析接

続できるとする. このとき, $\int_0^{\infty} I(t) dt$ が存在し, この積分値は (解析接続した意味での) $\mathcal{L}I(0)$ に等しい. 要する

に $\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^T I(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T I(t)e^{-st} dt$ が成り立つ.

(左辺 = $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T I(t) dt = \int_0^{\infty} I(t) dt$, 右辺 = $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}I(s)$ である.)

証明 Newman $g(s)$ を $\int_0^{\infty} I(t)e^{-st} dt$ の解析接続とする. $\text{Re}(s) > 0$ においては $g(s) = \int_0^{\infty} I(t)e^{-st} dt$ である.

($\operatorname{Re}(s) \leq 0$ においては正則であること以外何も分かっていない.) また $g_T(s) = \int_0^T I(t)e^{-st} dt$ と置く. $g_T(s)$ は全平面で正則であり, $g_T(0) = \int_0^T I(t) dt$ である. $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0) = g(0)$ を示したい.

十分大きな R と (R に依存してもよい) 小さな $\delta(R)$ で, $g(s)$ が $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| \leq R, \operatorname{Re}(s) \geq -\delta(R)\}$ において正則となるものをとる. この領域の境界 (反時計回り) を C とする. Cauchy の積分定理より

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(s) - g_T(s))e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$$

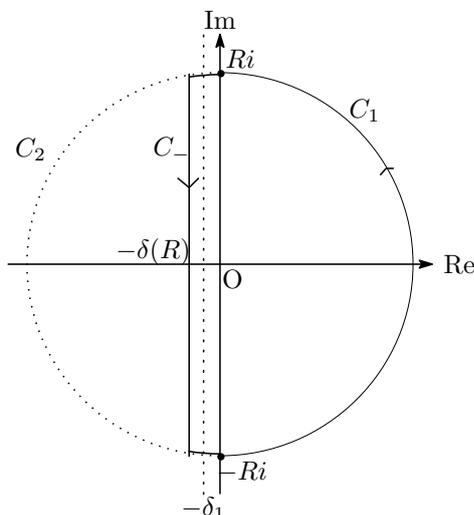
左辺は R によらない T の関数である. これを $F(T)$ と置く. $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T) = 0$ を言いたい. 証明の方針は次の通り.

- (1) 右辺の積分を 4 つの関数 $F_1(T, R), F_2(T, R), F_3(T, R, \delta_1), F_4(T, R, \delta_1)$ の和に分割する.
- (2) $|F_1(T, R)| \leq \frac{B}{R}$ を示す. (B は T, R によらない定数.)
- (3) $|F_2(T, R)| \leq \frac{B}{R}$ を示す.
- (4) $|F_3(T, R, \delta_1)| \leq C(R)\delta_1$ を示す. ($C(R)$ は R には依存するが T には依存しない定数.)
- (5) (4) の R, δ_1 に対し, $\lim_{T \rightarrow \infty} |F_4(T, R, \delta_1)| = 0$ を示す.

これが成り立つ場合, 任意の $\varepsilon (> 0)$ に対して

- (1) $\frac{B}{R} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ となる R をとる. (T には依らない.) $|F_1(T, R)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ が成り立つ.
- (2) $|F_2(T, R)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ も成り立つ.
- (3) (1) の R に対して $|F_3(T, R, \delta_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ となる δ_1 をとる. (T には依らない.)
- (4) (1), (3) の R, δ_1 に対し, $T \geq T_0$ であれば $|F_4(T, R, \delta_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ が成り立つような T_0 を取ることが出来る.

以上の手順により, $T \geq T_0$ に対し $|F(T)| \leq |F_1(T, R)| + |F_2(T, R)| + |F_3(T, R, \delta_1)| + |F_4(T, R, \delta_1)| \leq \varepsilon$ が示されるのである. 実際の $F(T)$ の分割は以下のように定義する.



まず $C_1 = C \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ における積分を考えて、 $F_1(T, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (g(s) - g_T(s))e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ と置く。この領域においては $g(s) = \int_0^\infty I(t)e^{-st} dt$ が成り立つので、 $\max |I(t)| = B$ とすると

$$|g(s) - g_T(s)| = \left| \int_T^\infty I(t)e^{-st} dt \right| \leq B \int_T^\infty |e^{-st}| dt = B \int_T^\infty e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = B \left[-\frac{e^{-\operatorname{Re}(s)t}}{\operatorname{Re}(s)} \right]_T^\infty = \frac{Be^{-\operatorname{Re}(s)T}}{\operatorname{Re}(s)}$$

この値自体は $\operatorname{Re}(s) \rightarrow 0$ のとき発散する可能性があるが、 C_1 上の複素数 s を $s = Re^{i\theta}$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) と置くと

$$\left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| = |1 + e^{2i\theta}| = |e^{i\theta}(e^{-i\theta} + e^{i\theta})| = 2 \cos \theta = \frac{2\operatorname{Re}(s)}{R}$$

が小さいので

$$\begin{aligned} |F_1(T, R)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (g(s) - g_T(s))e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Be^{-\operatorname{Re}(s)T}}{\operatorname{Re}(s)} \cdot e^{\operatorname{Re}(s)T} \cdot \frac{2\operatorname{Re}(s)}{R} \cdot \frac{\pi R}{R} \\ &= \frac{B}{R} \end{aligned}$$

次に $C_- = C \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) < 0\}$ における積分を考えるが、この領域においては $g(s)$ と $g_T(s)$ を別々に扱う。 $F_2(T, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(s)e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ と置く。 $g_T(s)$ は全 s 平面で正則だから、積分経路 C_- を半円 $C_2 = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| = R, \operatorname{Re}(s) < 0\}$ に取り替えてもよい。 C_2 上では次の評価が成り立つ。 $(\operatorname{Re}(s) < 0)$ に注意)

$$|g_T(s)| = \left| \int_0^T I(t)e^{-st} dt \right| \leq B \int_0^T |e^{-st}| dt = B \int_0^T e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = B \left[-\frac{e^{-\operatorname{Re}(s)t}}{\operatorname{Re}(s)} \right]_0^T \leq \frac{Be^{-\operatorname{Re}(s)T}}{|\operatorname{Re}(s)|}$$

残りの因子の評価は先ほどと同じであり

$$|F_2(T, R)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g_T(s)e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{B}{R}$$

が従う。

$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(s)e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ に関してはこの積分をさらに 2 つに分割して考える。 $0 < \delta_1 < \delta(R)$ を満たす δ_1 に対して $C_3 = C_- \cap \{s \in \mathbb{C} \mid -\delta_1 < \operatorname{Re}(s) < 0\}$, $C_4 = C_- \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) < -\delta_1\}$ と置く。 C_3 は半径 R の円周上の 2 つの短い円弧からなる。 $F_3(T, R, \delta_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} g(s)e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$, $F_4(T, R, \delta_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_4} g(s)e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ と置く。

$F_3(T, R, \delta_1)$ に関しては、 C_- における $g(s) \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s}$ の最大値を $M(R)$ と置くと、 $|e^{sT}| \leq 1$, $\int_{C_3} |ds| \leq 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R}$ (半径 R , 中心角 $\arcsin \frac{\delta_1}{R}$ の円弧 2 つ分) と評価して

$$|F_3(T, R, \delta_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M(R) \cdot 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R} \leq C(R)\delta_1$$

ただし $C(R)$ は R だけに依存するある定数である. (T には依らない.) つまり T に関わりなく, R を先に固定してしまえば, δ_1 を十分小さく取ることによって $|F_3(T, R, \delta_1)|$ をいくらでも小さくすることが出来る.

最後に $F_4(T, R, \delta_1)$ であるが, この積分経路においては $\left|g(s) \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s}\right| \leq M(R), |e^{sT}| \leq e^{-\delta_1 T}$, $\int_{C_4} |ds| \leq \pi R$ (経路を半円で抑えた) であるから,

$$|F_4(T, R, \delta_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M(R) \cdot e^{-\delta_1 T} \cdot \pi R \leq D(R)e^{-\delta_1 T}$$

ただし $D(R)$ は R だけに依存するある定数である. (T には依らない.) δ_1 がどんな正の数であろうとも $e^{-\delta_1 T}$ は $T \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する単調減少数列であるから, R, δ_1 を先に固定してしまえば,

$\lim_{T \rightarrow \infty} |F_4(T, R, \delta_1)| = 0$ であることがわかる.

