For Tutors

MeBio　数学テキスト

フーリエ変換など

―ζ 関数とその周辺―

Edited by kamei

第 1 章

種々の積分変換

§ 1　Fourier 変換

ζ 関数を理解するためには Fourier 変換，Laplace 変換，Mellin 変換などの知識が欠かせない．それをまとめておく．まずは Fourier 逆変換の導入から．

定理 1–1–1　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ とする．$f(x)$ のフーリエ変換 $F(\xi)$，つまり $F(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}\,dx$ に対し，その逆変換は

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

で与えられる．

証明 1（Fourier **級数の利用**）　区間 $[-L,\ L]$ に関して Fourier 級数の理論より $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{\pi}{L}nx}$ と置くことが出来る．ここで係数 c_n は $c_n=\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(y)e^{-i\frac{\pi}{L}ny}\,dy$ と表される．従って

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(y)e^{-i\frac{\pi}{L}ny}\,dy\right)e^{i\frac{\pi}{L}nx}\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{L}e^{i\frac{\pi}{L}nx}\int_{-L}^{L}f(y)e^{-i\frac{\pi}{L}ny}\,dy\end{aligned}$$

ここで $\xi_n=\dfrac{\pi n}{L}$, $\Delta\xi=\xi_{n+1}-\xi_n=\dfrac{\pi}{L}$ と置くと

$$\text{右辺}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\xi_n x}\Delta\xi\int_{-L}^{L}f(y)e^{-i\xi_n y}\,dy$$

$L\to\infty$ の極限を考える．n を $\xi\in[\xi_n,\ \xi_{n+1}]$ を満たすように取れば

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}f(y)e^{-i\xi_n y}\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\xi y}\,dy=F(\xi)$$

であるから，区分求積法により

$$\lim_{n\to\infty}\text{右辺}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}dx$$

□

証明 2 （**超関数の利用**）

証明すべき式の右辺に $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy e^{i\xi x}\,d\xi \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y}e^{i\xi x}d\xi\right)dy \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-y)}d\xi\right)dy \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)dy \\
= & f(x)
\end{aligned}
$$

□

§ 2　片側 Laplace 変換

定理 1–2–1　　$f(t)$ を $t \geqq 0$ で定義された区分的に連続な関数として $f(t)$ の（片側）Laplace 変換 $F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ に対し，その逆変換は

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br} F(s)e^{st}ds$$

で与えられる．ここで積分路 Br は，$F(s)$ の収束域を $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ としたとき，任意に $\sigma > \sigma_0$ を選んで作った虚軸に平行な直線 $\sigma - i\infty \to \sigma + i\infty$ を表す．（Bromwich 積分）

証明 1　　Fourier **逆変換の利用**

まず $f(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 0) \\ \dfrac{f(0)}{2} & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ と定義して $f(x)$ の定義域を全実数にする．Heaviside 関数を $H(x)$ として $f(x)$ の代わりに $f(x)H(x)$ を用いると思ってもよい．また $s = \sigma + i\omega$ とおいて $F(s) = F(\sigma + i\omega)$ を実 2 変数の関数と見なす．このとき

$$
\begin{aligned}
F(\sigma + i\omega) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt \quad \text{（積分区間を広げてもよい）} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt \\
&= \mathcal{F}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right](\omega)
\end{aligned}
$$

