For Tutors

MeBio　数学テキスト

楕円関数

—加法定理など—

Edited by kamei

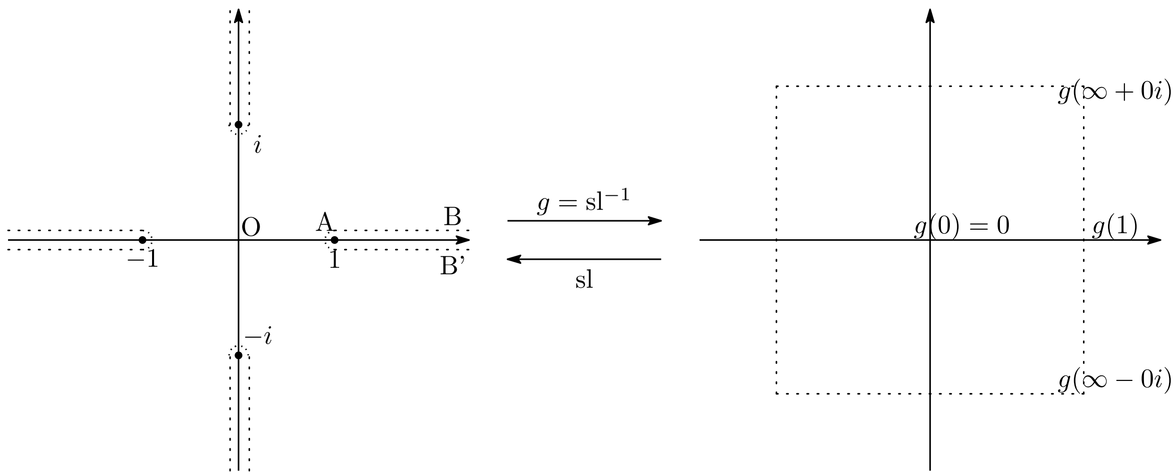
第 1 章

レムニスケート関数の定義と加法定理

§ 1　レムニスケート関数の複素関数的扱い

$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^4}}$ は $z=\pm 1,\ \pm i$ に特異点を持つ 2 価関数なので，$z \fallingdotseq \pm 1,\ \pm i$ に対して 0 と z を結ぶ特異点を通らない経路 C （のホモトピー類）を与えると $g(z) = \mathrm{sl}^{-1}(z) = \displaystyle\int_C \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} dz$ の値が決まる．ただし C の始点 0 に対する枝は $f(0)=0$ のものとする．

ここで $\mathrm{sl}^{-1}(z)$ の値を 1 価に確定するために，複素数平面から 4 つの半直線 $[1,\ \infty),\ [i,\ i\infty),\ [-1,\ -\infty),\ [-i,\ -i\infty)$ を取り除いた単連結な領域 D での関数を考える．



$z=1$ の近傍では $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^4}} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ なので（つまり $\dfrac{1}{2}$ 位の極なので），積分すると $\dfrac{1}{2}$ 位の零点となり，$g(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^4}}\, dz$ が収束することがわかる．そこで ϖ を $\dfrac{\varpi}{2} = g(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^4}}\, dz$ で定義する．

このとき $g(i) = \displaystyle\int_0^i \frac{1}{\sqrt{1-z^4}}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(ir)^4}} idr = i\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr = \frac{\varpi}{2} i,$

$g(-1) = -g(1) = -\dfrac{\varpi}{2},\ g(-i) = -g(i) = -\dfrac{\varpi}{2} i$ がわかる．（もちろん積分経路は D 内にとる．）

$f(z)$ を D で解析接続した場合，$r>1$ のとき $f(r+0i) = \dfrac{i}{\sqrt{r^4-1}}$ であることが容易に分かるので，図の経路 AB に沿った積分値については,

$$\int_{1+0i}^{\infty+0i} \frac{1}{\sqrt{1-z^4}}\, dz = \int_1^\infty \frac{i}{\sqrt{r^4-1}}\, dr = i\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{s}\right)^4 - 1}} \left(-\frac{1}{s^2} ds\right) = i\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{\varpi}{2} i$$

である．これより $g(\infty+0i)=\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i$ がわかる．つまり O から $\mathrm{B}(+\infty+0i)$ まで $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^4}}$ を積分していくと，A までは実軸上を右に進み $\dfrac{\varpi}{2}$ に達するが，A を超えると左に 90° 進行方向を変え，無限積分の後 $\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i$ に達する．

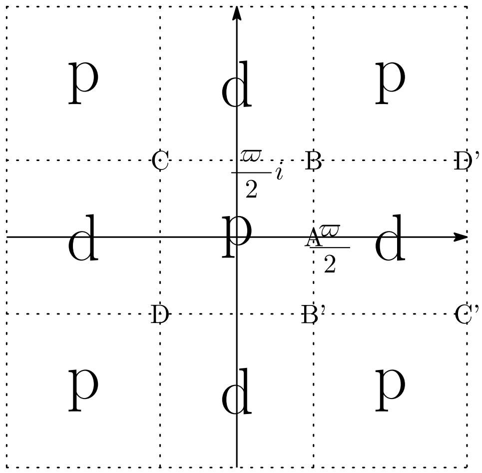
同様に $r>1$ のとき $f(r-0i)=\dfrac{-i}{\sqrt{r^4-1}}$ なので $g(\infty-0i)=\dfrac{\varpi}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i$ がわかる．これは A を超えた後右に 90° 進路を変えて進むことを意味する．

他も同様に考えることにより D の像は $\pm\dfrac{\varpi}{2}\pm\dfrac{\varpi}{2}i$ を 4 頂点とする正方形の内部であることが分かった．この対応はトポロジカルにイメージすることも難しくない．

命題 1–1–1

sl は全平面に解析接続される．

（証明）



上の結果より sl は $\pm\dfrac{\varpi}{2}\pm\dfrac{\varpi}{2}i$ を 4 頂点とする正方形の内部を D に（1 : 1 に）移す解析関数であることが分かった．また，図の AB および AB' の像はどちらも実軸上の半直線 $[1,\ \infty]$ であり，A に関する対称変換により関数値が一致する．従って，正方形 BCDB' が正方形 B'C'D'B に重なるように同一視してこの領域に sl を延長すると，これが解析接続になっていることが分かる．

これを繰り返すことにより sl は全平面に解析接続されることが直ちに分かる．（上図で p と書いてある各領域は，平行移動で重なる点が同一の関数値をとる．また d と書いてある各領域は，p を 180° 回転してから平行移動して重なる点が同一の関数値をとることを意味する．）

（証明終）

この構成より $\mathrm{sl}(z)$ が次の性質を持つことはすぐに分かる．

(1)　$\mathrm{sl}(z)$ は $m\varpi+n\varpi i$ ($m,\ n$ はともに偶数もしくはともに奇数) を周期に持つ．

(2)　（半周期性）　$\mathrm{sl}(z+\varpi)=-\mathrm{sl}(z), \mathrm{sl}(z+\varpi i)=-\mathrm{sl}(z)$.

(3)　$\mathrm{sl}(z)$ の零点は $m\varpi+n\varpi i$ ($m,\ n$ は整数) であり，すべて 1 位の零点である．

(4)　$\mathrm{sl}(z)$ の極は $\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\varpi+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$ ($m,\ n$ は整数) であり，すべて 1 位の極である．

(5)　$\mathrm{sl}(z)$ はすべての零点および極を中心として奇関数であり，$\mathrm{sl}^{-1}(1)=\left(2m+\dfrac{1}{2}\right)\varpi+2n\varpi i,$

$\mathrm{sl}^{-1}(-1)=\left(2m-\dfrac{1}{2}\right)\varpi+2n\varpi i$, $\mathrm{sl}^{-1}(i)=2m\varpi+\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$, $\mathrm{sl}^{-1}(i)=2m\varpi+\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$ （以上すべて m, n は整数）を中心として偶関数である．

$\mathcal{L}=\{m\varpi+n\varpi i \mid m,\ n$ はともに偶数もしくはともに奇数$\}$ とする．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{C}$ 内の格子であり，sl は Riemann 面 $R=\mathbb{C}/\mathcal{L}$ 上の関数と見なせる．O(0), A(2ϖ), B($3\varpi+\varpi i$), C($\varpi+\varpi i$) とすると，R の基本領域として，平行四辺形 OABC の周および内部から辺 BC, CD を取り除いた領域をとることが出来る．

系 1–1–2

$\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\mathbb{C}^*$ とする．$\mathrm{sl}: R \Rightarrow \mathbb{C}^*$ により R は $\mathbb{C}^*$ を二重に被覆する．分岐点は $\pm 1,\ \pm i\in\mathbb{C}^*$ の 4 点のみであり，他の点はすべて $2:1$ に対応する．

（証明）

上の図，および関数論の初歩の理論より明らかである． （証明終）

命題 1–1–3

$\mathrm{sl}(z)$ の極 $\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\varpi+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$ ($m,\ n$ は整数) における留数は，$m,\ n$ の偶奇が一致する場合 $-i$ であり，$m,\ n$ の偶奇が一致しない場合 i である．

（証明）

周期性と半周期性より $m=n=0$ の場合のみ示せばよい．z を $0<\mathrm{Re}(z)<\dfrac{\varpi}{2}, 0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{\varpi}{2}$ を満たす複素数とする．$w=\mathrm{sl}(z)$ は $\mathrm{Re}(w)>0, \mathrm{Im}(w)>0$ を満たす．

$$
\begin{aligned}
& w && =\mathrm{sl}(z)\\
\iff\ & z && =\int_{+0+0i}^{w}\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt=\int_{+\infty-\infty i}^{\frac{1}{w}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{s}\right)^4}}\left(-\frac{1}{s^2}ds\right)=\int_{+\infty-\infty i}^{\frac{1}{w}}\frac{-1}{\sqrt{s^4-1}}ds\\
& && =\int_{+\infty-\infty i}^{\frac{1}{w}}\frac{-i}{\sqrt{1-s^4}}ds=\int_{0}^{\frac{1}{w}}\frac{-i}{\sqrt{1-s^4}}ds-\int_{0}^{+\infty-\infty i}\frac{-i}{\sqrt{1-s^4}}ds\\
& && =-\mathrm{sl}^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)i+\mathrm{sl}^{-1}(+\infty-\infty i)i=-\mathrm{sl}^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)i+\left(\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)i\\
& && =-\mathrm{sl}^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)i+\frac{\varpi}{2}+\frac{\varpi}{2}i\\
\iff\ & \frac{1}{w} && =\mathrm{sl}\left(i\left(z-\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)\right)
\end{aligned}
$$

ところで $\mathrm{sl}^{-1}(z)=\displaystyle\int_0^w\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt=w+(\text{高次})$ だから $z=0$ における $\mathrm{sl}(z)$ の Taylor 展開は $\mathrm{sl}(z)=z+(\text{高次})$ である．従って

$$
\frac{1}{w}=i\left(z-\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)+(\text{高次}) \iff w=\frac{-i}{z-\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi}{2}i}+(\text{高次})
$$

（別証） $\mathrm{sl}(z)$ の極は $\mathrm{sl}\left(z-\dfrac{\varpi}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right)$ の零点であり，$\mathrm{sl}(z)$ の零点は $\mathrm{sl}\left(z-\dfrac{\varpi}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right)$ の極である．どちらの極も零点も 1 位なので， $\mathrm{sl}(z)\mathrm{sl}\left(z-\dfrac{\varpi}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right)$ は極も零点も持たない二重周期関数ということになる．これは定数でなければならない．それを c とおく．$z=\dfrac{\varpi}{2}$ を代入すると $c=\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2}\right)\mathrm{sl}\left(-\dfrac{\varpi}{2}i\right)=1\times(-i)=-i$ であることが分かる．従って $\mathrm{sl}(z)=\dfrac{-i}{\mathrm{sl}\left(z-\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)}$ がいえる．

（証明終）

系 1–1–4 もう一つの半周期性

$$\mathrm{sl}\left(z-\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi}{2}\right)=\frac{-i}{\mathrm{sl}(z)}$$

（系終）

これを用いると $\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{4}+\dfrac{\varpi}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ であることも分かる．これは直接的には

$$\mathrm{sl}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+r^4}}\,dr=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\frac{\varpi}{2\sqrt{2}}$$

からも確かめられる．

定義 1–1–5

$\mathrm{cl}(z)=\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2}-z\right)$ と定義する．

（定義終）

この構成より $\mathrm{cl}(z)$ が次の性質を持つことはすぐに分かる．

(1)　$\mathrm{cl}(z)$ は $m\varpi+n\varpi i$ ($m,\ n$ はともに偶数もしくはともに奇数) を周期に持つ．

(2)　（半周期性）　$\mathrm{cl}(z+\varpi)=-\mathrm{cl}(z)$, $\mathrm{cl}(z+\varpi i)=-\mathrm{cl}(z)$.