以上より先に述べておいた証明の方針により題意は成立することが示された. □

定理 5-3-5 の $\psi(x)$ を $\vartheta(x)$ に取り替えても同様の議論を進めることが出来る. Zagier では実際そちらを利用している.

定理 5-6-2 $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$ は収束する,

証明

$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{p, m} \frac{\log p}{p^{ms}}$ であった. 同様の発想で $\Psi(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$ と置く. $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$

と $\Psi(s)$ の差を考えると, $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \Psi(s) = \sum_{p, m \geq 2} \frac{\log p}{p^{ms}}$ である. これは明らかに $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で正則であるか

ら $\Psi(s)$ 自体が $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で有理形関数に解析接続され, $\text{Re}(s) \geq 1$ では $s = 1$ にのみ一位の極を持つ他は正則であることがわかる. また $s = 1$ における留数は 1 である.

$\Psi(s)$ の級数表示に Abel の級数変化法を適用すると,

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\vartheta(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^\infty \frac{\vartheta(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\vartheta(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^\infty \frac{\vartheta(n)}{(n+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \vartheta(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = \sum_{n=1}^\infty \vartheta(n) s \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} dx = s \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx = s \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

これは $\vartheta(e^t)$ の Laplace 変換が $\frac{\Psi(s)}{s}$ だということをいっている. これを -1 だけ平行移動し $s = 0$ での極を取り除くために $J(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$ を Laplace 変換してみると,

$$\mathcal{L}J(s) = \int_0^\infty J(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \vartheta(e^t)e^{-(s+1)t} dt - \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} \Psi(s+1) - \frac{1}{s}$$

右辺の $\frac{1}{s+1} \Psi(s+1) - \frac{1}{s}$ は $s \geq 0$ で正則である. これは次に示す定理 5-3-6 の条件を満たすことを意味する

ので, $\mathcal{L}J(0) = \int_0^\infty J(t) dt$ が存在することになる. しかるに

$$\mathcal{L}J(0) = \int_0^\infty J(t) dt = \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1) dt = \int_0^\infty \frac{\vartheta(e^t) - e^t}{e^t} dt = \int_0^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

であるから題意は示されたことになる.

§ 7 $\operatorname{Re}(s) = 1$ 上に零点が存在しないことの証明

先に述べたように、素数定理を証明するためには $\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ が $\operatorname{Re}(s) = 1$ 上に $s = 1$ 以外の極を持たないことが重要なのであった。(これがいえれば $\psi(x) \sim x$ が従う.)

これは $\zeta(s)$ が $\operatorname{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たないことと同値である。この節ではそれを証明する。

定理 5-7-1 $\zeta(s)$ は $s = 1 + it$ 上に零点を持たない。

証明 1 $n^{-(\sigma+it)} = n^{-\sigma} e^{-it \log n} = n^{-\sigma} \{\cos(t \log n) - i \sin(t \log n)\}$ より $\operatorname{Re}(n^{-(\sigma+it)}) = n^{-\sigma} \cos(t \log n)$ である。

従って $\sigma > 1$ に対し $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ の両辺の実部を比較して

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \cos(t \log n)}{n^{\sigma}}$$

これより

$$\begin{aligned} & -3\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n))}{n^{\sigma}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) (2 + 4 \cos(t \log n) + 2 \cos^2(t \log n))}{n^{\sigma}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Lambda(n) (1 + \cos(t \log n))^2}{n^{\sigma}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

一方 $s = 1 + it$ を a ($a \geq 1$) 位の零点とすると $\lim_{z \rightarrow 1+it} (z - 1 - it) \frac{\zeta'}{\zeta}(z) = \lim_{\sigma \rightarrow 1+0} (\sigma - 1) \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = a$ である。

$s = 1 + 2it$ を b ($b \geq 0$) 位の零点とすると $\lim_{\sigma \rightarrow 1+0} (\sigma - 1) \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) = b$ である。また $s = 1$ は 1 位の極つまり

-1 位の零点であるから $\lim_{\sigma \rightarrow 1+0} (\sigma - 1) \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = -1$ である。

従って

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1+0} (\sigma - 1) \left\{ -3 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right\} = 3 - 4a - b \leq 0$$

これは上の結果と矛盾する。 □

証明 2 上とほとんど同じだが、対数微分を使わないで示してみると次のようになる。以下 $\sigma \rightarrow 1 + 0$ の挙動について考える。

- $\zeta(s)$ は $s = 1$ に 1 位の極をもつので $\zeta(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma - 1}$ である。
- $\zeta(s)$ が $s = 1 \pm it$ に零点を持ったとしよう。 $\zeta(\sigma \pm it) = O(\sigma - 1)$ である。
- $\zeta(s)$ は $s = 1 \pm 2it$ では極を持たないので、 $\zeta(\sigma \pm 2it) = O(1)$ としてよい。

以上より $\zeta(\sigma + 2it)\zeta(\sigma + it)^4\zeta(\sigma)^6\zeta(\sigma - it)^4\zeta(\sigma - 2it) = O((\sigma - 1)^2)$ が得られる. 特に $\sigma \rightarrow 1 + 0$ のとき 0 に近づく. 従ってその対数は $-\infty$ に発散する.

一方 $\text{Re}(s) > 1$ において $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})$ なので, $\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_{m \geq 1} \sum_p \frac{p^{-ms}}{m}$ と表される.

これより次のような評価が出来る.

$$\begin{aligned} & \log \{ \zeta(\sigma + 2it)\zeta(\sigma + it)^4\zeta(\sigma)^6\zeta(\sigma - it)^4\zeta(\sigma - 2it) \} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_p \frac{1}{m} \left(p^{-m(\sigma+2it)} + 4p^{-m(\sigma+it)} + 6p^{-m\sigma} + 4p^{-m(\sigma-it)} + p^{-m(\sigma-2it)} \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_p \frac{p^{-m\sigma}}{m} \left(p^{-\frac{imt}{2}} + p^{\frac{imt}{2}} \right)^4 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

これは上の結果と矛盾する. □

§ 8 Wiener 池原の定理の拡張と別証明

自然数 n に対して非負実数 a_n が与えられているとき, $\sum_{n \leq X} a_n$ の漸近挙動を母 Dirichlet 関数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ の極で

の挙動により記述することが出来る. このような定理を Tauber 型定理という. ただし証明したのは Wiener と弟子の池原止戈夫である.

ドランジユが拡張し, ケーブルが証明を簡略化した定理が「整数論 3 雪江明彦」に紹介されている.

定理 5-8-1 ウィーナー・池原・ドランジユ・ケーブル

$n \geq 1$ に対し非負実数 $a_n \geq 0$ が与えられているとする. 母 Dirichlet 級数 $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ を考える.

$L(s)$ が収束軸 $N (> 0)$ を持つとする. この場合 $L(s)$ は $\Pi = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > N\}$ で広義一様収束する. Π の閉包を $\bar{\Pi}$ とする. $L(s)$ が次の (a), (b) のいずれかを満たすとしよう.

- (a) $L(s)$ は $\bar{\Pi}$ まで有理型接続される.
 - $L(s)$ は $s = N$ に $d (> 0)$ 位の極を持ち, $\frac{1}{(s - N)^d}$ の係数は A である. つまり $L(s) = \frac{A}{(s - N)^d} + \dots$
 - $L(s)$ は $\bar{\Pi}$ においては $s = N$ 以外の極を持たない.
- (b) 自然数 m があって $L(s)^m$ は $\bar{\Pi}$ まで有理型接続される.
 - $L(s)^m$ は $s = N$ に 1 位の極を持ち, そこでの留数は $A^m (A > 0)$ である. つまり $L(s)^m = \frac{A^m}{(s - N)} + \dots$
 - $L(s)^m$ は $\bar{\Pi}$ においては $s = N$ 以外の極を持たない.