従って Fourier 逆変換の公式より

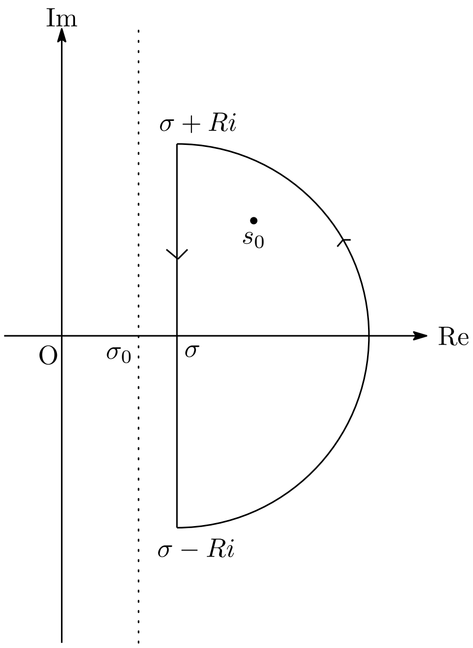
$$\begin{aligned} f(t)e^{-\sigma t} &= \mathcal{F}^{-1}[F(\sigma+i\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\sigma t}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\sigma t}\int_{Br} F(s)e^{st}\frac{ds}{i} \end{aligned}$$

これより $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F](t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Br}F(s)e^{st}ds$ が証明された. □

疑問

$f(t)$ は連続である必要はなく，その Fourier 変換も連続，微分可能とは限らないのに，$f(t)e^{-\sigma t}$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\omega)$ は $s=\sigma+i\omega$ の関数と見て解析関数になるということは？

証明 2 （留数解析）



$F(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$ で正則である．s_0 を $\mathrm{Re}(s_0)>\sigma_0$ となるように取る．また $\sigma_0<\sigma<\mathrm{Re}(s_0)$ となる σ を選ぶ．$F(s)$ は $\mathrm{Re}(s)\geqq\sigma$ で有界である．

積分経路 C を左図のように，$\sigma-Ri$ と $\sigma+Ri$ を結ぶ線分およびその 2 点を直径の両端とする半円を合わせたものとする．ただし積分方向は反時計回りとする．また R は s_0 が C の内部に入るように十分大きく取る．

Cauchy の積分定理より $F(s_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{F(s)}{s-s_0}ds$ であるが，$R\to\infty$ のとき円周部分の積分は 0 に収束するので，$F(s_0)=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Br}\frac{F(s)}{s-s_0}ds$ がわかる．
ここで $\mathrm{Re}(s-s_0)<0$ であるから

$$\int_0^\infty e^{(s-s_0)t}dt=\left[\frac{e^{(s-s_0)t}}{s-s_0}\right]_0^\infty=-\frac{1}{s-s_0}$$

これを代入し Fubini の定理により積分の順序を交換すると

$$F(s_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F(s)\int_0^\infty e^{(s-s_0)t}dtds=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F(s)e^{st}ds\right)e^{-s_0t}dt$$

これと，元々の Laplace 変換の定義式 $F(s_0)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-s_0t}dt$ を比較すると，Laplace 変換の一意性より $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Br}F(s)e^{st}ds$ でなければならないことが分かる. □