(3)　$\mathrm{cl}(z)$ の零点は $\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\varpi+n\varpi i$ ($m,\ n$ は整数) であり，すべて 1 位の零点である．

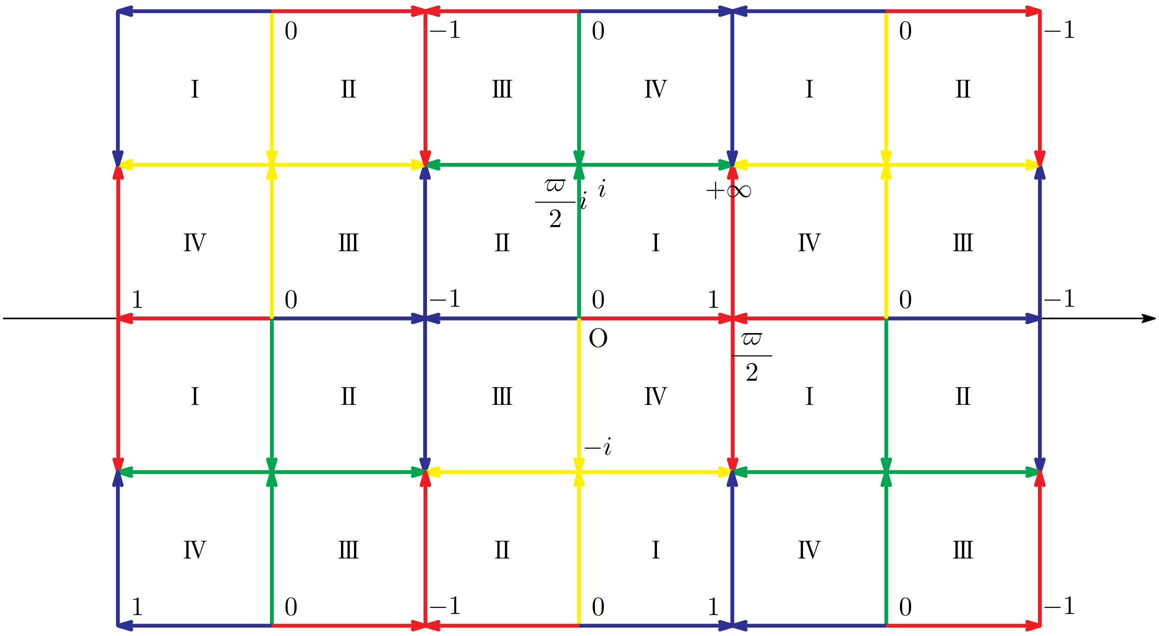
(4)　$\mathrm{cl}(z)$ の極は $m\varpi+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$ ($m,\ n$ は整数) であり，すべて 1 位の極である．

(5)　$\mathrm{cl}(z)$ はすべての零点および極を中心として奇関数であり，$\mathrm{cl}^{-1}(1)=2m\varpi+2n\varpi i$, $\mathrm{cl}^{-1}(-1)=(2m+1)\varpi+2n\varpi i$, $\mathrm{cl}^{-1}(i)=\left(2m+\dfrac{1}{2}\right)\varpi+\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$, $\mathrm{cl}^{-1}(i)=\left(2m-\dfrac{1}{2}\right)\varpi+\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\varpi i$ （以上すべて m, n は整数）を中心として偶関数である．

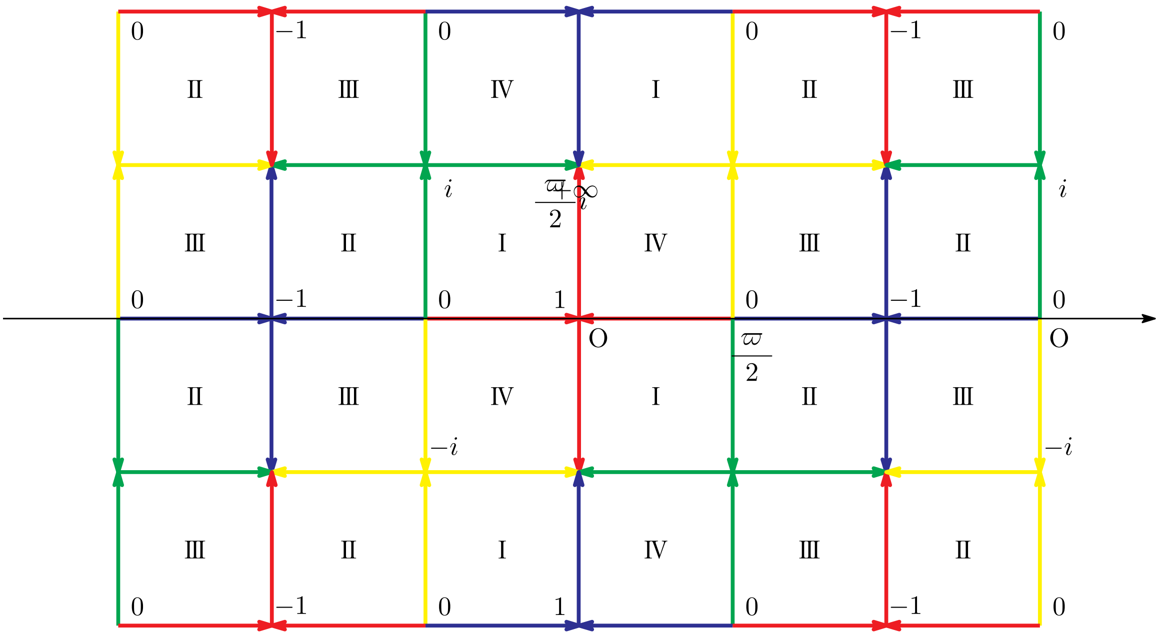
§ 2　主要な点における $\mathrm{sl}(z)$, $\mathrm{cl}(z)$ の値

以下の図においては
$$\left\{\begin{array}{ll}\text{赤の矢印は正の実数の増加方向} & (+0\to+\infty),\\ \text{青の矢印は負の実数の減少方向} & (-0\to-\infty),\\ \text{緑の矢印は純虚数の増加（？）方向} & (+0i\to+\infty i),\\ \text{黄の矢印は純虚数の減少（？）方向} & (-0i\to-\infty i)\end{array}\right.$$
を表す．またローマ数字 I，II，III，IVは，関数値が
$$\left\{\begin{array}{ll}\text{I の場合} & \mathrm{Re}>0 \text{ かつ } \mathrm{Im}>0,\\ \text{II の場合} & \mathrm{Re}<0 \text{ かつ } \mathrm{Im}>0,\\ \text{III の場合} & \mathrm{Re}<0 \text{ かつ } \mathrm{Im}<0,\\ \text{IV の場合} & \mathrm{Re}>0 \text{ かつ } \mathrm{Im}<0\end{array}\right.$$
の領域に含まれることを表す．

(1) sl(z)



(2) cl(z)



これらのグラフは，次の節の結論をすばやく直感的に得るために，非常に重要となる．

§ 3　$\dfrac{\varpi}{2}$, $\dfrac{\varpi}{2}i$ の整数倍のずれ，および $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍の回転

複素平面 $\mathbb{C}$ の，向きを保つ合同変換群の離散部分集合 G として，$\dfrac{\varpi}{2}$ の平行移動（$z \to z + \dfrac{\varpi}{2}$），$\dfrac{\varpi}{2}i$ の平行移動（$z \to z + \dfrac{\varpi}{2}i$），原点中心 $\dfrac{\pi}{2}$ 回転（$z \to iz$）で生成されるものを考える．G は $\mathrm{sl}(z)$ および $\mathrm{cl}(z)$ に作用する．

$\mathrm{sl}(z), \mathrm{cl}(z)$ は周期 $2\varpi, 2\varpi i, \varpi + \varpi i$ を持つので，これらを G の部分群 $\mathcal{L}$ の生成元と見なすと，$\mathcal{L}$ の $\mathrm{sl}(z), \mathrm{cl}(z)$ に対する作用は自明である．つまり $G/\mathcal{L}$ が作用すると考えてもよい．これは位数 32 の有限群であり，平行移動の全体からなる位数 8 の正規部分群を持つ．

G の $\mathrm{sl}(z), \mathrm{cl}(z)$ に対する作用を決定しよう．これはつまり $\mathrm{sl}\left(z + \dfrac{\varpi}{2} + \dfrac{\varpi}{2}i\right)$ などがどのような別表記を持つかを調べることである．これはこの関数の，原点付近の値の取り方に注意するだけで簡単に決定することが出来る．結論からいうと，G の元によって $\mathrm{sl}(z), \mathrm{sl}(z)$ を変換してできる関数 $f(z)$ が $z = 0$ を零点に持てば，それは $\mathrm{sl}(z), i\mathrm{sl}(z), -\mathrm{sl}(z), -i\mathrm{sl}(z)$ のいずれかであり，$z = 0$ を極に持てば $\dfrac{1}{\mathrm{sl}(z)}, \dfrac{i}{\mathrm{sl}(z)}, \dfrac{-1}{\mathrm{sl}(z)}, \dfrac{-i}{\mathrm{sl}(z)}$ のいずれかである．また $f(0) = a$ $(a = \pm 1,\ \pm i)$ であれば $a\mathrm{cl}(z), \dfrac{a}{\mathrm{cl}(z)}$ のいずれかである．そして各候補のどれであるかは，実軸正方向の値（実虚，正負，増減）などが分かればすぐに判定できる．

このようにして次の表のような変換規則を得ることができる．（原理的には G の 3 つの生成元に対する規則から構成することができる．）

	z'	$\mathrm{sl}(z')$	$\mathrm{cl}(z')$
回転	iz	$i\mathrm{sl}(z)$	$\dfrac{1}{\mathrm{cl}(z)}$
	$-z$	$-\mathrm{sl}(z)$	$\mathrm{cl}(z)$
	$-iz$	$-i\mathrm{sl}(z)$	$\dfrac{1}{\mathrm{cl}(z)}$
周期	$z + \varpi + \varpi i$	$\mathrm{sl}(z)$	$\mathrm{cl}(z)$
	$z + 2\varpi$	$\mathrm{sl}(z)$	$\mathrm{cl}(z)$
	$z + 2\varpi i$	$\mathrm{sl}(z)$	$\mathrm{cl}(z)$
半周期	$z + \dfrac{\varpi}{2} + \dfrac{\varpi}{2}i$	$-\dfrac{i}{\mathrm{sl}(z)}$	$-\dfrac{i}{\mathrm{cl}(z)}$
	$z + \varpi$	$-\mathrm{sl}(z)$	$-\mathrm{cl}(z)$
	$z + \varpi i$	$-\mathrm{sl}(z)$	$-\mathrm{cl}(z)$
四半周期	$z + \dfrac{\varpi}{2}$	$\mathrm{cl}(z)$	$-\mathrm{sl}(z)$
	$z + \dfrac{\varpi}{2}i$	$\dfrac{i}{\mathrm{cl}(z)}$	$-\dfrac{i}{\mathrm{sl}(z)}$