(a) の場合 $\alpha = d$, (b) の場合 $\alpha = \frac{1}{m}$ とおくと,

$$\sum_{n \leq X} a_n \sim \frac{A}{N\Gamma(\alpha)} X^N (\log X)^{\alpha-1}$$

が成り立つ.

□

ただしこれでは一般的すぎてピンとこないかもしれない. 「リーマンのゼータ関数 松本耕二」にはこの定理の簡略形が載っている. 証明はされていないが, 本稿で既に証明した定理を組み合わせると述べてものに過ぎない.

定理 5-8-2 Wiener-池原の定理の簡略形

$f(x)$ が $x \geq 1$ で定義された単調増加関数で, $f(x) = O(x)$ を満たすとする. すると

$$g(s) = s \int_1^\infty f(x)x^{-s-1} dx$$

が $\text{Re}(s) > 1$ で定まるが, この $g(s)$ が $\text{Re}(s) \geq 1$ を含むある領域まで有理型に解析接続され, $s = 1$ における留数 ρ の一位の極を除いてはその領域で正則とすれば, 漸近式 $f(x) \sim \rho x$ が成り立つ.

証明 1 $I(t) = f(e^t)e^{-t} - \rho$ は $t \geq 0$ で定義された, 有界で局所可積分な関数である. $I(t)$ の Laplace 変換を考える.

$$\mathcal{L}I(s) = \int_0^\infty (f(e^t)e^{-t} - \rho) e^{-st} dt = \int_1^\infty (f(x)x^{-s-2} - \rho x^{-s-1}) dx = \frac{g(s+1)}{s+1} - \frac{\rho}{s}$$

この最終式は $\text{Re}(s) \geq 0$ で正則な関数を表している. 従って定理 5-3-7 より

$$\lim_{s \rightarrow +0} \mathcal{L}I(s) = \int_1^\infty (f(x)x^{-2} - \rho x^{-1}) dx = \int_1^\infty \frac{f(x) - \rho x}{x^2} dx$$

が有限確定値として存在する. $f(x)$ は単調増加だから定理 5-3-5 より $f(x) \sim \rho x$ が従う.

□

証明 2 実は定理 5-3-7 は本質的にはラプラス変換とは関係がないのではないだろうか. つまり変数変換せず x のままやってみたらどうなるだろうかと思って実行してみたのが以下の証明である. (何か欠陥があれば教えてください.)

$$\int_1^\infty \frac{f(x) - \rho x}{x^{s+2}} dx = \frac{g(s+1)}{s+1} - \frac{\rho}{s} \text{ は } \text{Re}(s) > 0 \text{ で正則な関数だが, 題意よりこれは } \text{Re}(s) \geq 0 \text{ まで解析接}$$

続される. その関数を $G(s)$ と置く. $\text{Re}(s) > 0$ においては $G(s) = \int_1^\infty \frac{f(x) - \rho x}{x^{s+2}} dx$ であるが $\text{Re}(s) \leq 0$ にお

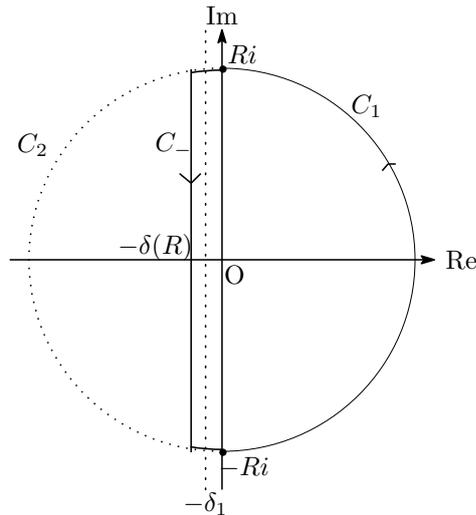
ける直接表記はない. また $G_T(s) = \int_1^T \frac{f(x) - \rho x}{x^{s+2}} dx$ と置く. $G_T(s)$ はすべての s で定義された正則関数であ

る. $\lim_{T \rightarrow \infty} G_T(s) = G(s)$ を示したい.

十分大きな R と (R に依存してもよい) 小さな $\delta(R)$ で, $G(s)$ が $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| \leq R, \text{Re}(s) \geq -\delta(R)\}$ において正則となるものをとる. この領域の境界 (反時計回り) を C とする. Cauchy の積分定理より

$$G(0) - G_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (G(s) - G_T(s)) T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$$

左辺は R によらない T の関数である. これを $F(T)$ と置く. $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T) = 0$ を言いたい.



まず $C_1 = C \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$ における積分を考えて、 $F_1(T, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (G(s) - G_T(s)) T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ と置く。この領域においては $G(s) = \int_1^\infty \frac{f(x) - \rho x}{x^{s+2}} dx$ が成り立つので、 $\max \left| \frac{f(x) - \rho x}{x} \right| = B$ とすると

$$\begin{aligned} |G(s) - G_T(s)| &= \left| \int_T^\infty \frac{f(x) - \rho x}{x^{s+2}} dx \right| \leq B \int_T^\infty |x^{-s-1}| dx \\ &= B \int_T^\infty x^{-\text{Re}(s)-1} dt = B \left[-\frac{x^{-\text{Re}(s)}}{\text{Re}(s)} \right]_T^\infty = \frac{BT^{-\text{Re}(s)}}{\text{Re}(s)} \end{aligned}$$

この値自体は $\text{Re}(s) \rightarrow 0$ のとき発散する可能性があるが、 C_1 上の複素数 s を $s = Re^{i\theta}$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) と置くと

$$\left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| = |1 + e^{2i\theta}| = |e^{i\theta} (e^{-i\theta} + e^{i\theta})| = 2 \cos \theta = \frac{2\text{Re}(s)}{R}$$

が小さいので

$$\begin{aligned} |F_1(T, R)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (G(s) - G_T(s)) T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{BT^{-\text{Re}(s)}}{\text{Re}(s)} \cdot T^{\text{Re}(s)} \cdot \frac{2\text{Re}(s)}{R} \cdot \frac{\pi R}{R} \\ &= \frac{B}{R} \end{aligned}$$

次に $C_- = C \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) < 0\}$ における積分を考えるが、この領域においては $G(s)$ と $G_T(s)$ を別々に扱う。 $F_2(T, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} G_T(s) T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ と置く。 $G_T(s)$ は全 s 平面で正則だから、積分経路 C_- を半円 $C_2 = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| = R, \text{Re}(s) < 0\}$ に取り替えてもよい。 C_2 上では次の評価が成り立つ。 ($\text{Re}(s) < 0$ に注意)

$$|G_T(s)| = \left| \int_0^T \frac{f(x) - \rho x}{x^{s+2}} dx \right| \leq B \int_0^T |x^{-s-1}| dt = B \int_0^T x^{-\text{Re}(s)-1} dt = B \left[-\frac{x^{-\text{Re}(s)}}{\text{Re}(s)} \right]_0^T \leq \frac{BT^{-\text{Re}(s)}}{|\text{Re}(s)|}$$

残りの因子の評価は先ほどと同じであり

$$|F_2(T, R)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} G_T(s) T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{B}{R}$$

が従う.

$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} G(s)T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ に関してはこの積分をさらに2つに分割して考える. $0 < \delta_1 < \delta(R)$ を満たす δ_1 に対して $C_3 = C_- \cap \{s \in \mathbb{C} \mid -\delta_1 < \operatorname{Re}(s) < 0\}$, $C_4 = C_- \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) < -\delta_1\}$ と置く. C_3 は半径 R の円周上の2つの短い円弧からなる. $F_3(T, R, \delta_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} G(s)T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$, $F_4(T, R, \delta_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_4} G(s)T^s \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}$ と置く.

$F_3(T, R, \delta_1)$ に関しては, C_- における $G(s) \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s}$ の最大値を $M(R)$ と置くと, $|T^s| \leq 1$, $\int_{C_3} |ds| \leq 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R}$ (半径 R , 中心角 $\arcsin \frac{\delta_1}{R}$ の円弧2つ分) と評価して

$$|F_3(T, R, \delta_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M(R) \cdot 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R} \leq C(R)\delta_1$$

ただし $C(R)$ は R だけに依存するある定数である. (T には依らない.) つまり T に関わりなく, R を先に固定してしまえば, δ_1 を十分小さく取ることによって $|F_3(T, R, \delta_1)|$ をいくらでも小さくすることが出来る.