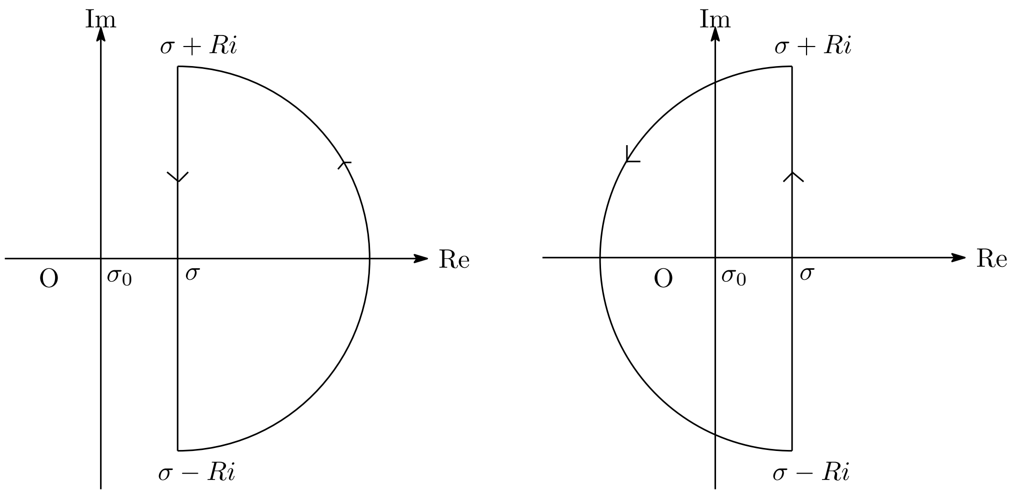
証明 3 （超関数の利用）

先ほどと同じく $f(x)=f(x)H(x)$ とする．（ただし $f(0)=\dfrac{f(+0)}{2}$ とする.）証明すべき等式の右辺に

$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(T)e^{-sT}\,dT$ を代入する．途中で $s = \sigma + i\omega$ と変数変換し，積分の順序を交換している．

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\int_{Br} F(s)e^{st}ds \\
=\ & \frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(T)e^{-sT}\,dT\right)e^{st}ds \\
=\ & \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(T)e^{-\sigma T}e^{-i\omega T}\,dT\right)e^{\sigma t}e^{i\omega t}\,i\,d\omega \\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-T)}\,d\omega\right)f(T)e^{\sigma(t-T)}\,dT \\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)f(T)e^{\sigma(t-T)}\,dT \\
=\ & f(t)
\end{aligned}$$

例 1–2–2　$f(t) = H(t-a)$ とする．つまり $f(t)$ は $t < a$ なら 0, $t > a$ なら 1 である．$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \dfrac{e^{-as}}{s}$ で収束領域は $\mathrm{Re}(s) > 0$ となる．Laplace 逆変換は $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{Br} F(s)e^{st}\,ds = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{Br}\dfrac{e^{s(t-a)}}{s}\,ds$ で与えられるはずである．これを確認してみよう．



(i)　$t < a$ のときは左図の積分経路における半円上の積分が 0 に収束する．経路内部に極は存在しないので，$f(t) = 0$ である．

(ii)　$t > a$ のときは右図の積分経路における半円上の積分が 0 に収束する．経路内部の極は $s = 0$ だけでその留数は

(iii)　$t = a$ のときは $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{Br}\dfrac{1}{s}\,ds = \left[\dfrac{1}{2\pi i}\log s\right]_{\sigma-i\omega}^{\sigma-i\omega} = \dfrac{1}{2}$

§ 3　両側 Laplace 変換

$f(t)$ の両側 Laplace 変換 $F(s) = \mathcal{B}[f](s)$ の定義式は次の通りである．

$$F(s) = \mathcal{B}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$s > 0$ の場合 $t \to +\infty$ 側は収束しやすいのだが $t \to -\infty$ 側は $f(t)$ 自体が急減少でないと収束しない．だからこの変換はよほど人為的な $f(t)$ にしか適用できず，使い道のあまりないものではないかと思ったのだが，$f(t) = e^{-e^{-t}}$ のような関数に対しては収束する．$e^{-t} = x$ と置換することにより

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{-t}} e^{-st}\,dt = \int_{\infty}^{0} e^{-x} x^s \,\frac{dx}{-x} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^s \,\frac{dx}{x} = \Gamma(s)$$

しかしこれは意味のある Mellin 変換を無意味な Laplace 変換で書いてみただけのような感があってあまり本質的な感じがしない．要するに両側 Laplace 変換は Mellin 変換などとの関連においてのみ重要なのではないだろうか？

両側 Laplace 変換は単に左側 Laplace 変換と右側 Laplace 変換の和になっているだけである．つまり

$$f_+(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ \dfrac{f(0)}{2} & (t=0) \\ f(t) & (t>0) \end{cases} \quad , \quad f_-(t) = \begin{cases} f(t) & (t<0) \\ \dfrac{f(0)}{2} & (t=0) \\ 0 & (t>0) \end{cases}$$