§ 4　$\mathrm{sl}(z), \mathrm{cl}(z)$ の加法定理

Hurwitz による $\mathrm{sn}(z), \mathrm{cn}(z)$ の加法定理の証明をまねて，$\mathrm{sl}(z), \mathrm{cl}(z)$ の加法定理を証明してみた．

v を $\dfrac{m\varpi}{2} + \dfrac{n\varpi}{2}i$（$m,\ n$ は整数）とは表せない複素数とし，u の関数 $f(u) = \mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(u+v)$ および $g(u) = \mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(u+v)$ を考える．$f(u), g(u)$ が $\varpi, \varpi i$ を周期に持つ二重周期関数であることは，先の表より容易に分かる．（$f(u+\varpi) = \mathrm{sl}(u+\varpi)\mathrm{sl}(u+\varpi+v) = \{-\mathrm{sl}(u)\}\{-\mathrm{sl}(u+v)\} = \mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(u+v) = f(u)$ など．）

そこで基本領域 Δ として $\Delta = \{z \mid 0 - \epsilon \leqq \mathrm{Re}(z) < \varpi - \epsilon,\ 0 - \epsilon \leqq \mathrm{Im}(z) < \varpi - \epsilon\}$ をとる．ただし ϵ は微小な

正の実数である．（極や零点が周上に来ないようにするため．）

1章§2により，$f(u)$ は基本領域内に2つの極 $\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．また $g(u)$ は基本領域内に2つの極 $\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．これらの極はすべて1位である．

命題 1–4–1

(1) $g(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}$ は基本領域内に2つの零点 $\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．

(2) $f(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}$ は基本領域内に2つの極 $\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．

（証明）

(1) 前§の変換規則より $g\left(\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\mathrm{cl}\left(\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i\right)\mathrm{cl}\left(\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+v\right)=(-i)\times\dfrac{-i}{\mathrm{cl}(v)}=\dfrac{-1}{\mathrm{cl}(v)}$, $g\left(\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i-v\right)=\mathrm{cl}\left(\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i-v\right)\mathrm{cl}\left(\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\dfrac{-1}{\mathrm{cl}(-v)}=\dfrac{-1}{\mathrm{cl}(v)}$ が分かるので，$g(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}}(v)$ は基本領域内に2つの零点 $\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．

(2) $f\left(\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2}i\right)\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2}i+v\right)=i\times\dfrac{i}{\mathrm{cl}(v)}=\dfrac{-1}{\mathrm{cl}(v)}$, $f\left(\dfrac{\varpi}{2}i-v\right)=\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2}i-v\right)\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2}i\right)$ $=\dfrac{-1}{\mathrm{cl}(-v)}=\dfrac{-1}{\mathrm{cl}(v)}$ が分かるので，$f(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}$ は基本領域内に2つの零点 $\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．

（証明終）

命題 1–4–2 $\left(f(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)\left(g(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)=1+\dfrac{1}{\mathrm{cl}^2(v)}$ が成り立つ．

（証明）

$g(u)$ と $g(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}$ の極およびその留数は同じなので，$g(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}$ は基本領域内に2つの1位の極 $\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．同様に $f(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}$ は基本領域内に2つの1位の極 $\dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i,\ \dfrac{\varpi}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i-v$ （の同値類）を持つ．

すると $\left(f(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)\left(g(u)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)=\left(\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(u+v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)\left(\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(u+v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)$ は極と零点が打ち消し合って正則関数になってしまう．つまり u に関しては定数関数である．そこで $\left(\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(u+v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)\left(\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(u+v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)=h(v)$ とおいてよい．$u=0$ を代入すると

$h(v)=\left(\mathrm{sl}(0)\mathrm{sl}(v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)\left(\mathrm{cl}(0)\mathrm{cl}(v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\left(\mathrm{cl}(v)+\dfrac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)=1+\dfrac{1}{\mathrm{cl}^2(v)}$ がわかる．

定理 1–4–3（**加法定理**）

(1) $$\mathrm{cl}(x+y)=\frac{\mathrm{cl}(x)\mathrm{cl}(y)-\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)}{1+\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(y)}$$

(2) $$\mathrm{sl}(x+y)=\frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(y)+\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)}{1-\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(y)}$$

（証明）

(1)　先の命題より

$$\left(f(u)+\frac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)\left(g(u)+\frac{1}{\mathrm{cl}(v)}\right)=1+\frac{1}{\mathrm{cl}^2(v)}$$
$$\iff \quad f(u)g(u)+\frac{f(u)+g(u)}{\mathrm{cl}(v)}=1$$
$$\iff \quad \mathrm{cl}(v)=\frac{f(u)+g(u)}{1-f(u)g(u)}=\frac{\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(u+v)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(u+v)}{1-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(u+v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(u+v)}$$

この式に $v=x+y,\ u=-x$ を代入すると

$$\mathrm{cl}(x+y)=\frac{\mathrm{sl}(-x)\mathrm{sl}(y)+\mathrm{cl}(-x)\mathrm{cl}(y)}{1-\mathrm{sl}(-x)\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(-x)\mathrm{cl}(y)}=\frac{-\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)+\mathrm{cl}(x)\mathrm{cl}(y)}{1+\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(x)\mathrm{cl}(y)}$$

が得られる．

(2)　(1) の x を $\dfrac{\varpi}{2}+x$ に置き換える．

左辺 $=\mathrm{cl}\left(\dfrac{\varpi}{2}+x+y\right)=-\mathrm{sl}(x+y)$,

右辺 $=\dfrac{-\mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{2}+x\right)\mathrm{sl}(y)+\mathrm{cl}\left(\frac{\varpi}{2}+x\right)\mathrm{cl}(y)}{1+\mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{2}+x\right)\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}\left(\frac{\varpi}{2}+x\right)\mathrm{cl}(y)}=\dfrac{-\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)-\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(y)}{1+\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)\{-\mathrm{sl}(x)\}\mathrm{cl}(y)}$

$=-\dfrac{\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)+\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(y)}{1-\mathrm{cl}(x)\mathrm{sl}(y)\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(y)}$ より成立する．

（注）　cl と同じようにして証明することも出来る．u の関数として $\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(u+v)-\dfrac{1}{\mathrm{sl}(v)}$ と $\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(u+v)+\dfrac{1}{\mathrm{sl}(v)}$ の極と零点が打ち消しあうことがわかり，$\left(\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(u+v)-\dfrac{1}{\mathrm{sl}(v)}\right)\left(\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(u+v)+\dfrac{1}{\mathrm{sl}(v)}\right)$ $=-1-\dfrac{1}{\mathrm{sl}^2(v)}$ が示される．これは $\mathrm{sl}(v)=\dfrac{-\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(u+v)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(u+v)}{1+\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(u+v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(u+v)}$ と変形され，$v=x+y,\ u=-x$ と置き換えれば (2) が導かれる．

第 2 章

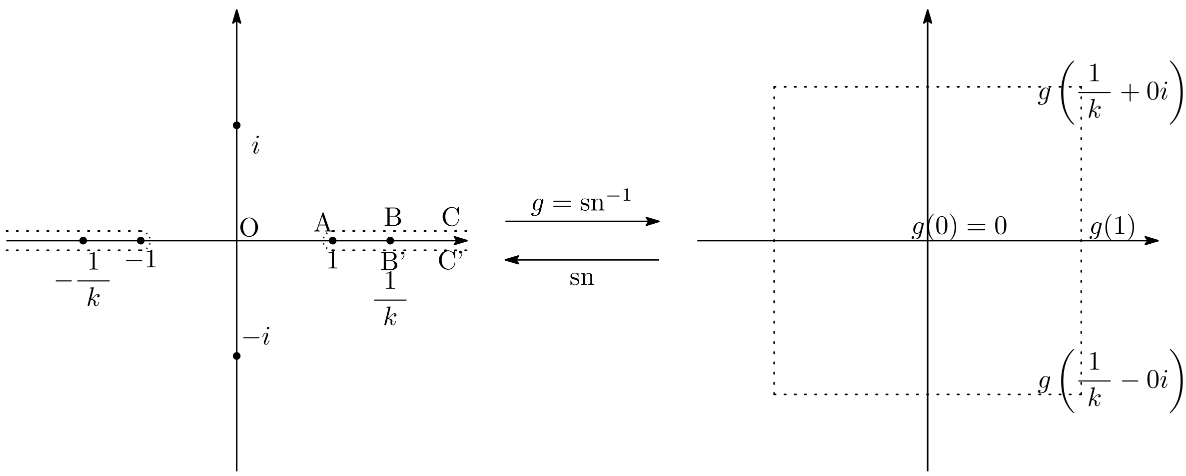
Jacobi の楕円関数

§ 1 $\mathrm{sn}(z)$, $\mathrm{cn}(z)$, $\mathrm{dn}(z)$ の複素関数的扱い

以下簡単のため k を $0<k<1$ である実数とする．（それ以外の場合でも同様の方法で同じ結果が得られるが，経路の取り方やその指定方法などが煩雑になる,）

$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ は $z=\pm 1,\ \pm\dfrac{1}{k}$ に特異点を持つ 2 価関数なので，$z \fallingdotseq \pm 1,\ \pm\dfrac{1}{k}$ に対して 0 と z を結ぶ特異点を通らない経路 C （のホモトピー類）を与えると $g(z)=\mathrm{sn}^{-1}(z)=\displaystyle\int_C \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz$ の値が決まる．ただし C の始点 0 に対する枝は $f(0)=0$ のものとする．

ここで $\mathrm{sn}^{-1}(z)$ の値を 1 価に確定するために，複素数平面から 2 つの半直線 $[1,\ \infty)$, $[-1,\ -\infty)$ を取り除いた単連結な領域 D での関数を考える．



$z=1$ の近傍では $\dfrac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \fallingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ なので（つまり $\dfrac{1}{2}$ 位の極なので），積分すると $\dfrac{1}{2}$ 位の零点となり，$g(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,dz$ が収束することがわかる．そこで K を $K=g(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,dz$ で定義する．

$f(z)$ を D で解析接続した場合，$1<r<\dfrac{1}{k}$ のとき $f(r+0i)=\dfrac{i}{\sqrt{(r^2-1)(1-k^2r^2)}}$ であることが容易に分かるので，図の経路 AB に沿った積分値については，

$$\int_{1+0i}^{\frac{1}{k}+0i} \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,dz=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{i}{\sqrt{(r^2-1)(1-k^2r^2)}}\,dr$$

である．（先と同様収束することは容易に分かる．）　そこで K' を $K' = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{(r^2-1)(1-k^2r^2)}}\,dr$ で定義する．
$g\left(\dfrac{1}{k}+0i\right) = K + K'i$, $g\left(\dfrac{1}{k}-0i\right) = K - K'i$ ということになる．　その先の経路 BC に関しては $\dfrac{1}{k} < r$ のとき $f(r+0i) = \dfrac{-1}{\sqrt{(r^2-1)(k^2r^2-1)}}$ だから，

$$\int_{\frac{1}{k}+0i}^{\infty+0i} \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,dz = \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{(r^2-1)(k^2r^2-1)}}\,dr = \int_1^{+0} \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2s^2}-1\right)\left(\frac{1}{s^2}-1\right)}}\left(-\frac{1}{ks^2}\right)ds$$
$$= -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-k^2s^2)(1-s^2)}}\,ds = -K.$$

これより $g(\infty+0i) = K + K'i - K = K'i$ がわかった．つまり O から C$(+\infty+0i)$ まで $\dfrac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ を積分していくと，A までは実軸上を右に進み K に達するが，A を超えると左に 90° 進行方向を変え，B まで積分すると $K+K'i$ に達し，そこでまた左に 90° 進行方向を変え，無限積分の後虚軸上の $K'i$ に達する．

AB'C' と経路をとる場合は右に折れ曲がって $-K'i$ に達する．

注意 2–1–1

$\mathrm{sn}^{-1}(w)$ の解析性より虚軸上を直接積分したときの値も $K'i$ に等しいので，
$\displaystyle\int_{+0i}^{+\infty i} \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,dz = i\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+s^2)(1+k^2s^2)}}\,ds = K'i$ である．これは $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+s^2)(1+k^2s^2)}}\,ds =$ $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{(r^2-1)(1-k^2r^2)}}\,dr$ が成り立つことを意味している．これを直接証明してみよう．