最後に $F_4(T, R, \delta_1)$ であるが, この積分経路においては $\left|G(s) \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s}\right| \leq M(R)$, $|T^s| \leq T^{-\delta_1}$, $\int_{C_4} |ds| \leq \pi R$ (経路を半円で抑えた) であるから,

$$|F_4(T, R, \delta_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M(R) \cdot T^{-\delta_1} \cdot \pi R \leq D(R)T^{-\delta_1}$$

ただし $D(R)$ は R だけに依存するある定数である. (T には依らない.) δ_1 がどんな正の数であろうとも $T^{-\delta_1}$ は $T \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する単調減少数列であるから, R, δ_1 を先に固定してしまえば,

$\lim_{T \rightarrow \infty} |F_4(T, R, \delta_1)| = 0$ であることがわかる.

以上より先に述べておいた証明の方針により題意は成立することが示された. □

第 6 章

$\zeta(s)$ の無限積表示

$\pi(x)$ を $\zeta(s)$ の零点を用いて表す明示公式は、 $\zeta(s)$ の無限積表示から得られる。一般に全平面で有理型である関数とその極と零点を用いて無限積表示できることは、Weierstrass の無限積表示として知られているが、それは何らかの積表示が可能であるという存在定理に過ぎない。

それに対し、正則関数に対して order と genus を定義し、無限積表示の具体的な形を決定するのが Hadamard の無限積表示である。その際関数の大きさの評価のために Jensen の公式が使われる。

$\zeta(s)$ だと対称性が高くないので、完備化された $\hat{\zeta}(s)$ を考えよう。さらに $\hat{\zeta}(s)$ は $s = 0, 1$ に極を持つので $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\hat{\zeta}(s)$ を導入する¹。 $\xi(s)$ は全平面で正則で、関数等式 $\xi(1-s) = \xi(s)$ を満たし、零点は $0 < \text{Re}(s) < 1$ に存在する $\zeta(s)$ の非自明な零点だけである。

この章の目標は次の無限積表示を証明することである。

目標 6-3
$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

ここで ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点を動く、また積は $|\text{Im}(\rho)|$ の小さいものから順にとるものとする。 □

証明のためには ρ の分布を調べないといけない。調和関数に関する定理も必要となる。

§ 1 Jensen の公式

補題 6-1-1 $f(z)$ を $|z| \leq R$ で定義された正則関数で、境界および内部に零点を持たないとすると、

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta$$

が成り立つ。

証明 Cauchy の積分定理より

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\log(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\log(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(Re^{i\theta}) d\theta$$

が成り立つことが分かる。この両辺の実部を考えればよい。

別解 Laplacian Δ は $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ のように Cauchy-Riemann 作

用素とその共役の積に分解される。 $\log |f(z)| = \frac{1}{2}(\log f(z) + \log \overline{f(z)})$ であり、 $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(z) = 0$,

¹ 係数の $\frac{1}{2}$ は Riemann の定義に一致させるためのもので、重要ではない。

$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\overline{f(z)} = 0$ が成り立つことより $\Delta \log |f(z)| = 0$ が分かる. つまり $\log |f(z)|$ は調和関数である. その場合, 補題は調和関数に関する平均値の定理に他ならない \square

この補題は $f(z)$ が領域内に零点を持たない場合にしか成り立たない. 零点を持つ場合は次のようになる.

定理 6-1-2 Jensen の定理 $f(z)$ を $|z| \leq R$ で定義された正則関数で, 境界に零点を持たず, 内部に零点 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ を持つとする.

$$\log |f(0)| - \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{\rho_j}{R} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta$$

が成り立つ.

証明 分数関数 $\frac{R^2 - \bar{\rho}z}{R(z - \rho)}$ は z の正則関数であり, 1位の零点 $\frac{R^2}{\rho}$ と一位の極 ρ を持つ. $|\rho| < R \iff \frac{R^2}{\rho} > R$

も容易に分かる. しかも $|z| = R$ であれば $\left| \frac{R^2 - \bar{\rho}z}{R(z - \rho)} \right| = \left| \frac{z(\bar{z} - \bar{\rho})}{R(z - \rho)} \right| = 1$ である.

従って $g(z) = f(z) \prod_{k=1}^n \frac{R^2 - \bar{\rho}_k z}{R(z - \rho_k)}$ と置けば, $g(z)$ は $|z| \leq R$ に零点を持たず $|z| = R$ 上では $|g(z)| = |f(z)|$ を満たすことになるから, 先ほどの補題が使えて

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\theta})| d\theta = \log |g(0)| = \log |f(0)| - \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{\rho_j}{R} \right|$$

がわかる. \square

§2 Hadamard の積表示

§ 3 $\zeta(s)$ の無限積表示

前節までで $\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ が証明された. これを $\zeta(s)$ の無限積表示に書き換えたい.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \hat{\zeta}(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s)$$

であるから $\xi(0) = -\Gamma(1)\zeta(0)$ なのだが $\Gamma(1) = 1, \zeta(0) = -\frac{1}{2}$ だから $\xi(0) = \frac{1}{2}$ がわかる. すると

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi(s) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)} \left\{ \frac{s}{2} e^{\frac{\gamma s}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \right\} \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \\ &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}} e^{\frac{\gamma s}{2}}}{2(s-1)} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \right\} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \end{aligned}$$

この両辺の対数を取ることで $\text{Re}(s)$ において

$$\log \zeta(s) = \frac{\log \pi + \gamma}{2} s - \log 2 - \log(s-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2n} \right) + \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

もちろん ρ に関する和は $|\text{Im}(\rho)|$ の小さいものから足すものとする. またはこの式を微分 (元の式の対数微分) することにより全平面で有理型である関数を得る.

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\log \pi + \gamma}{2} - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho}$$

次の章で使うので, 次も導いておく.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{\log 2}{s} \right] - \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2n}}{s} \right] \\ &\quad + \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \log \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right)}{s} \right] \end{aligned}$$

第 7 章

明示公式

Riemann は $\pi(x)$ を評価するために次の明示公式を導いた.

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \{ \text{Li}(x^\rho) + \text{Li}(x^{1-\rho}) \} + \int_x^\infty \frac{du}{u(u^2 - 1) \log u} - \log 2$$

各々の関数の定義は以下で述べていくが, $\Pi(x)$ は $\pi(x)$ に近いもの, $\text{Li}(x)$ は $\frac{x}{\log x}$ に近いものである. 重要なのは, この公式が素数の個数を近似的に表すものではなく, $\pi(x)$ を完全に決定することの出来る式だという点にある. ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点を動く. Riemann 予想が正しければ明示公式から素数定理を導くことが出来るが, 素数定理の方が Riemann 予想よりずっと容易に解かれてしまった.

この章では明示公式を証明しよう.

§ 1 $\Pi(x)$ の定義と Möbius の反転公式

定義 7-1-1 $\Pi(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ とおく. (無限和の形をしているが, 実質的には有限和である.) □

具体的計算例:

$$\begin{aligned} \Pi(100) &= \pi(100) + \frac{1}{2} \pi(\sqrt{100}) + \frac{1}{3} \pi(\sqrt[3]{100}) + \dots + \frac{1}{n} \pi(\sqrt[n]{100}) + \dots \\ &= \pi(100) + \frac{1}{2} \pi(10) + \frac{1}{3} \pi(4.6) + \frac{1}{4} \pi(3.1) + \frac{1}{5} \pi(2.5) + \frac{1}{6} \pi(2.1) + \frac{1}{7} \pi(1.9) \\ &= 25 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 0 \\ &= 28.5333 \end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$ のときに $\Pi(x) \sim \pi(x)$ であろうことは想像に難くない.