のように $f(t)$ を分割すると．

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{B}[f](s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_-(t) e^{-st}\,dt + \int_0^{\infty} f_+(t) e^{-st}\,dt \\ &= \int_{\infty}^{0} f_-(-T) e^{-(-s)T}\,(-dT) + \int_0^{\infty} f_+(t) e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} f_-(-T) e^{-(-s)T}\,dT + \int_0^{\infty} f_+(t) e^{-st}\,dt \\ &= \mathcal{L}[f_-(-t)](-s) + \mathcal{L}[f_+(t)](s) \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{L}[f_-(-t)](-s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f_-(-t) e^{-(-s)t}\,dt$ の収束域は $\mathrm{Re}(s) < \sigma_-$ の形で得られることは容易に分かる．$\mathcal{L}[f_+(t)](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f_+(t) e^{-st}\,dt$ の収束域を $\mathrm{Re}(s) > \sigma_+$ とする．$\sigma_- \leqq \sigma_+$ のとき $\mathcal{B}[f](s)$ は存在しない．$\sigma_+ < \sigma_-$ のとき $\mathcal{B}[f](s)$ の収束域は $\sigma_+ < \mathrm{Re}(s) < \sigma_-$ ということになる．

$\mathcal{B}[f](s)$ の収束域が $\sigma_+ < \mathrm{Re}(s) < \sigma_-$ である場合，$\sigma_+ < \sigma < \sigma_-$ となる σ を取って Bromwich 積分路 $Br : \sigma - i\infty \to \sigma + i\infty$ を考えると，$f(t) = \mathcal{B}^{-1}[F](t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{Br} F(s) e^{st}\,ds$ で与えられることが容易に分かる．

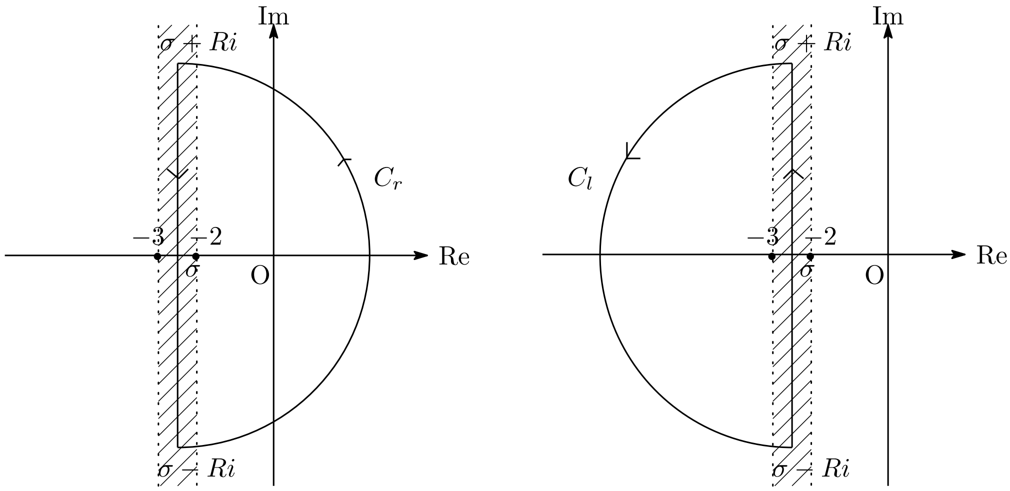
例 1–3–1　$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t < 0 \\ e^{-3t} & t \geqq 0 \end{cases}$ の両側 Laplace 変換 $F(s)$ を求めてみよう．

$F_1(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-2t} e^{-st}\,dt = \int_{\infty}^{0} e^{2T} e^{sT}\,(-dT) = \int_0^{\infty} e^{(s+2)T}\,dT$ の収束域は $s < -2$ であり，その範囲で $F_1(s) = \left[\dfrac{e^{(s+2)T}}{s+2}\right]_0^{\infty} = -\dfrac{1}{s+2}$ である．また $F_2(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t}\,dt$ の収束域は $s > -3$ であり，その範囲で $F_2(s) = \left[\dfrac{e^{-(s+3)t}}{-(s+3)}\right]_0^{\infty} = \dfrac{1}{s+3}$ である．