（証明）

$r = \dfrac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+k^2s^2}}$ と変数変換する．$r : 1 \to \dfrac{1}{k}$ のとき $s : 0 \to \infty$ であり

$$\begin{aligned}
r^2-1 &= \frac{1+s^2}{1+k^2s^2} - 1 = \frac{(1-k^2)s^2}{1+k^2s^2}, \\
1-k^2r^2 &= 1 - \frac{k^2(1+s^2)}{1+k^2s^2} = \frac{(1-k^2)}{1+k^2s^2}, \\
dr &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}\cdot\sqrt{1+k^2s^2} - \sqrt{1+s^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{2k^2s}{\sqrt{1+k^2s^2}}}{1+k^2s^2}ds \\
&= \frac{s(1+k^2s^2)-(1+s^2)k^2s}{(1+k^2s^2)\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}ds = \frac{s(1-k^2)}{(1+k^2s^2)\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}ds
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{(r^2-1)(1-k^2r^2)}}\,dr &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+k^2s^2}}{s\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+k^2s^2}}{\sqrt{1-k^2}}\,\frac{s(1-k^2)}{(1+k^2s^2)\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+k^2s^2}}ds \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+s^2)(1+k^2s^2)}}\,ds
\end{aligned}$$

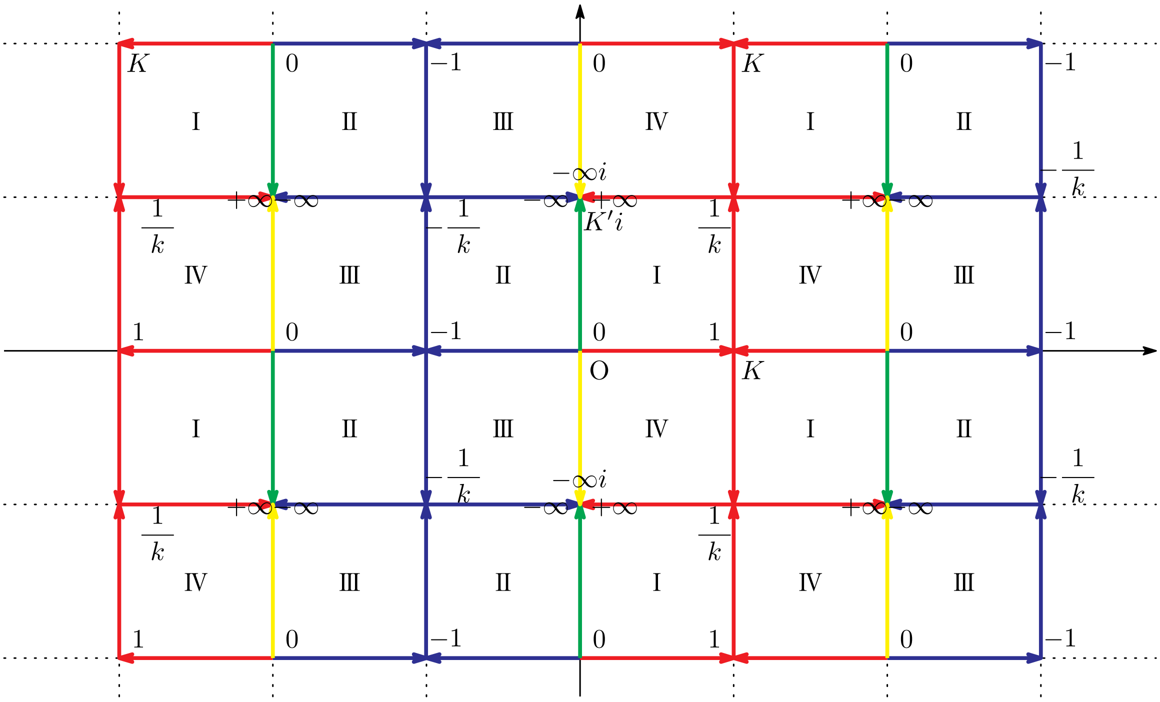
（証明終）

§ 2 主要な点における $\mathrm{sn}(z)$, $\mathrm{cn}(z)$, $\mathrm{dn}(z)$ の値

引き続き k を $0<k<1$, $K=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$, $K'=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\,dt$ とする．

以下の図の色のついた線，ローマ数字 I， II，III，IVの意味は前の章と同じとする．

(1)　$\mathrm{sn}(z)$



(i)　$\mathrm{sn}(z)$ は奇関数．基本周期は $4K$, $2K'i$.

(ii)　半周期性：$\mathrm{sn}(z+2K)=-\mathrm{sn}(z)$, $\mathrm{sn}(z+2K+2K'i)=-\mathrm{sn}(z)$, $\mathrm{sn}(z+K'i)\mathrm{sn}(z)=\dfrac{1}{k}$.

(iii)　零点は $z=2mK+2nK'$ で，すべて 1 位の零点．$\mathrm{sn}'(2mK+2nK'i)=\begin{cases}1 & m\equiv 0 \pmod 2\\ -1 & m\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$

(iv)　$\mathrm{sn}(z)$ の極は $2mK+(2n+1)K'i$ (m, n は整数) であり，すべて 1 位の極である．$m\equiv 0 \pmod 2$ の場合，留数は $\dfrac{1}{k}$ であり，$m\equiv 1 \pmod 2$ の場合，留数は $-\dfrac{1}{k}$ である．

(v)　$\mathrm{sn}(z)$ はすべての零点および極を中心として奇関数であり，$\mathrm{sn}^{-1}(\pm 1)=(4m\pm 1)K+2nK'i$, $\mathrm{sn}^{-1}\left(\pm\dfrac{1}{k}\right)$ $=(4m\pm1)K+(2n+1)K'i$ （以上すべて m, n は整数）を中心として偶関数である．

(vi)　Taylor 展開，Laurent 展開．(3 項目まで計算したが，後々必要となるのは最初の項のみである．)

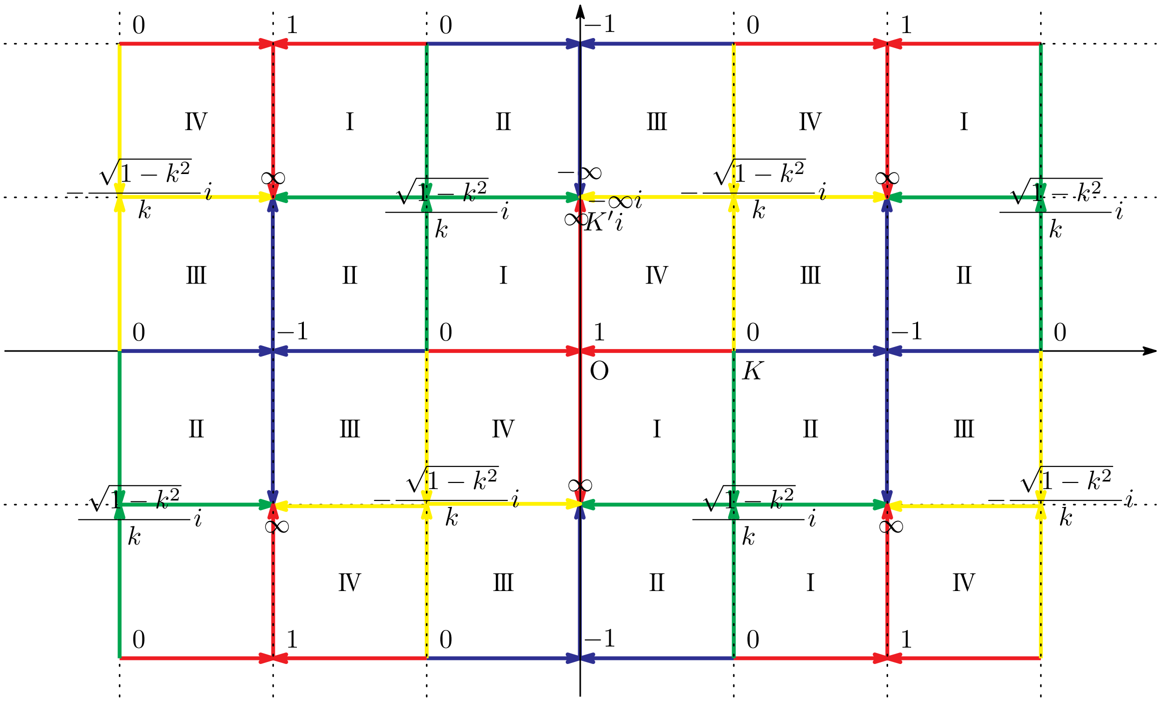
$z=0$　　$\mathrm{sn}(z)=z-\dfrac{k^2+1}{6}z^3+\dfrac{k^4+14k^2+1}{120}z^5+\cdots$

$z=K$　　$\mathrm{sn}(z)=1+\dfrac{k^2-1}{2}(z-K)^2+\dfrac{5k^4-6k^2+1}{24}(z-K)^4+\cdots$

$z=K+K'i$　　$\mathrm{sn}(z)=\dfrac{1}{k}-\dfrac{k^2-1}{2k}(z-K-K'i)^2-\dfrac{k^4-6k^2+5}{24k}(z-K-K'i)^4+\cdots$

$z=K'i$　　$\mathrm{sn}(z)=\dfrac{1}{k(z-K'i)}+\dfrac{k^2+1}{6k}(z-K'i)+\dfrac{7k^4-22k^2+7}{360k}(z-K'i)^3+\cdots$

(2)　$\mathrm{cn}(z) = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(z)}$



(i)　$\mathrm{cn}(z)$ は偶関数．基本周期は $4K$, $2K + 2K'i$.

(ii)　半周期性：$\mathrm{cn}(z + 2K) = -\mathrm{cn}(z)$, $\mathrm{cn}(z + 2K'i) = -\mathrm{cn}(z)$, $\mathrm{cn}(z + K + K'i)\mathrm{cn}(z) = -\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k} i$.

(iii)　零点は $z = (2m+1)K + 2nK'$ で，すべて 1 位の零点．

$$\mathrm{cn}'((2m+1)K + 2nK'i) = \begin{cases} -\sqrt{1-k^2} & m \equiv n \pmod 2 \\ \sqrt{1-k^2} & m \not\equiv n \pmod 2 \end{cases}$$

(iv)　$\mathrm{cn}(z)$ の極は $2mK + (2n+1)K'i$ (m, n は整数) であり，すべて 1 位の極である．$m \equiv n \pmod 2$ の場合，留数は $-\dfrac{i}{k}$ であり，$m \not\equiv n \pmod 2$ の場合，留数は $\dfrac{i}{k}$ である．

(v)　$\mathrm{cn}(z)$ はすべての零点および極を中心として奇関数であり，$\mathrm{cn}^{-1}(1) = 2mK + 2nK'i$ ($m \equiv n \bmod 2$), $\mathrm{cn}^{-1}(-1) = 2mK + 2nK'i$ ($m \not\equiv n \bmod 2$), $\mathrm{cn}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}i\right) = (2m+1)K + (2n+1)K'i$ ($m \equiv n \bmod 2$), $\mathrm{cn}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}i\right) = (2m+1)K + (2n+1)K'i$ ($m \not\equiv n \bmod 2$) を中心として偶関数である．