定理 7-1-2 $\mu(n)$ を Möbius 関数とすると

$$g(x) = \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \iff f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right)$$

証明 まず $\sum_{k|n} \mu(k) = \begin{cases} 1 & n=1 \text{ のとき} \\ 0 & n \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$ を示そう. $n=1$ のときは明らかである. $n > 1$ のとき n の素因数

分解を $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{k|n} \mu(k) &= \mu(1) + \{ \mu(p_1) + \dots + \mu(p_m) \} + \{ \mu(p_1 p_2) + \dots + \mu(p_{m-1} p_m) \} + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_m) \\ &= 1 - m + {}_m C_2 - \dots + (-1)^m = (1 - 1)^m = 0 \end{aligned}$$

これを認めた上で同値関係を証明しよう.

$$(\implies \text{の証明}) \quad \sum_{n \leq x} \mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq \frac{x}{n}} f\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k \leq x} \sum_{n|k} \mu(n)f\left(\frac{x}{k}\right) = f(x)$$

ただし $mn = k$ とおいた. 最後の Σ は $k = 1$ 以外は 0 になって消える. 逆の証明もほぼ同じ.

$$(\impliedby \text{の証明}) \quad \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \mu(m)g\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k \leq x} \sum_{m|k} \mu(m)g\left(\frac{x}{k}\right) = g(x) \quad \square$$

系 7-1-3
$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

証明 先ほどの定理がそのまま適用できるわけではないが, 証明はほとんど同じである.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \pi\left(x^{\frac{1}{nm}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n|k} \mu(n) \frac{1}{k} \pi\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = \pi(x)$$

□

§ 2 $\Pi(x)$ と $\zeta(s)$ の関係

$$\frac{1}{p^{ns}} = s \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1} dx \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_p \log \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_p \sum_n^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \\ &= \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} \sum_p \frac{1}{p^{ns}} = s \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} \sum_p \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1} dx = s \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} \int_1^{\infty} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) x^{-s-1} dx \\ &= s \int_1^{\infty} \Pi(x)x^{-s-1} dx \end{aligned}$$

前章で見たように $\log \zeta(s)$ は $s = 1$ に対数特異点を持つので, この式は池原の定理が適用できない形である. s を $-s$ に置き換え積分の定義域を広げると, この式は Mellin 変換と見なせるが, 置換により Laplace 変換と見なす方が自然だろう. $x = e^t$ と置換すると

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{\infty} \Pi(x)x^{-s-1} dx = s \int_0^{\infty} \Pi(e^t)e^{-st} dt = s\mathcal{L}[\Pi(e^t)](s)$$

となるので, Laplace 逆変換より

$$\Pi(e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} e^{st} ds$$

ただし c は収束域に入る 1 より大きな任意の実数である. $e^t = x$ と変数変換し直すと次を得る.

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds$$

この $\zeta(s)$ 部分を前章で導いた無限積に置き換えると次のようになる.

$$\begin{aligned} & \Pi(x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} \left\{ \frac{\log \pi + \gamma}{2} s - \log 2 - \log(s-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{s}{2n} \right) - \frac{s}{2n} \right) + \sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) \right\} x^s ds \end{aligned}$$

しかしこれを項別積分に展開すると, $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log \pi + \gamma}{2} x^s ds$ の部分が明らかに収束しない. もちろんそれに合わせるため, Γ 関数由来の Σ 部分も収束しないだろう.

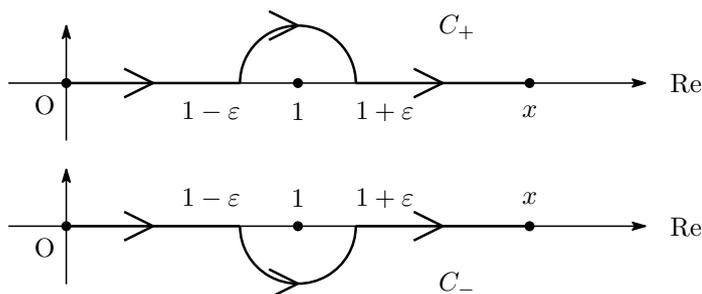
この発散部分を消去するために, 部分積分を使って次のように変形する.

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \frac{x^s}{\log x} \right]_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] \frac{x^s}{\log x} ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log 2}{s} \right] x^s ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \left(1 + \frac{s}{2n} \right) - \frac{s}{2n}}{s} \right] x^s ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) + \log \left(1 - \frac{s}{1-\rho} \right)}{s} \right] x^s ds \end{aligned}$$

この最終式なら ($|x^s|$ は有界なので) 各項は絶対収束することがわかる. 留数解析を使って各項をなじみのある形に書き換えると, 目標とする明示公式が得られる. この章の残りはそれを目標とする.

まず $\text{Li}(x)$ の定義¹ から.

定義 7-2-1
$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log s} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\log s} ds + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{1}{\log s} ds \right)$$



¹ これは $\pi(x)$ の近似としては $\frac{x}{\log x}$ よりもよい関数である.

$\frac{1}{\log s}$ が発散する $s = 1$ の前後を等幅 ε で回避してその極限を取っているが、複素数変数で考えればそれほど不自然ではない. 実際 C_+ を 0 と $x(> 1)$ を $\text{Im}(s) > 0$ の領域内で結ぶ積分経路とすると、留数解析により

$$\int_{C_+} \frac{1}{\log s} ds = \text{Li}(x) - \pi i$$

であることがすぐに分かる. 同様に, C_- を 0 と $x(> 1)$ を $\text{Im}(s) < 0$ の領域内で結ぶ積分経路とすると,

$$\int_{C_-} \frac{1}{\log s} ds = \text{Li}(x) + \pi i$$

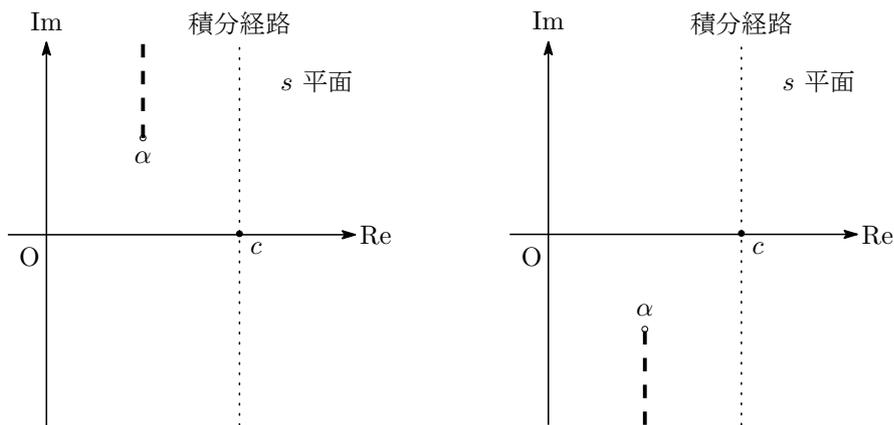
である. □

さて, 計算しないといけない積分には $\frac{\log(s-1)}{s}$, $\frac{\log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{s}$, $\frac{\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)}{s}$ が含まれているが, これらはすべてほぼ $\frac{\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{s}$ の形をしている. そこで次の命題を示しておこう.

命題 7-2-2 $\text{Re}(\alpha) \leq 1$ かつ $\alpha \neq 0$ とする. また x, c を 1 より大きな実数とする.

$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{s} \right] x^s ds$ と置く. ただし $\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)$ の枝は, 次のように決める.

- (i) $\text{Im}(\alpha) \geq 0$ の場合は, s 平面から $\{\alpha + it \mid t \geq 0\}$ を取り除き, $s = 0$ のとき $\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right) = 0$ となる枝を取る.
- (ii) $\text{Im}(\alpha) < 0$ の場合は, s 平面から $\{\alpha - it \mid t \geq 0\}$ を取り除き, $s = 0$ のとき $\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right) = 0$ となる枝を取る.



このとき, 次が成り立つ.

$$(1) \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \text{ のとき } f(\alpha) = \begin{cases} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du & \text{Im}(\alpha) \geq 0 \\ \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du & \text{Im}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad \text{である. ここで } C_+, C_- \text{ は定義 7-2-4 の通り}$$

とする.

(2) $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$ のとき $f(\alpha) = \int_{\infty}^x \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du$ である.