以上より，収束域は $-3 < \mathrm{Re}(s) < -2$ で，$F(s) = -\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s+3}$ であることが分かった．

次に $F(s)$ を Laplace 逆変換で $f(t)$ に戻してみよう．$-3<\sigma<-2$ である実数 σ を固定する．積分経路 Br を $Br:\sigma-i\infty\to\sigma+i\infty$ とする．$f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Br}F(s)e^{st}\,ds=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds$ である．この積分値を留数計算で求めよう．

$\sigma-iR$ と $\sigma+iR$ を直径の両端とする半円で，直径の右側にあるものを反時計回りに一周する経路を C_r, 直径の左側にあるものを反時計回りに一周する経路を C_l とする．



(i) $t<0$ のときは C_r で考える．$R\to\infty$ のとき円周部分の積分値が 0 に収束するので，留数解析により

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=e^{-2t}$$

(ii) $t>0$ のときは C_l で考える．$R\to\infty$ のとき円周部分の積分値が 0 に収束するので，留数解析により

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=e^{-3t}$$

(iii) $t=0$ のときは直接計算により

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{0}\,ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[-\log(s+2)+\log(s+3)\right]_{\sigma-iR}^{\sigma-iR}=\frac{1}{2\pi i}(\pi i+\pi i)=1$$

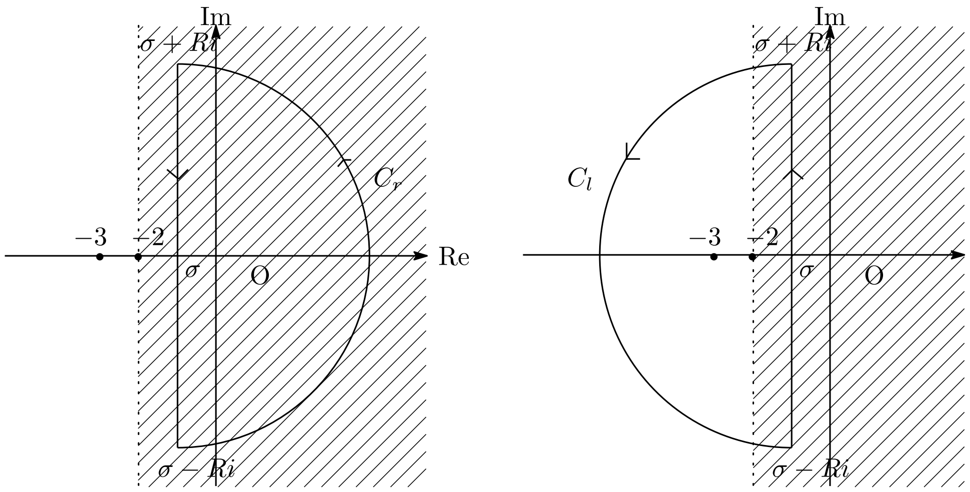
□

例 1–3–2　$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & t\geqq 0\end{cases}$ の両側 Laplace 変換 $F(s)$ を求めてみよう．

$F(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(-e^{-2t}+e^{-3t}\right)e^{-st}\,dt=\int_{0}^{\infty}\left(-e^{-(s+2)t}+e^{-(s+3)t}\right)dt$ の収束域は $s>-2$ であり，その範囲で $F(s)=\left[-\dfrac{e^{-(s+2)t}}{s+2}+\dfrac{e^{-(s+3)t}}{-(s+3)}\right]_{0}^{\infty}=-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}$ である．