(vi)　Taylor 展開，Laurent 展開．

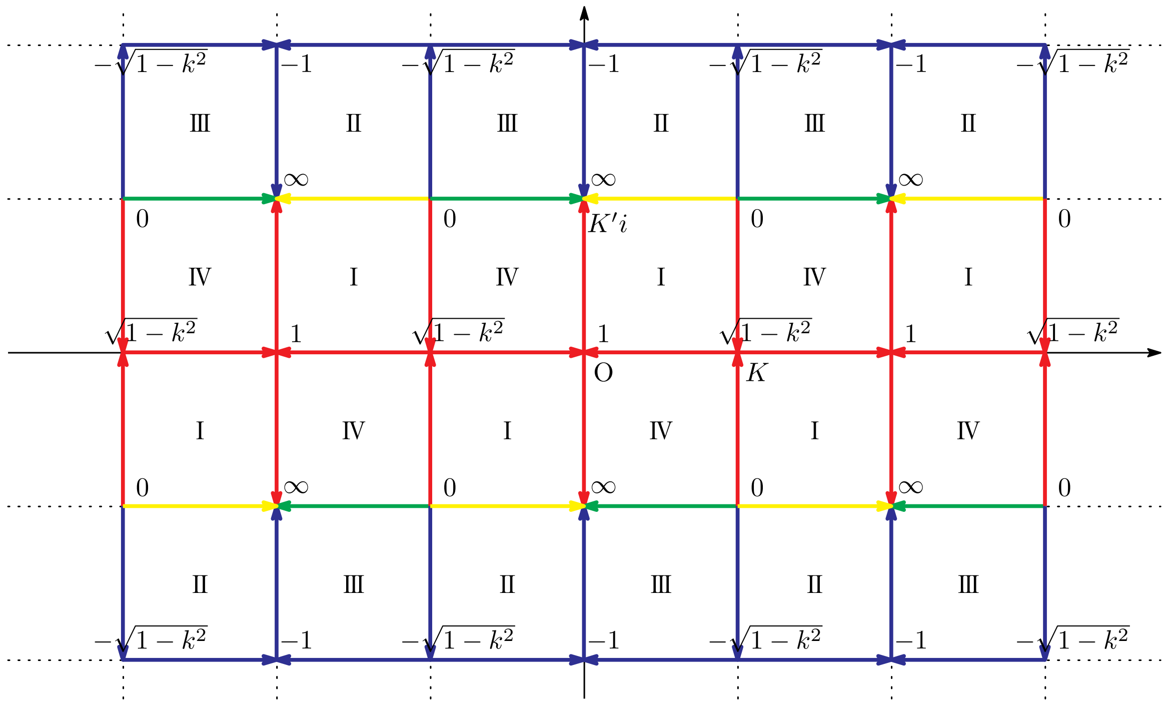
$$z = 0 \qquad \mathrm{cn}(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{4k^2+1}{24}z^4 + \cdots$$

$$z = K \qquad \mathrm{cn}(z) = -\sqrt{1-k^2}\left\{(z-K) + \frac{2k^2-1}{6}(z-K)^3 + \frac{16k^4-16k^2+1}{120}(z-K)^5 \cdots\right\}$$

$$z = K + K'i \qquad \mathrm{cn}(z) = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}i\left\{1 + \frac{1}{2}(z-K-K'i)^2 - \frac{4k^2-5}{24}(z-K-K'i)^4 + \cdots\right\}$$

$$z = K'i \qquad \mathrm{cn}(z) = -\frac{i}{k}\left\{\frac{1}{(z-K'i)} - \frac{2k^2-1}{6}(z-K'i) - \frac{8k^4-8k^2-7}{360}(z-K'i)^3 + \cdots\right\}$$

(3) $\mathrm{dn}(z) = \sqrt{1 - k^2\mathrm{sn}^2(z)}$



(i) $\mathrm{dn}(z)$ は偶関数．基本周期は $2K$, $4K'i$.

(ii) 半周期性：$\mathrm{dn}(z+2K'i) = -\mathrm{dn}(z)$, $\mathrm{dn}(z+2K+2K'i) = -\mathrm{dn}(z)$, $\mathrm{dn}(z+K)\mathrm{dn}(z) = \sqrt{1-k^2}$.

(iii) 零点は $z = (2m+1)K + (2n+1)K'$ で，すべて 1 位の零点.

$$\mathrm{dn}'((2m+1)K + (2n+1)K'i) = \begin{cases} \sqrt{1-k^2}i & n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\sqrt{1-k^2}i & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

(iv) $\mathrm{dn}(z)$ の極は $2mK + (2n+1)K'i$ (m, n は整数) であり，すべて 1 位の極である．$n \equiv 0 \pmod 2$ の場合，留数は $-i$ であり，$n \equiv 1 \pmod 2$ の場合，留数は i である．

(v) $\mathrm{dn}(z)$ はすべての零点および極を中心として奇関数であり，$\mathrm{dn}^{-1}(1) = 2mK + 4nK'i$, $\mathrm{dn}^{-1}(-1) = 2mK + (4n+2)K'i$, $\mathrm{dn}^{-1}\left(\sqrt{1-k^2}\right) = (2m-1)K + 4nK'i$, $\mathrm{dn}^{-1}\left(-\sqrt{1-k^2}\right) = (2m-1)K + (4n+2)K'i$ を中心として偶関数である．

(vi) Taylor 展開， Laurent 展開.

$z = 0$ $\quad \mathrm{dn}(z) = 1 - \dfrac{k^2}{2}z^2 + \dfrac{k^4+4k^2}{24}z^4 + \cdots$

$z = K$ $\quad \mathrm{dn}(z) = \sqrt{1-k^2}\left\{1 + \dfrac{k^2}{2}(z-K)^2 + \dfrac{5k^4-4k^2}{24}(z-K)^4 \cdots\right\}$

$z = K + K'i$ $\quad \mathrm{dn}(z) = \sqrt{1-k^2}i\left\{(z-K-K'i) - \dfrac{k^2-2}{6}(z-K-K'i)^3 + \dfrac{k^4-16k^2+16}{120}(z-K-K'i)^5\right\}$

$z = K'i$ $\quad \mathrm{dn}(z) = -i\left\{\dfrac{1}{(z-K'i)} + \dfrac{k^2-2}{6}(z-K'i) + \dfrac{7k^4+8k^2-8}{360}(z-K'i)^3 + \cdots\right\}$

§ 3　四半周期のずれ

$\mathrm{sn}(z), \mathrm{cn}(z), \mathrm{dn}(z)$ はすべて同じ所（$z = 2mK + (2n+1)K'i$）に極を持ち，それらはすべて 1 位の極である．従って，割り算をするとその極は解消される．ただし分母の零点は新たに極となる．$\mathrm{sn}(z), \mathrm{cn}(z), \mathrm{dn}(z)$ はすべて $4K, 4K'i$ を周期に持つ二重周期関数なので，$\dfrac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}, \dfrac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{cn}(z)}, \dfrac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$ およびその逆数も同じ周期を持つ二重周期関数であることがわかる．しかも $\mathrm{sn}(z), \mathrm{cn}(z), \mathrm{dn}(z)$ の極，零点は $mK + nK'i$ 上にあるので割り算した関数も同様となる．

ところで，2 つの 2 位の二重周期関数が同じ場所に極と零点を持てば，それらは定数倍の違いしか無い．これよりこれらの分数関数は，$\mathrm{sn}(z), \mathrm{cn}(z), \mathrm{dn}(z)$ の平行移動・定数倍になっていることがわかる．具体的にどの関数のどれだけの平行移動，定数倍になっているかは，$0, K, K+K'i, K'i$ での様子が分かれば決定できる．そこでこれらの点での各関数の振る舞いを調べておこう．

	0	K	$K+K'i$	$K'i$
$\mathrm{sn}(z)$	0 (微分係数は 1)	1	$\dfrac{1}{k}$	極 $\left(留数は\ \dfrac{1}{k}\right)$
$\mathrm{cn}(z)$	1	0 $\left(微分係数は\ -\sqrt{1-k^2}\right)$	$-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}i$	極 $\left(留数は\ -\dfrac{i}{k}\right)$
$\mathrm{dn}(z)$	1	$\sqrt{1-k^2}$	0 $\left(微分係数は\ \sqrt{1-k^2}i\right)$	極 (留数は $-i$)
$\dfrac{1}{\mathrm{sn}(z)}$	極 (留数は 1)	1	k	0 (微分係数は k)
$\dfrac{1}{\mathrm{cn}(z)}$	1	極 $\left(留数は\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)$	$\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}i$	0 (微分係数は ki)
$\dfrac{1}{\mathrm{dn}(z)}$	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$	極 $\left(留数は\ -\dfrac{i}{\sqrt{1-k^2}}\right)$	0 (微分係数は i)
$\dfrac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{cn}(z)}$	0 (微分係数は 1)	極 $\left(留数は\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)$	$\dfrac{i}{k\sqrt{1-k^2}}$	i
$\dfrac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}$	極 (留数は 1)	0 $\left(微分係数は\ -\sqrt{1-k^2}\right)$	$-\sqrt{1-k^2}i$	$-i$
$\dfrac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$	0 (微分係数は 1)	$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$	極 $\left(留数は\ -\dfrac{i}{k\sqrt{1-k^2}}\right)$	$\dfrac{i}{k}$
$\dfrac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}$	極 (留数は 1)	$\sqrt{1-k^2}$	0 $\left(微分係数は\ k\sqrt{1-k^2}i\right)$	$-ki$
$\dfrac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$	1	0 (微分係数は -1)	極 $\left(留数は\ -\dfrac{1}{k}\right)$	$\dfrac{1}{k}$
$\dfrac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{cn}(z)}$	1	極 (留数は -1)	0 (微分係数は $-k$)	k

この表より次が分かる．

$$\frac{1}{\mathrm{sn}(z)} = k\cdot\mathrm{sn}(z+K'i) \qquad \frac{1}{\mathrm{cn}(z)} = \frac{ki}{\sqrt{1-k^2}}\mathrm{cn}(z+K+K'i)$$

$$\frac{1}{\mathrm{dn}(z)} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\mathrm{dn}(z+K).$$

$$\frac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{cn}(z)} = \frac{-i}{\sqrt{1-k^2}}\mathrm{dn}(z+K+K'i) \qquad \frac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{sn}(z)} = i\cdot\mathrm{dn}(z+K'i)$$

$$\frac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{dn}(z)} = \frac{-1}{\sqrt{1-k^2}}\mathrm{cn}(z+K) \qquad \frac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{sn}(z)} = ki\cdot\mathrm{cn}(z+K'i)$$

$$\frac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{dn}(z)} = \mathrm{sn}(z+K) \qquad \frac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{cn}(z)} = k\cdot\mathrm{sn}(z+K+K'i).$$

§ 4 K, $K'i$ の整数倍のずれ，および対称変換（まとめ）

	z'	$\mathrm{sn}(z')$	$\mathrm{cn}(z')$	$\mathrm{dn}(z')$
対称変換	$-z$	$-\mathrm{sn}(z)$	$\mathrm{cn}(z)$	$\mathrm{dn}(z)$
周期	$z+4K$	$\mathrm{sn}(z)$	$\mathrm{cn}(z)$	$\mathrm{dn}(z)$
	$z+4K'i$	$\mathrm{sn}(z)$	$\mathrm{cn}(z)$	$\mathrm{dn}(z)$
半周期	$z+2K$	$-\mathrm{sn}(z)$	$-\mathrm{cn}(z)$	$\mathrm{dn}(z)$
	$z+2K'i$	$\mathrm{sn}(z)$	$-\mathrm{cn}(z)$	$-\mathrm{dn}(z)$
	$z+2K+2K'I$	$-\mathrm{sn}(z)$	$\mathrm{cn}(z)$	$-\mathrm{dn}(z)$
四半周期	$z+K$	$\dfrac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$	$-\sqrt{1-k^2}\dfrac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$	$\sqrt{1-k^2}\dfrac{1}{\mathrm{dn}(z)}$
	$z+k'i$	$\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}(z)}$	$-\dfrac{i}{k}\cdot\dfrac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}$	$-i\dfrac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{sn}(z)}$
	$z+K+K'i$	$\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\mathrm{dn}(z)}{\mathrm{cn}(z)}$	$-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{cn}(z)}$	$\sqrt{1-k^2}i\dfrac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{cn}(z)}$

§ 5 $\mathrm{sn}(x)$, $\mathrm{cn}(x)$, $\mathrm{dn}(x)$ の加法定理

u の関数 $\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)$ を考える．これは $2K$, $2K'i$ を周期に持つ二重周期関数である．極は $u=K'i$ および $u=K'i-v$ に持つ．$K'i$ における留数は

$$(\mathrm{sn}(z) \text{ の } K'i \text{ における留数}) \times \mathrm{sn}(K'i+v) = \frac{1}{k} \times \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}(v)} = \frac{1}{k^2\mathrm{sn}(v)}$$

であり，$K'i-v$ における留数は

$$\mathrm{sn}(K'i-v) \times (\mathrm{sn}(z) \text{ の } K'i \text{ における留数}) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}(-v)} \times \frac{1}{k} = -\frac{1}{k^2\mathrm{sn}(v)}$$