証明 $f(\alpha)$ を α で微分してみよう.

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{s} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\log(\alpha - s) - \log \alpha}{s} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\alpha - s} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha(\alpha - s)}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{s} \right] x^s ds \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\alpha(\alpha - s)} \right] x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{x^s}{\alpha(\alpha - s) \log x} \right]_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\alpha(\alpha - s)} x^s ds \end{aligned}$$

第 1 項は 0 である. 第二項は積分経路を, $c - iR, c + iR$ およびその 2 点を直径とする半円 (左半分) を合わせた閉経路として考えればよい. $s = \alpha$ における留数を考えて, 結局 $f'(\alpha) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ である. ところで

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{s} \right] = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \left(-\frac{s}{\alpha} + \frac{s^2}{2\alpha^2} - \frac{s^3}{3\alpha^3} + \dots \right) \right] = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{2s}{3\alpha^3} + \frac{3s^2}{4\alpha^4} \dots$$

であるから $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0$ である² ことが分かる. x は $\operatorname{Re}(x) = c > 1$ を動くので, $\operatorname{Re}(\alpha)$ が正であるか負であるかによって場合分けする.

(i) $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ のとき

$$f'(\alpha) = \frac{x^\alpha}{\alpha} = \left[\frac{u^\alpha}{\alpha} \right]_0^x = \int_0^x u^{\alpha-1} du \text{ より } f(\alpha) = \int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du + C$$

ただし積分経路および積分定数 C は $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0$ が成り立つように決めないといけない. 補題 7-2-3 で示すように

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow \infty} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du &= 0, \quad \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow \infty} \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 2\pi i, \\ \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du &= -2\pi i, \quad \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので, 命題は示されたことになる.

(ii) $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$ のとき

$$f'(\alpha) = \frac{x^\alpha}{\alpha} = \left[\frac{u^\alpha}{\alpha} \right]_{\infty}^x = \int_{\infty}^x u^{\alpha-1} du \text{ より } f(\alpha) = \int_{\infty}^x \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du + C. \quad \text{やはりこの積分定数 } C \text{ は}$$

$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0$ が成り立つように決めないといけないが, 補題 7-2-4 で示すように $C = 0$ である.

² これはもちろん \log の枝を上のように決めたからであって, 別の決め方をすると. $\frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{s} \right] = -\frac{2n\pi i}{s^2} + \frac{1}{2\alpha^2} -$

$\frac{2s}{3\alpha^3} + \frac{3s^2}{4\alpha^4} \dots$ より $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} f(\alpha) = -2n\pi i$ が導かれる.

補題 7-2-3 $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ とすると

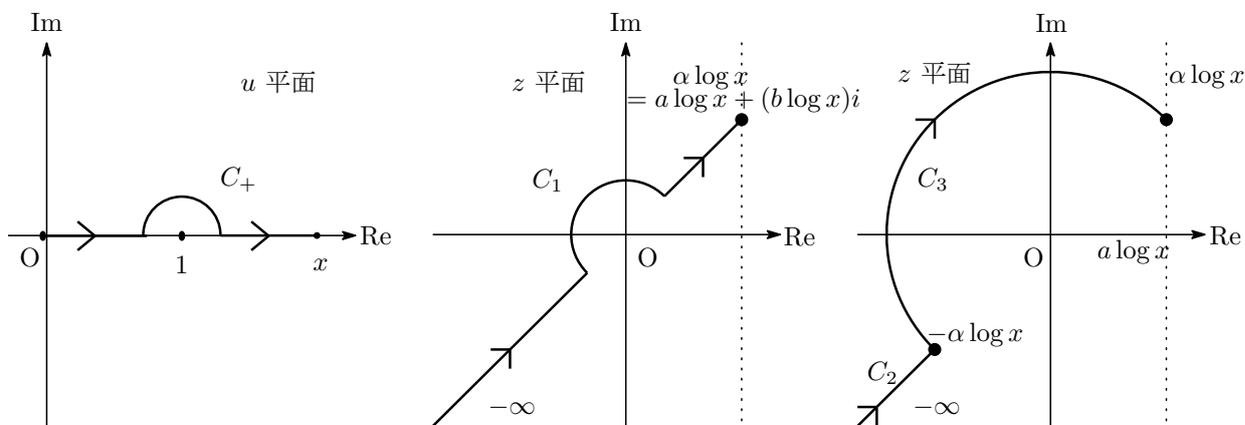
$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow \infty} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du &= 0, \quad \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow \infty} \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 2\pi i, \\ \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du &= -2\pi i, \quad \lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 $\lim_{\operatorname{Im}(\alpha) \rightarrow \infty} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} = 0$ について.

$\alpha = a + bi$ ($a > 0, b > 0$) とおく. $b \rightarrow +\infty$ の極限を考えたい. まず $z = \alpha \log u$ と置換する.

$$I = \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} = \int_{C_1} \frac{e^z}{z} dz = \int_{C_2 \cup C_3} \frac{e^z}{z} dz$$



積分経路 C_1 は $-\infty(a + bi)$ から $-0(a + bi)$ まで直線が進み, 原点を時計回りに半周してから $+0(a + bi)$ から $\log x(a + bi)$ まで直線に進むものである. しかし $\frac{e^z}{z}$ は $z = 0$ 以外では正則だから, 積分経路を $C_2 \cup C_3$ に変更してもよい. ここで C_2 は $-\infty(a + bi)$ から $-(\log x)(a + bi)$ まで直線に進む経路, C_3 は半径 $|\alpha \log x|$ の円周を時計回りに半周する経路である.

まずこの積分を部分積分する³.

$$I = \int_{C_2 \cup C_3} \frac{e^z}{z} dz = \left[\frac{e^z}{z} \right]_{C_2 \cup C_3} + \int_{C_2 \cup C_3} \frac{e^z}{z^2} dz$$

第 1 項は $\left[\frac{e^z}{z} \right]_{C_2 \cup C_3} = \frac{e^{\alpha \log x}}{\alpha \log x}$ であり, その大きさは $\left| \frac{e^{\alpha \log x}}{\alpha \log x} \right| = \frac{e^{a \log x}}{\sqrt{a^2 + b^2} \log x} = \frac{x^a}{\sqrt{a^2 + b^2} \log x}$ であるから $b \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. また

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^z}{z^2} dz \right| \leq \int_{C_2} \frac{|e^z|}{|z|^2} |dz| \leq e^{-a \log x} \int_{|\alpha \log x|}^{\infty} \frac{1}{R^2} dR = \frac{e^{-a \log x}}{|\alpha \log x|} = \frac{e^{-a \log x}}{\sqrt{a^2 + b^2} \log x}$$

であるから, この積分も $b \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. さらに

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^z}{z^2} dz \right| \leq \int_{C_3} \frac{|e^z|}{|z|^2} |dz| \leq \frac{e^{a \log x}}{(a^2 + b^2)(\log x)^2} \times \pi \sqrt{a^2 + b^2} \log x = \frac{\pi e^{a \log x}}{\sqrt{a^2 + b^2} \log x}$$

であるから, この積分も $b \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. 従って $\lim_{b \rightarrow \infty} I = 0$ である.

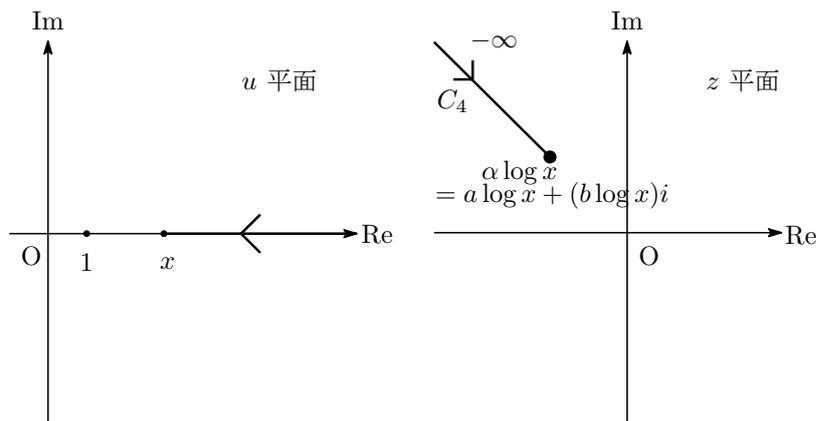
³ これに気づかないと証明が非常に面倒なものになってしまう.