次に $F(s)$ を Laplace 逆変換で $f(t)$ に戻してみよう．$-2<\sigma$ である実数 σ を固定する．積分経路 Br を $Br:\sigma-i\infty\to\sigma+i\infty$ とする．$f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Br}F(s)e^{st}\,ds=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds$ である．この積分値を留数計算で求める．

$\sigma-iR$ と $\sigma+iR$ を直径の両端とする半円で，直径の右側にあるものを反時計回りに一周する経路を C_r, 直径の左側にあるものを反時計回りに一周する経路を C_l とする．



(i)　$t<0$ のときは C_r で考える．$R\to\infty$ のとき円周部分の積分値が 0 に収束するので，留数解析により

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=0$$

(ii)　$t>0$ のときは C_l で考える．$R\to\infty$ のとき円周部分の積分値が 0 に収束するので，留数解析により

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{st}\,ds=-e^{-2t}+e^{-3t}$$

(iii)　$t=0$ のときは直接計算により

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)e^{0}\,ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[-\log(s+2)+\log(s+3)\right]_{\sigma-iR}^{\sigma-iR}=\frac{1}{2\pi i}(\pi i+\pi i)=1$$

□

例 1–3–1 と例 1–3–2 のどちらも $F(s)=-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}$ である．違うのはその定義域だけだが，それが原因で逆変換が異なっているのである．

§ 4　Mellin 変換

$x\geqq 0$ で定義された $f(x)$ に対し，その Mellin 変換 $F(s)=\mathcal{M}[f](s)=\displaystyle\int_0^\infty f(x)x^s\frac{dx}{x}$ で定義する．最も有名な例は $\mathcal{M}[e^{-x}](s)=\Gamma(s)$ であろう．Mellin 変換は両側 Laplace 変換で表すことが出来る．

命題 1–4–1　　$\mathcal{M}[f(x)](s)=\mathcal{B}[f(e^{-t})](s)$ である．

証明　$\displaystyle\mathcal{M}[f(x)](s)=\int_0^\infty f(x)x^s\frac{dx}{x}=\int_\infty^{-\infty}f(e^{-t})e^{-ts}\frac{-e^{-t}dt}{e^{-t}}=\int_{-\infty}^\infty f(e^{-t})e^{-ts}dt=\mathcal{B}[f(e^{-t})](s)$

命題 1–4–2　　Mellin 変換 $F(s)=\mathcal{M}[f(x)](s)$ の逆変換は $f(x)=\mathcal{M}^{-1}[F(s)](t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Br}F(s)x^{-s}ds$ で与えられる．

証明 1　$F(s)=\mathcal{M}[f(x)](s)=\mathcal{B}[f(e^{-t})](s)$ であるから

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)](-\ln x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F(s)e^{st}\,ds|_{t=-\ln x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F(s)x^{-s}\,ds$$

証明 2　$F_1(s) = \int_0^1 f(x)x^s \frac{dx}{x}$ とおき，その収束域を $\mathrm{Re}(s) > \sigma_1$ とする．収束域から s_0 をとり，$\sigma_1 < \sigma < \mathrm{Re}(s_0)$ となる σ を選んで Br, C_l, C_r を例 1–3–1 と同じように定める．Cauchy の積分定理より $F_1(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{F_1(s)}{s-s_0}\,ds$ であるが，$R\to\infty$ のときに半円上の積分値は 0 に収束するので $F_1(s_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\frac{F_1(s)}{s-s_0}\,ds$ がわかる．また $\mathrm{Re}(s_0-s)>0$ なので $\int_0^1 x^{s_0-s-1}\,ds = \left[\frac{x^{s_0-s}}{s_0-s}\right]_0^1 = \frac{1}{s_0-s} = -\frac{1}{s-s_0}$ である．

これより $F_1(s_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(-\int_0^1 x^{s_0-s-1}\,dx\right)F_1(s)\,ds = \int_0^1\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F_1(s)x^{-s}\,ds\right)x^{s_0}\frac{dx}{x}$.
この式と $F_1(s_0)$ の定義式 $F_1(s_0) = \int_0^1 f(x)x^s\frac{dx}{x}$ を比較してみると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F_1(s)x^{-s}\,ds = \begin{cases} f(x) & 0<x<1 \\ 0 & 1<x \end{cases}$$