である．これらの計算の際，§ 3, § 4 の表が役に立つ．

$\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)$, $\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)$ も u の関数として $2K$, $2K'i$ を周期に持つ二重周期関数であり，$u=K'i$ および $u=K'i-v$ に 1 位の極を持つ．それらの留数を実際に計算した結果は次の表の通りである．

関数	$u=K'i$ における留数	$u=K'i-u$ における留数
$\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)$	$\dfrac{1}{k^2\mathrm{sn}(v)}$	$-\dfrac{1}{k^2\mathrm{sn}(v)}$
$\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)$	$-\dfrac{\mathrm{dn}(v)}{k^2\mathrm{sn}(v)}$	$\dfrac{\mathrm{dn}(v)}{k^2\mathrm{sn}(v)}$
$\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)$	$-\dfrac{\mathrm{cn}(v)}{\mathrm{sn}(v)}$	$\dfrac{\mathrm{cn}(v)}{\mathrm{sn}(v)}$

留数が消えるようなこれら関数の線型和を考える．例えば $\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{dn}(v)$ である．コンパクト Riemann 面上の有界な解析関数は定数しかないので，この関数は u によらない．つまり $\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{dn}(v)=f(v)$ と置くことが出来る．$u=0$ を代入すると $h(v)=\mathrm{cn}(v)$ が分かる．このようにして $\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{dn}(v)=\mathrm{cn}(v)$ $\cdots$ ① が得られた．この関数等式を $v=x+y$, $u=-x$ と変換すると次の式になる．

$$\mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y)-\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)\mathrm{dn}(x+y)=\mathrm{cn}(x+y) \quad \cdots\cdots ②$$

同様に $\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)+k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{cn}(v)$ は u によらない関数なので，$\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)+k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{cn}(v)=g(v)$ と置くことが出来る．$u=0$ を代入すると $g(v)=\mathrm{dn}(v)$ が分かる．このようにして $\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)+k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{cn}(v)=\mathrm{dn}(v)$ が得られた．この関数等式を $v=x+y$, $u=-x$ と変換すると次の式になる．

$$\mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y)-k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)\mathrm{cn}(x+y)=\mathrm{dn}(x+y) \quad \cdots\cdots ③$$

②, ③ を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y) \\ k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{cn}(x+y) \\ \mathrm{dn}(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y) \\ \mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y) \end{pmatrix}$$

従って

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathrm{cn}(x+y) \\ \mathrm{dn}(x+y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y) \\ k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y) & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y) \\ \mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-k^2\mathrm{sn}^2(x)\mathrm{sn}^2(y)}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y) \\ -k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y) \\ \mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-k^2\mathrm{sn}^2(x)\mathrm{sn}^2(y)}\begin{pmatrix} \mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y)-\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)\mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y) \\ \mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y)-k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)\mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上より cn, dn に関する加法定理

$$\begin{aligned}
\mathrm{cn}(x+y) &= \frac{\mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y)-\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)\mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(x)\mathrm{sn}^2(y)} \quad \cdots ④ \\
\mathrm{dn}(x+y) &= \frac{\mathrm{dn}(x)\mathrm{dn}(y)-k^2\mathrm{sn}(x)\mathrm{sn}(y)\mathrm{cn}(x)\mathrm{cn}(y)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(x)\mathrm{sn}^2(y)} \quad \cdots ⑤
\end{aligned}$$

が得られた．sn に関する加法定理は ④ を ① に代入してやればよい．① より

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u+v) &= \frac{\mathrm{cn}(v)-\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)}{\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(v)} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))-\mathrm{cn}(u)(\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)-\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v))}{\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)(1-\mathrm{cn}^2(u))-k^2\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)+\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}^2(u)-k^2\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)+\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}(u)-k^2\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}^2(v)+\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{\mathrm{dn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}(u)(1-k^2\mathrm{sn}^2(v))+\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{\mathrm{dn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}^2(v)+\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{\mathrm{dn}(v)(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v))} \\
&= \frac{\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(v)+\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}
\end{aligned}$$

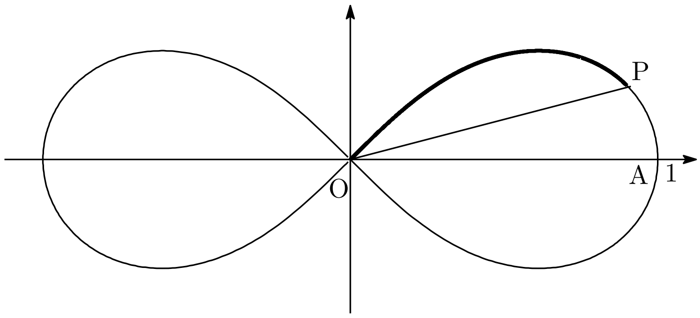
つまり $\mathrm{sn}(x+y) = \dfrac{\mathrm{sn}(x)\mathrm{cn}(y)\mathrm{dn}(y)+\mathrm{sn}(y)\mathrm{cn}(x)\mathrm{dn}(x)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(x)\mathrm{sn}^2(y)}$ が証明された．

第 3 章

レムニスケートの5等分点

§ 1　概要

レムニスケートの 5 等分問題は有名である.



極形式 $r^2 = \cos 2\theta$ で与えられるレムニスケートの全周の長さを 2ϖ とする．周上に $\overset{\frown}{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\varpi}{5}$ となる点 P をとるとき，直線距離 $\overline{\mathrm{OP}}$ を求めよというのである．$\overset{\frown}{\mathrm{OP}} = z$, $\overline{\mathrm{OP}} = w$ とすると $w = \mathrm{sl}(z)$ であるから，これは $\mathrm{sl}\left(\dfrac{2\varpi}{5}\right)$ を求めよという問題に他ならない．加法定理より $\mathrm{sl}(z)$ の 5 倍角の公式を導くと $\mathrm{sl}(z)$ の有理式になるので $\mathrm{sl}(5z) = 0$ を $\mathrm{sl}(z)$ の有理式として解けばよいことになる.

ところで，結論から先に述べると，

$$\mathrm{sl}(5z) = \frac{\mathrm{sl}(z)\left(\mathrm{sl}^8(z) - 2\mathrm{sl}^4(z) + 5\right)\left(\mathrm{sl}^{16}(z) + 52\mathrm{sl}^{12}(z) - 26\mathrm{sl}^8(z) - 12\mathrm{sl}^4(z) + 1\right)}{\left(5\mathrm{sl}^8(z) - 2\mathrm{sl}^4(z) + 1\right)\left(\mathrm{sl}^{16}(z) - 12\mathrm{sl}^{12}(z) - 26\mathrm{sl}^8(z) + 52\mathrm{sl}^4(z) + 1\right)}$$

である．分子が $\mathrm{sl}(z)$ の 25 次方程式になっているのはトーラスの 5 等分点が 25 個あるのに対応している．因数 $\mathrm{sl}(z)$ は $z = 0$ に対応する．残りの 24 次式が $\mathrm{sl}^4(z)$ の多項式になっているのは，5 等分点のセット $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha$ に対する関数値が $\mathrm{sl}(\alpha), \mathrm{sl}(i\alpha) = i \cdot \mathrm{sl}(\alpha), \mathrm{sl}(-\alpha) = -\mathrm{sl}(\alpha), \mathrm{sl}(-i\alpha) = -i \cdot \mathrm{sl}(\alpha)$ であることに対応している．また，分母と分子の係数の並びが逆になっているのは，$\mathrm{sl}(z)$ の零点と極の位置関係，および $\mathrm{sl}\left(\dfrac{\varpi}{2} + \dfrac{\varpi}{2}i - z\right) = \dfrac{i}{\mathrm{sl}(z)}$ の関数等式により納得がいく．しかし，それよりも重要なのは 24 次式が 8 次式と 16 次式に因数分解されていることである．これは一体何を意味するのであろうか.

$\mathrm{sl}(z) = s, \mathrm{cl}(z) = t$ とおくと Riemann 面 $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ は代数曲線 $E : (1 - s^2)(1 - t^2) - 2 = 0$ と考えることができる．E の n 等分点 $E_n = \{(\mathrm{sl}(\alpha),\ \mathrm{cl}(\alpha)) \mid \alpha$ は $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ の n 等分点 $\}$ にはガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})/\mathbb{Q}$ が作用する．ここで $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ の 5 等分点は加法群 $\mathbb{Z}^2/5\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbf{F}_5 \oplus \mathbf{F}_5$ と考えられる．$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2/5\mathbb{Z}^2) = GL(2,\ \mathbf{F}_5)$ であり，$\mathbb{Z}^2/5\mathbb{Z}^2$ の $(0,\ 0)$ 以外の 24 点は $GL(2,\ \mathbf{F}_5)$ の元で互いに移りあう．それだけを考えると E_5 の 24 点はすべて共役である感じがするが，$\mathrm{sl}(5z)$ の分子の因数分解からするとそうではないらしい．なぜだろうか.

実は $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ は正方形（の半分）の領域であり $i\mathcal{L} = \mathcal{L}$ が成り立つので，$\mathrm{sl}(z)$ や $\mathrm{cl}(z)$ は虚数乗法を持つのである．この場合 5 等分点を $\mathbb{Z}^2/5\mathbb{Z}^2$ と考えるのは適当ではなく，$\mathbb{Z}[i]/(5) = \mathbb{Z}[i]/(2 - i) \oplus \mathbb{Z}[i]/(2 + i) \simeq \mathbf{F}_5 \oplus \mathbf{F}_5$ と考え

る方が適切である．そして $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}[i])$ は $\mathbb{Z}[i]/(2-i)$ および $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ のそれぞれに対して作用する．つまり $GL(2,\ \mathbf{F}_5)$ の元としては対角行列にしか対応しない．（もちろん複素共役写像は $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ と $\mathbb{Z}[i]/(2-i)$ の入れ替えを引き起こすのではあるが，それは $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}[i])$ の元ではない．）このように考えた場合，$a\oplus 0$ $(a=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の 4 つと $0\oplus a$ $(a=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の 4 つが $\mathbb{Q}[i]$ 上共役であり，これら 8 つが $\mathbb{Q}$ 上共役ということになる．残り 16 個の $a\oplus b$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ が $\mathbb{Q}$ 上共役である．

準同型 $p:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}[i]/(2-i)\oplus\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ において $p(2+i)=4\oplus 0$, $p(2-i)=0\oplus 4$ であり，4 つの $2-i$ 等分点 $\alpha=\dfrac{4\varpi}{5}+\dfrac{2\varpi}{5}i$, $2\alpha\equiv\dfrac{3\varpi}{5}-\dfrac{\varpi}{5}i\equiv i\alpha$, $3\alpha\equiv\dfrac{7\varpi}{5}+\dfrac{\varpi}{5}i\equiv -i\alpha$, $4\alpha\equiv\dfrac{6\varpi}{5}-\dfrac{2\varpi}{5}i\equiv-\alpha$ に対する sl の値が $\mathbb{Q}[i]$ 上共役である．$\mathbb{Q}[i]$ 上の最小多項式は