$\lim_{\text{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 0$ の証明も同様である.

$\lim_{\text{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{C_+} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = -2\pi i$, $\lim_{\text{Im}(\alpha) \rightarrow \infty} \int_{C_-} \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 2\pi i$ に関しては留数解析から容易に分かる. □

補題 7-2-4 $\text{Re}(\alpha) < 0$ とすると $\lim_{\text{Re}(\alpha) \rightarrow -\infty} \int_{\infty}^x \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} du = 0$ が成り立つ.

証明 $\alpha = a + bi$ ($a < 0$) とおく. $a \rightarrow -\infty$ の極限を考えたい. まず $z = \alpha \log u$ と置換する.



$$I = \int_{\infty}^x \frac{u^{\alpha-1}}{\log u} = \int_{C_4} \frac{e^z}{z} dz = \left[\frac{e^z}{z} \right]_{C_4} + \int_{C_4} \frac{e^z}{z^2} dz = \frac{e^{\alpha \log x}}{\alpha \log x} + \int_{C_4} \frac{e^z}{z^2} dz$$

先ほどと同じく $a \rightarrow -\infty$ のとき $\left| \frac{e^{\alpha \log x}}{\alpha \log x} \right| = \frac{e^{a \log x}}{\sqrt{a^2 + b^2} \log x} \rightarrow 0$ である. また $\left| \int_{C_4} \frac{e^z}{z^2} dz \right| \leq \frac{e^{a \log x}}{\sqrt{a^2 + b^2} \log x}$ だから $a \rightarrow -\infty$ のとき 0 に収束する. □

命題 7-2-5 $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log 2}{s} \right] x^s ds = -\log 2$

証明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log 2}{s} \right] x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \left[\frac{\log 2}{s} x^s \right]_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log 2}{s} x^s ds \\ &= -\log 2 \end{aligned}$$

□

命題 7-2-6 $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s ds = \text{Li}(x)$

証明 命題 7-2-2 で示したように

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(1-s)}{s} \right] x^s ds = \int_{C_+} \frac{1}{\log u} du$$

が成り立つ. この場合 $\log(1-s)$ の枝の選び方から $\log(1-s) = \log(s-1) + \pi i$ であることがわかり

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(1-s)}{s} \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1) + \pi i}{s} \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s + \frac{1}{2} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \right] x^s ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s + \frac{1}{2} \frac{1}{\log x} \left[\frac{x^s}{s} \right]_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \frac{1}{2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] x^s - \pi i
 \end{aligned}$$

一方 $\text{Li}(x)$ の定義のところで述べたように $\int_{C_+} \frac{1}{\log u} du = \text{Li}(x) - \pi i$ であるから, 命題は証明された. □

命題 7-2-7
$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right) + \log\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right)}{s} \right] x^s ds = \text{Li}(x^\rho) + \text{Li}(x^{1-\rho})$$

証明 命題 7-2-2 で示したように $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)}{s} \right] x^s ds = \int_{C_+} \frac{u^{\rho-1}}{\log u} du$ であるが,

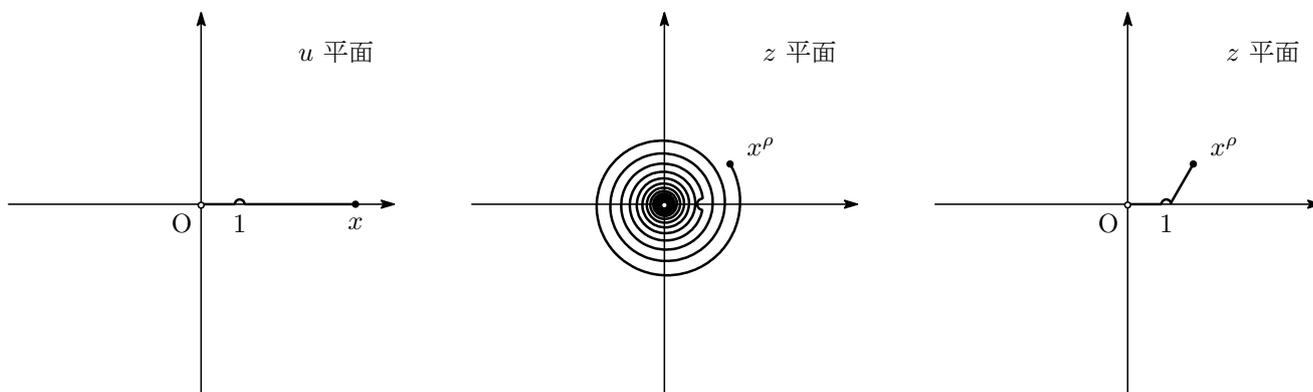
$u^\rho = z$ と置換することにより $\int_{C_+} \frac{u^{\rho-1}}{\log u} du = \int_0^{x^\rho} \frac{1}{\log z} dz$ となる, この右辺を $\text{Li}(x^\rho) - \pi i$ と書きたいのであるが, 問題は複素数値 z に対する $\text{Li}(z)$ の定義である. これを説明しておく.

$\rho = a + bi$ ($0 < a < 1, b > 0$) とすると, 左辺の積分は

$$u^{\rho-1} = \exp\{(\rho-1)\log u\} = \exp\{(a-1)\log u + (b\log u)i\} = u^{a-1} \{\cos(b\log u) + i\sin(b\log u)\}$$

として紛れなく定義される.

これに対応する右辺の積分経路は, 中央の図のようになっている. (図は $x = 4, \rho = \frac{1}{2} + 14i$ の場合)



u 平面の $u: 0 \rightarrow 1 - \epsilon$ に対応する経路は z 平面の $z: 0 \rightarrow 1 - \rho\epsilon$ を無限回回転する経路に写される. この回転はなんら問題にならない. この経路に沿った積分値は $z: 0 \rightarrow 1 - \rho\epsilon$ を直線で結ぶ経路に沿う積分と一致する.

1 の周りの半周回転の経路はやはり 1 の周りの半回転の経路に写されるが、これらの経路に沿う積分値はいずれの場合も $-\pi i$ に近づく。

その後の $u : 1 + \varepsilon \rightarrow x$ に対応する積分は、 z 平面では原点および 1 の周りを $\left[\frac{b \log x}{2\pi} \right]$ 回回転する経路 $z : 1 + \rho\varepsilon \rightarrow x^\rho$ に写される。

そうして、これらの全経路に沿う積分値が $b \rightarrow \infty$ のときに 0 に近づくのであるから、1 の周りの半回転の積分値 $-\pi i$ を差し引いて $\text{Li}(x^\rho) = \int_{C_+} \frac{u^{\rho-1}}{\log u} du + \pi i$ と定めるのが良さそうである。(要するに中央の図の経路から 1 の周りの半円を除いた経路に沿う積分である。その場合 $\lim_{b \rightarrow \infty} \text{Li}(x^\rho) = \pi i$)

ところが $\text{Li}(z)$ を、 z 平面から負の実数を除いた領域への $\text{Li}(x)$ の解析接続と定義するのであれば、その値は右図の積分経路に対応した積分値となり、中央のものとは一致しない。整数 $n = \left[\frac{b \log x}{2\pi} \right]$ として $2n\pi i$ の差が出てしまう。(もちろん $\text{Li}(x^\rho)$ は b に関する連続関数でもなくなり $\lim_{b \rightarrow \infty} \text{Li}(x^\rho)$ は発散してしまう。)