が分かる．

同様に $F_2(s) = \int_1^\infty f(x)x^s\frac{dx}{x}$ とおき，その収束域を $\mathrm{Re}(s) < \sigma_2$ とする．収束域から s_0 をとり，$\mathrm{Re}(s_0) < \sigma < \sigma_2$ となる σ を選んで Br, C_l, C_r を定める．Cauchy の積分定理より $F_2(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}\frac{F_2(s)}{s-s_0}\,ds$ であるが，$R\to\infty$ のときに半円上の積分値は 0 に収束するので $F_2(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\frac{F_1(s)}{s-s_0}\,ds$ がわかる．また $\mathrm{Re}(s_0-s)<0$ なので $\int_1^\infty x^{s_0-s-1}\,ds = \left[\frac{x^{s_0-s}}{s_0-s}\right]_1^\infty = -\frac{1}{s_0-s} = \frac{1}{s-s_0}$ である．

これより $F_2(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(\int_1^\infty x^{s-s_0-1}\,dx\right)F_2(s)\,ds = \int_1^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F_2(s)x^{-s}\,ds\right)x^{s_0}\frac{dx}{x}$.
この式と $F_2(s_0)$ の定義式 $F_2(s_0) = \int_1^\infty f(x)x^s\frac{dx}{x}$ を比較してみると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F_2(s)x^{-s}\,ds = \begin{cases} 0 & 0<x<1 \\ f(x) & 1<x \end{cases}$$

が分かる．

$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$ であるから，以上より証明された．□

証明 3　超関数を利用する．途中で $y = xe^t$ と置換している．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}F(s)x^{-s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\left(\int_0^\infty f(y)y^s\frac{dy}{y}\right)x^{-s}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{y}{x}\right)^{\sigma+i\omega} id\omega f(y)\frac{dy}{y} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{t(\sigma+i\omega)}d\omega f(xe^t)\frac{xe^t dt}{xe^t} \\
&= \int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{it\omega}d\omega\right)f(xe^t)e^{\sigma t}dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty \delta(t)f(xe^t)e^{\sigma t}dt \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

□

Mellin 変換により巾級数と Dirichlet 級数の相互変換が出来るようになる.

定理 1–4–3　$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ とおく.

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \mathcal{M}\left[F\left(e^{-t}\right)\right](s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} F\left(e^{-x}\right) x^{s-1}\, ds$$

第 2 章

Perron の公式

Dirichlet 級数の係数の部分和を積分で求めることが出来る．それが Perron の公式である．Dirichlet 級数 $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ の収束域を $\mathrm{Re}(s) > \sigma$, 収束域内の Bromwich 積分路を $Br : \sigma - i\infty \to \sigma + i\infty$ とする．

定理 2–4 Perron の公式 $\displaystyle\sum_{n \leqq x}{}' a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} g(s) x^s \frac{ds}{s}$ が成り立つ，ここで $\displaystyle\sum_{n \leqq x}{}' a_n$ は，x が整数の場合は $a_1 + a_2 + \cdots + a_{x-1} + \frac{1}{2} a_x$ のように最終項のみ $\frac{1}{2}$ 倍して足す他は通常の $\displaystyle\sum_{n \leqq x}$ と同じである．

証明のために次の補題をまず証明しよう．

補題 2–5 $b > 0$ とする．$\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} O\left(\dfrac{y^b}{T \log y}\right) & 0 < y < 1 \\ \dfrac{1}{2} + O\left(\dfrac{b}{T}\right) & y = 1 \\ 1 + O\left(\dfrac{y^b}{T |\log y|}\right) & 1 < y \end{cases}$

証明

$\boxed{\text{未完}}$