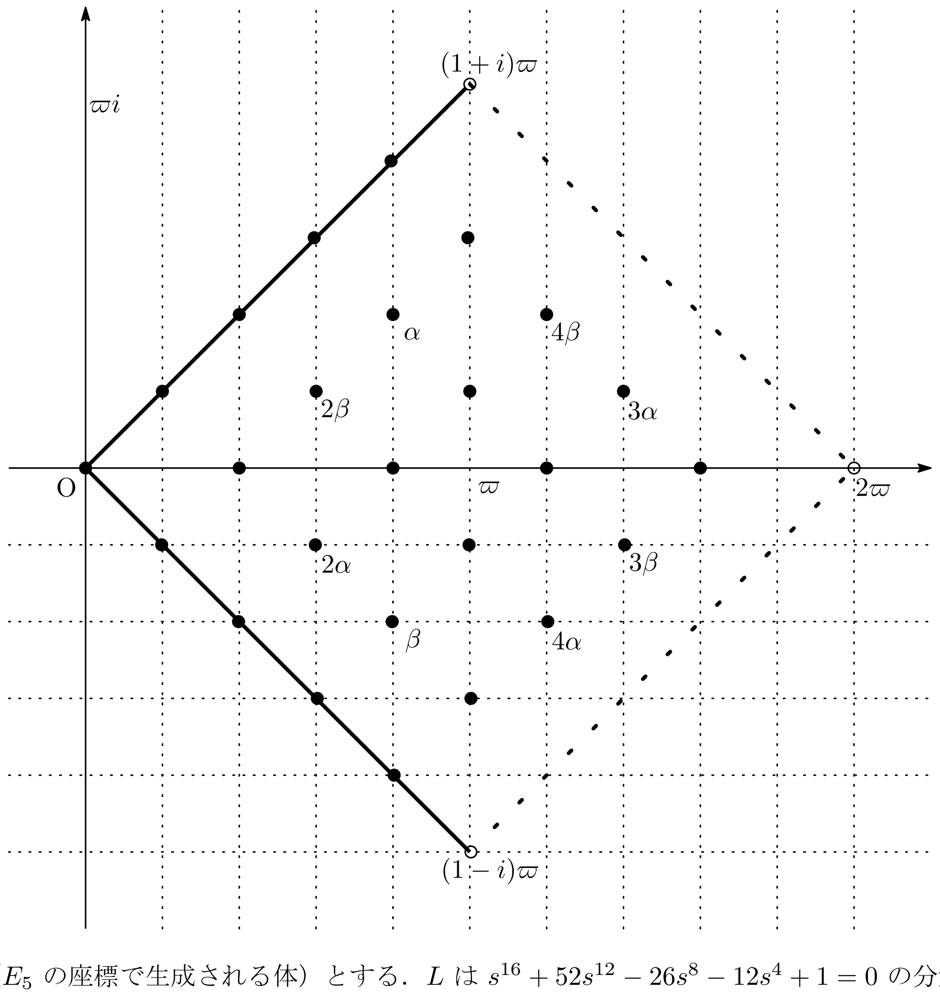
$$(s-\mathrm{sl}(\alpha))\,(s-\mathrm{sl}(i\alpha))\,(s-\mathrm{sl}(-\alpha))\,(s-\mathrm{sl}(-i\alpha))=s^4-\mathrm{sl}^4(\alpha)=0$$

ということになる．特に $\mathrm{sl}^4(\alpha)\in\mathbb{Q}[i]$, $\mathrm{sl}^4(\alpha)\notin\mathbb{Q}$ であることがわかる．

また，4 つの $2+i$ 等分点 $\beta=\dfrac{4\varpi}{5}-\dfrac{2\varpi}{5}i$, $2\beta\equiv\dfrac{3\varpi}{5}+\dfrac{\varpi}{5}i\equiv i\beta$, $3\beta\equiv\dfrac{7\varpi}{5}-\dfrac{\varpi}{5}i\equiv -i\beta$, $4\beta\equiv\dfrac{6\varpi}{5}+\dfrac{2\varpi}{5}i\equiv-\beta$ に対する sl の値が $\mathbb{Q}[i]$ 上共役である．$\mathbb{Q}[i]$ 上の最小多項式は

$$(s-\mathrm{sl}(\beta))\,(s-\mathrm{sl}(i\beta))\,(s-\mathrm{sl}(-\beta))\,(s-\mathrm{sl}(-i\beta))=s^4-\mathrm{sl}^4(\beta)=0$$

ということになる．特に $\mathrm{sl}^4(\beta)\in\mathbb{Q}[i]$, $\mathrm{sl}^4(\beta)\notin\mathbb{Q}$ であることがわかる．$\mathrm{sl}^4(\alpha)$, $\mathrm{sl}^4(\beta)$ は共役な複素数である．これらの点の位置を図に示しておく．1 章のグラフと比較すると，$\mathrm{sl}(\alpha)$ が 4 象限，$\mathrm{cl}(\alpha)$ が 3 象限の複素数であることがわかる．



$L=\mathbb{Q}(E_5)$ （E_5 の座標で生成される体）とする．L は $s^{16}+52s^{12}-26s^8-12s^4+1=0$ の分解体であり，

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\simeq\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}\right\}\subset GL(2,\ \mathbf{F}_5)$$

である．L は $\mathbb{Q}$ 上 32 次の非 Abel 拡大であり，$\mathbb{Q}(i)$ 上は 16 次の Abel 拡大になっている．

§ 2　$2+i$ 倍角公式

$\mathrm{sl}(z)=s$, $\mathrm{cl}(z)=c$ と表記する．$c=\sqrt{\dfrac{1-s^2}{1+s^2}}$ である．加法定理より $\mathrm{sl}(2z)=\dfrac{2sc}{1-s^2c^2}$, $\mathrm{cl}(2z)=\dfrac{c^2-s^2}{1+s^2c^2}$ である．また $\mathrm{sl}(iz)=is$ $\mathrm{cl}(iz)=\dfrac{1}{c}$ が成り立つ．これより

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sl}(2z+iz)\\
=\ &\frac{\mathrm{sl}(2z)\mathrm{cl}(iz)+\mathrm{cl}(2z)\mathrm{sl}(iz)}{1-\mathrm{sl}(2z)\mathrm{sl}(iz)\mathrm{cl}(2z)\mathrm{cl}(iz)}\\
=\ &\frac{\dfrac{2sc}{1-s^2c^2}\cdot\dfrac{1}{c}+\dfrac{c^2-s^2}{1+s^2c^2}\cdot is}{1-\dfrac{2sc}{1-s^2c^2}\cdot is\cdot\dfrac{c^2-s^2}{1+s^2c^2}\cdot\dfrac{1}{c}}\\
=\ &\frac{2s(1+s^2c^2)+(c^2-s^2)(1-s^2c^2)\cdot is}{(1-s^2c^2)(1+s^2c^2)-2is^2(c^2-s^2)}\\
=\ &\frac{2s\left(1+s^2\dfrac{1-s^2}{1+s^2}\right)+is\left(\dfrac{1-s^2}{1+s^2}-s^2\right)\left(1-s^2\dfrac{1-s^2}{1+s^2}\right)}{\left(1-s^2\dfrac{1-s^2}{1+s^2}\right)\left(1+s^2\dfrac{1-s^2}{1+s^2}\right)-2is^2\left(\dfrac{1-s^2}{1+s^2}-s^2\right)}\\
=\ &\frac{2s(1+s^2)(1+2s^2-s^4)+is(1-2s^2-s^4)(1+s^4)}{(1-s^4)(1+2s^2-s^4)-2is^2(1+s^2)(1-2s^2-s^4)}\\
=\ &\frac{-is(s^4-1+2i)(s^2-(1+i)s+1)(s^2+(1+i)s+1)}{((2i-1)s^4+1)(s^2-(1+i)s+1)(s^2+(1+i)s+1)}\\
=\ &\frac{-is(s^4-1+2i)}{(2i-1)s^4+1}
\end{aligned}
$$

しかし，この因数分解に気付くのは結構難しいので，もう一つの加法定理 $\mathrm{sl}(x+y)=\dfrac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}'(y)+\mathrm{sl}'(x)\mathrm{sl}(y)}{1+\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{sl}^2(y)}$ を用いた方法も考えてみた．そのためにまず $\mathrm{sl}'(2z)$ を求めておこう．$\mathrm{sl}(z)=s$, $\mathrm{sl}'(z)=s'$ と表記する．$\mathrm{sl}(2z)=\dfrac{2ss'}{1+s^4}$, $s'=\sqrt{1-s^4}$ である．これより

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sl}'(2z)\ &=\ \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(2z)}=\sqrt{1-\left(\frac{2ss'}{1+s^4}\right)^4}=\frac{\sqrt{(1+s^4)^4-16s^4(s')^4}}{(1+s^4)^2}\\
&=\ \frac{\sqrt{(1+s^4)^4-16s^4(1-s^4)^2}}{(1+s^4)^2}\\
&=\ \frac{\sqrt{\{(1+s^4)^2+4s^2(1-s^4)\}\{(1+s^4)^2-4s^2(1-s^4)\}}}{(1+s^4)^2}\\
&=\ \frac{\sqrt{(s^8-4s^6+2s^4+4s^2+1)(s^8+4s^6+2s^4-4s^2+1)}}{(1+s^4)^2}\\
&=\ \frac{\sqrt{(s^4-2s^2-1)^2(s^4+2s^2-1)^2}}{(1+s^4)^2}\\
&=\ \frac{(s^4-2s^2-1)(s^4+2s^2-1)}{(1+s^4)^2}
\end{aligned}
$$

この計算および因数分解もまだまだ難しいかもしれない．$\mathrm{sl}'(2z)$ の別の計算方法も試してみた．$(s')^2=1-s^4$ の両辺を s で微分して $2s's''=(-4s^3)s'$ つまり $s''=-2s^3$ を得る．次に $\mathrm{sl}(2z)=\dfrac{2ss'}{1+s^4}$ の両辺

を s で微分する．

$$\begin{aligned}2\mathrm{sl}'(2z) &= \frac{(2ss')'(1+s^4)-2ss'\cdot 4s^3s'}{(1+s^4)^2} = \frac{\{2(s')^2+2ss''\}(1+s^4)-8s^4(s')^2}{(1+s^4)^2}\\ &= \frac{\{2(1-s^4)+2s(-2s^3)\}(1+s^4)-8s^4(1-s^4)}{(1+s^4)^2}\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}'(2z) &= \frac{\{(1-s^4)+s(-2s^3)\}(1+s^4)-4s^4(1-s^4)}{(1+s^4)^2}\\ &= \frac{(1-3s^4)(1+s^4)-4s^4(1-s^4)}{(1+s^4)^2} = \frac{s^8-6s^4+1}{(1+s^4)^2}\\ &= \frac{(s^4+2s^2-1)(s^4-2s^2-1)}{(1+s^4)^2}\end{aligned}$$

こちらの方が因数分解に気付きやすい．

注意 3–2–1　$\mathrm{sl}(z)$ が重解を持つのは分岐点 $\mathrm{sl}(z)=\pm1,\ \pm i \iff z\equiv\dfrac{m}{2}\varpi+\dfrac{n}{2}\varpi i\ (m\not\equiv n \bmod 2)$ においてであるから，

$$左辺=\mathrm{sl}'(2z)=0 \iff z\equiv\frac{m}{4}\varpi+\frac{n}{4}\varpi i\ (m\not\equiv n \bmod 2)$$

がわかる．一方

$$右辺=0 \iff s=\pm\sqrt{\sqrt{2}\pm1},\ \pm\sqrt{\sqrt{2}\pm1}\,i$$

であるから，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr$ などが成り立っているはずである．（新家 (2.16)）

また，極の位置に関しても同様の説明が出来る．　（注意終）

話を元に戻す．$2+i$ 倍角公式の別の導出法は以下の通りである．

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}(2z+iz) &= \frac{\mathrm{sl}(2z)\mathrm{sl}'(iz)+\mathrm{sl}'(2z)\mathrm{sl}(iz)}{1+\mathrm{sl}^2(2z)\mathrm{sl}^2(iz)}\\ &= \frac{\dfrac{2ss'}{1+s^4}\cdot s'+\dfrac{(s^4+2s^2-1)(s^4-2s^2-1)}{(1+s^4)^2}\cdot is}{1+\left(\dfrac{2ss'}{1+s^4}\right)^2(is)^2}\\ &= \frac{2(1+s^4)s(s')^2+is(s^4+2s^2-1)(s^4-2s^2-1)}{(1+s^4)^2-4s^4(1-s^4)}\\ &= \frac{2(1+s^4)s(1-s^4)+is(s^4+2s^2-1)(s^4-2s^2-1)}{s^8+2s^4+1-4s^4+4s^8}\\ &= \frac{-s\{(2s^8-2)-i(s^8-6s^4+1)\}}{5s^8-2s^4+1} = \frac{-s\{(2-i)s^8+6is^4-(2+i)\}}{\{(2-i)s^4+i\}\{(2+i)s^4-i\}}\\ &= \frac{-s\{(2-i)s^4+i\}\{s^4-(1-2i)\}}{\{(2-i)s^4+i\}\{(2+i)s^4-i\}}\\ &= \frac{-s\{s^4-(1-2i)\}}{i\{(1-2i)s^4-1\}}\end{aligned}$$