しかし、その $2n\pi i$ の差に関する問題を慎重に考える必要はないのである、なぜなら、 $\int_0^{x^\rho} \frac{1}{\log z} dz$ の積分経路をどう取ろうが、 $\int_0^{x^\rho} \frac{1}{\log z} dz$ の積分経路としてその共役な経路をとれば、積分結果も共役となり、経路の選択による差は $2n\pi i$ と $-2n\pi i$ となって打ち消してしまうからである。この意味でも $\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ と組み合わせるのは $\log\left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right)$ ではなく、 $\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ であるべきだと思われるのであるが、なぜかどの本を見てもそうはなっていないような気がするのはなぜだろう。関数等式から ρ が自明でない零点であれば、 $1-\rho$ も自明でない零点であることは分かるが、鏡像の原理より ρ が自明でない零点であれば、 $\bar{\rho}$ も自明でない零点であるわけだ。まさかそれに気づいてないとは思えないのだが⁴。 □

命題 7-2-8
$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 + \frac{s}{2m}\right) - \frac{s}{2m}}{s} \right] x^s ds = \int_{\infty}^x \frac{1}{u(u^2-1)\log u} du$$

証明 命題 7-2-2 の結果 (2) を使って

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 + \frac{s}{2m}\right) - \frac{s}{2m}}{s} \right] x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\log x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log\left(1 + \frac{s}{2m}\right)}{s} \right] x^s ds \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\infty}^x \frac{u^{-2m-1}}{\log u} du \\ &= \int_{\infty}^x \frac{u^{-3}}{1-u^{-2}} \frac{1}{\log u} du \\ &= \int_{\infty}^x \frac{1}{u(u^2-1)\log u} du \end{aligned}$$

□

⁴ Riemann 予想が正しければ $1-\rho = \bar{\rho}$ であるから何も問題はない。

命題 7-2-5 ~ 命題 7-2-8 の結果をこの節の最初の $\Pi(x)$ の表示式に代入すると次の明示公式が得られる.

結論 (明示公式) 7-2-9

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \{ \text{Li}(x^\rho) + \text{Li}(x^{1-\rho}) \} + \int_x^\infty \frac{du}{u(u^2 - 1) \log u} - \log 2$$

□

右辺の $\text{Li}(x)$ 以外の項は実際のところ小さいのだが, $\sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \{ \text{Li}(x^\rho) + \text{Li}(x^{1-\rho}) \}$ が実際に小さいことを示すためには Riemann 予想が必要である. つまり Riemann 予想が正しければ, この明示公式から素数定理が導かれる. しかし歴史的にはそうならなかった.

第 8 章

おまけ

§ 1 使うはずだったが使わなくなった定理など

次の定理は Γ 関数に関する Gauss, Legendre の積公式の証明に使うはずだったと思われる。

$$\text{定理 8-1-1} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{n} \pi = \frac{n}{2^{n-1}}$$

証明 1 $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{2n}\right)$ を 1 の $2n$ 乗根とする。

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{n} \pi = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^k - \zeta^{-k}}{2i} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^k}{2i}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta^{-2k})\right) = \frac{\zeta^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i)^{n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta^{-2k})\right)$$

ここで $\zeta^{\frac{n(n-1)}{2}} = \exp\left(\frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = i^{n-1}$ である。また、

$$\prod_{k=1}^{n-1} (x - \zeta^{-2k}) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

に $x = 1$ を代入して $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta^{-2k}) = n$ を得る。

□

証明 2 まず n が奇数の場合、 $\sin nx$ に関する n 倍角の公式は、 n 次多項式 $f_n(X) = (-4)^{\frac{n-1}{2}} X^n + \cdots + nX$ を用いて $\sin nx = f_n(\sin x)$ と表せることを、数学的帰納法で示そう。

- (i) $n = 1$ のとき $f_1(x) = x$, $n = 3$ のとき $f_3(x) = -4X^3 + 3X$ だから成立している,
- (ii) $n = k - 2$, k (k は 3 以上の奇数) のときの成立を仮定する。 $\sin(k+2)x + \sin(k-2)x = 2 \sin kx \cos 2x$ より

$$\begin{aligned} \sin(k+2)x &= 2f_k(\sin x)(1 - 2\sin^2 x) - f_{k-2}(\sin x) \\ &= -4(-4)^{\frac{k-1}{2}} \sin^{k+2} x + \cdots + \{2(k) - (k-2)\} \sin x \\ &= (-4)^{\frac{k+1}{2}} \sin^{k+2} x + \cdots + (k+2) \sin x \end{aligned}$$

以上より証明された。

すると $x = -\frac{n-1}{2n}\pi, -\frac{n-3}{2n}\pi, \dots, -\frac{2}{2n}\pi, 0, \frac{2n}{2n}\pi, \frac{4}{2n}\pi, \frac{n-1}{2n}\pi$ の n 個の値について $\sin nx = 0$ であるから $f_n(X) = 0$ は $X = -\sin \frac{n-1}{2n}\pi, -\sin \frac{n-3}{2n}\pi, \dots, -\sin \frac{2}{2n}\pi, 0, \sin \frac{2n}{2n}\pi, \sin \frac{4}{2n}\pi, \sin \frac{n-1}{2n}\pi$ の n 個の解を持つ。 $X = 0$ を除いた残りの $n-1$ 個の解の、解と係数の関係より

$$\left(-\sin \frac{n-1}{2n}\pi\right) \left(-\sin \frac{n-3}{2n}\pi\right) \cdots \left(-\sin \frac{2}{2n}\pi\right) \left(\sin \frac{2n}{2n}\pi\right) \left(\sin \frac{4}{2n}\pi\right) \left(\sin \frac{n-1}{2n}\pi\right) = (-1)^{n-1} \frac{n}{(-4)^{\frac{n-1}{2}}}$$

これを整理すると $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{n} \pi = \frac{n}{2^{n-1}}$ が得られる.

次に n が偶数の場合. $n = 2m$ とおく. $n - 1$ までは成立しているとする

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{n} \pi &= \prod_{k=1}^{2m-1} \sin \frac{k}{2m} \pi = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k}{2m} \pi \right)^2 = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k}{2m} \pi \right) \left(\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k}{2m} \pi \right) \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2} \sin \frac{k}{m} \pi = \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k}{m} \pi = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{m}{2^{m-1}} = \frac{2m}{2^{2m-1}} = \frac{n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

帰納法により証明された. □

次の注もどこかに書く予定だった.

注 Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ の収束軸 σ_c は

$$\sigma_c = \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |s_n|}{\log n} & s_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ が発散する場合} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n + a_{n+1} + \dots|}{\log n} & s_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ が収束する場合} \end{cases}$$

で与えられる. (Zagier) □

定理 8-1-2 $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

証明

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[-\frac{1}{x} \sin^2 x \right]_{\epsilon}^{\infty} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

従って $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ を示せばよい. これは, C を複素平面の半径 ϵ , 偏角 $\pi \rightarrow 0$ の半円, D を複素平面

面の半径 R , 偏角 $0 \rightarrow \pi$ の半円として $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ を $\int_{-R \rightarrow -\epsilon} + \int_C + \int_{\epsilon \rightarrow R} + \int_D$ で積分すると分かる. 実際

$\left(\int_{-R \rightarrow -\epsilon} + \int_{\epsilon \rightarrow R} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin z}{z} dz$ である. また $\frac{e^{iz}}{z}$ は $z = 0$ に 1 位の極を持ち, 留数は 1 であるか

ら $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i$ である. さらに $\left| \int_D \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_D \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| |dz| = \int_0^{\pi} \frac{e^{-R \sin \theta}}{R} R d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-R \sin \theta}}{R} R d\theta \leq$

$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \left[-\frac{\pi}{R} e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R})$ より $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_D = 0$ がわかる.

定義 8-1-3

$x > 0$ とする. また n を自然数とする. 以下のように関数を定義する.

- (1) $T(x) = \log([x]!)$
- (2) 約数関数 $d(n) : d(n) = \#\{d \mid d \geq 1, d|n\}$
- (3) k 乗約数和関数 $\sigma_k(n) : \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

命題 8-1-4 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ に対応する形式的 Dirichlet 級数の等式は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$

左辺は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1)$ だから $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ が得られる.

これを 1 だけ平行移動すると $\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ である. 左辺は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で正則で

$\operatorname{Re}(s) = 1$ 上では $s = 1$ に留数 $\frac{6}{\pi^2}$ の一位の極を持つ以外は正則だから, 池原の定理によると $\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} \sim \frac{6}{\pi^2} x$

が成り立つのだろうか.