同様に $2-i$ 倍角公式は $\mathrm{sl}(2z-iz)=\dfrac{s\{s^4-(1+2i)\}}{i\{(1+2i)s^4-1\}}$ である．これらにより次の系が直ちに従う．

系 3–2–2

(1)　$\mathcal{L}$ の $2+i$ 等分点 $\beta=\dfrac{4\varpi}{5}-\dfrac{2\varpi}{5}i$ に対して $\mathrm{sl}(\beta)=i\sqrt[4]{1-2i}$ である．（ただし 4 乗根は第 4 象限に含まれるものとする．）

(2) $\mathcal{L}$ の $2-i$ 等分点 $\alpha = \frac{4\varpi}{5} + \frac{2\varpi}{5}i$ に対して $\mathrm{sl}(\alpha) = -i\sqrt[4]{1+2i}$ である．(4 乗根は第 1 象限に含まれるものとする．)

証明

(1) $\mathrm{sl}(\beta)$ が第 1 象限に含まれることは 1 章§ 2 で調べてあるので，i は必要である．

(2) $\mathrm{sl}(\alpha)$ は第 4 象限に含まれる．

系終

§ 3 5 倍角公式

$\gamma = 1-2i, \overline{\gamma} = 1+2i$ とおく．$\gamma^2-2\gamma+5=0, \overline{\gamma} = 2-\gamma$ である．$2+i$ 倍角公式は $\mathrm{sl}\left((2+i)z\right) = \dfrac{-s(s^4-\gamma)}{i(\gamma s^4-1)}$,
$2-i$ 倍角公式は $\mathrm{sl}\left((2-i)z\right) = \dfrac{s\left(s^4-\overline{\gamma}\right)}{i\left(\overline{\gamma}s^4-1\right)}$ と表される．これらの両方を使って

$$\begin{aligned}
\mathrm{sl}(5z) &= \mathrm{sl}\left((2-i)(2+i)z\right) \\
&= \frac{\mathrm{sl}\left((2+i)z\right)\left(\mathrm{sl}^4\left((2+i)z\right)-\overline{\gamma}\right)}{i\left(\overline{\gamma}\mathrm{sl}^4\left((2+i)z\right)-1\right)} \\
&= \frac{\left\{\dfrac{-s(s^4-\gamma)}{i(\gamma s^4-1)}\right\}\left[\left\{\dfrac{-s(s^4-\gamma)}{i(\gamma s^4-1)}\right\}^4-\overline{\gamma}\right]}{i\left[\overline{\gamma}\left\{\dfrac{-s(s^4-\gamma)}{i(\gamma s^4-1)}\right\}^4-1\right]} \\
&= \frac{-s(s^4-\gamma)\left[s^4(s^4-\gamma)^4-\overline{\gamma}(\gamma s^4-1)^4\right]}{i\left[\overline{\gamma}s^4(s^4-\gamma)^4-(\gamma s^4-1)^4\right]\times i(\gamma s^4-1)} \\
&= \frac{s(s^4-\gamma)\left[s^4(s^4-\gamma)^4-\overline{\gamma}(\gamma s^4-1)^4\right]}{\left[\overline{\gamma}s^4(s^4-\gamma)^4-(\gamma s^4-1)^4\right](\gamma s^4-1)}
\end{aligned}$$

ここで $s^4 = x$ と置き換えて

$$\begin{aligned}
& s^4(s^4-\gamma)^4-\overline{\gamma}(\gamma s^4-1)^4 \\
=\ & x(x-\gamma)^4-\overline{\gamma}(\gamma x-1)^4 \\
=\ & x(x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4)-\overline{\gamma}(a^4x^4-4a^3x^3+6a^2x^2-4ax+1) \\
=\ & x^5-4ax^4+6a^2x^3-4a^3x^2+a^4x-5a^3x^4+20a^2x^3-30ax^2+20x+a-2 \\
=\ & x^5+(-5a^3-4a)x^4+26a^2x^3+(-4a^3-30a)x^2+(a^4+20)x+a-2 \\
=\ & x^5+(a+50)x^4+(52a-130)x^3+(-26a+40)x^2+(-12a+25)x+a-2 \\
=\ & (x+a-2)(x^4+52x^3-26x^2-12x+1) \\
=\ & \left(x-\overline{\gamma}\right)(x^4+52x^3-26x^2-12x+1) \\
=\ & \left(s^4-\overline{\gamma}\right)(s^{16}+52s^{12}-26s^8-12s^4+1)
\end{aligned}$$

また，この s を $\dfrac{1}{s}$ に置き換えることにより，

$$\overline{\gamma}s^4(s^4-\gamma)^4-(\gamma s^4-1)^4 = (\overline{\gamma}s^4-1)(s^{16}-12s^{12}-26s^8+52s^4+1)$$

であることもわかる．以上より

$$\mathrm{sl}(5z) = \frac{\mathrm{sl}(z)\left(\mathrm{sl}^8(z) - 2\mathrm{sl}^4(z) + 5\right)\left(\mathrm{sl}^{16}(z) + 52\mathrm{sl}^{12}(z) - 26\mathrm{sl}^8(z) - 12\mathrm{sl}^4(z) + 1\right)}{\left(5\mathrm{sl}^8(z) - 2\mathrm{sl}^4(z) + 1\right)\left(\mathrm{sl}^{16}(z) - 12\mathrm{sl}^{12}(z) - 26\mathrm{sl}^8(z) + 52\mathrm{sl}^4(z) + 1\right)}$$

が得られた．

§ 4　$x^4 + 52x^3 - 26x^2 - 12x + 1 = 0$ の因数分解

$s^{16} + 52s^{12} - 26s^8 - 12s^4 + 1 = 0$ の分解体 L は $\mathbb{Q}(i)$ 上 16 次の Abel 拡大（$\mathbb{Q}$ 上 32 次の非 Abel 拡大）であることは既に述べた．従って $s^4 = x$ とおいたとき $x^4 + 52x^3 - 26x^2 - 12x + 1 = 0$ の分解体は $\mathbb{Q}(i)$ 上 4 次の Kummer 拡大（$\mathbb{Q}$ 上 8 次または 4 次拡大）である．

4 次方程式が解の公式を持つのは対称群 S_4 が可解群であるからだが，ある 4 次方程式の分解体が 8 次または 4 次拡大である場合は 3 次拡大に対応する部分が退化してしまっていることを意味する．つまり Ferrari の公式に現れる 3 次方程式が因数分解できることを意味する．これを実際に見てみよう．

まず 4 次方程式の 3 次の係数が 0 となるように平行移動する．$y = x + 16$ とおくと

$$\begin{aligned} & x^4 + 52x^3 - 26x^2 - 12x + 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (y-16)^4 + 52(y-16)^3 - 26(y-16)^2 - 12(y-16) + 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & y^4 - 1040y^2 + 18240y - 89920 = 0 \end{aligned}$$

この 4 解を $a,\ b,\ c,\ d$ とおくと，解と係数の関係より $\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = p = -1040 \\ abc+abd+acd+bcd = -q = -18240 \\ abcd = r = -89920 \end{cases}$ が成り立つ．

ここで $e = ab+cd,\ f = ac+bd,\ g = ad+bc$ とおく．$e,\ f,\ g$ を 3 解に持つ 3 次方程式を考えよう．

$$\begin{aligned} e+f+g &= (ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc) = p = -1040, \\ &= -2^4 \cdot 5 \cdot 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ef+fg+ge &= (ab+cd)(ac+bd)+(ac+bd)(ad+bc)+(ad+bc)(ab+cd) \\ &= abc(a+b+c)+abd(a+b+d)+acd(a+c+d)+bcd(b+c+d) \\ &= -4abcd \\ &= 89920 \cdot 4, \\ &= 2^8 \cdot 5 \cdot 281, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} efg &= (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \\ &= abcd(a^2+b^2+c^2+d^2) + a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \\ &= abcd\{(a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\} + (abc+abd+acd+bcd)^2 \\ &\quad -2abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= r(0^2 - 2p) + q^2 - 2rp \\ &= q^2 - 4pr \\ &= 18240^2 - 4 \cdot (-1040) \cdot (-89920) \\ &= -41369600 \\ &= -2^{14} \cdot 5^2 \cdot 101 \end{aligned}$$

これより $e,\ f,\ g$ は 3 次方程式 $X^3+2^4\cdot5\cdot13X^2+2^8\cdot5\cdot281\cdot4x+2^{14}\cdot5^2\cdot101=0$ の 3 解であることがわかる．係数が大きくなってきたので $X=2^4Y$ とおこう，すると

$$\begin{aligned} & X^3+2^4\cdot5\cdot13X^2+2^8\cdot5\cdot281\cdot4X+2^{14}\cdot5^2\cdot101=0 \\ \iff\quad & Y^3+65Y^2+1405Y+10100=0 \\ \iff\quad & (Y+20)(Y^2+45Y+505)=0 \end{aligned}$$

ここで Y の 3 次方程式が因数分解できるのは予定通りである．これより $Y=-20,\ \dfrac{-45\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られる．つまり $e=ab+cd=-320,\ f=ac+bd=-360+8\sqrt{5},\ g=ad+bc=-360-8\sqrt{5}$ としてよい．

今度は $a+b, c+d$ の 2 数を考える．$(a+b)+(c+d)=0, (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd=f+g=-720$ が分かるので，$a+b=\pm\sqrt{720}=\pm12\sqrt{5}, c+d=\mp\sqrt{720}=\mp12\sqrt{5}$ (複号同順) である．同様にして，$a+c=\pm2\sqrt{140+2\sqrt{5}}$, $b+d=\mp2\sqrt{140+2\sqrt{5}}$（複号同順），$a+d=\pm2\sqrt{140-2\sqrt{5}}, b+c=\mp2\sqrt{140-2\sqrt{5}}$（複号同順） が得られる．

これらの符号は任意に決めてよいのではない．4 次多項式 $y^4+py^2+qy+r=(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)$ に $y=-a$ を代入すると $a^4+pa^2-qa+r=-2a(-a-b)(-a-c)(-a-d)$ つまり $-2qa=2a(a+b)(a+c)(a+d)$ $\iff$ $(a+b)(a+c)(a+d)=-q=-18240$ がわかるので，これが成り立つように決めないといけない．

$a+b=-12\sqrt{5},\ c+d=12\sqrt{5},\ a+c=-2\sqrt{170+2\sqrt{5}},\ b+d=2\sqrt{170+2\sqrt{5}},\ a+d=-2\sqrt{170-2\sqrt{5}},$ $b+c=2\sqrt{170-2\sqrt{5}}$ は適切な決め方である．この場合

$$\begin{aligned} a &= \frac{(a+b)+(a+c)-(b+c)}{2}=-6\sqrt{5}-\sqrt{170+2\sqrt{5}}-\sqrt{170-2\sqrt{5}} \\ b &= \frac{(a+b)+(b+c)-(a+c)}{2}=-6\sqrt{5}+\sqrt{170+2\sqrt{5}}+\sqrt{170-2\sqrt{5}} \\ c &= \frac{(a+c)+(b+c)-(a+b)}{2}=6\sqrt{5}-\sqrt{170+2\sqrt{5}}+\sqrt{170-2\sqrt{5}} \\ d &= \frac{(a+d)+(b+d)-(a+b)}{2}=6\sqrt{5}+\sqrt{170+2\sqrt{5}}-\sqrt{170-2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

が得られる．以上より目標の 4 次式 $x^4+52x^3-26x^2-12x+1=0$ は

$$\begin{aligned} & x^4+52x^3-26x^2-12x+1 \\ = & \left(x+13+6\sqrt{5}+\sqrt{170+2\sqrt{5}}+\sqrt{170-2\sqrt{5}}\right)\left(x+13+6\sqrt{5}-\sqrt{170+2\sqrt{5}}-\sqrt{170-2\sqrt{5}}\right) \\ \times & \left(x+13-6\sqrt{5}-\sqrt{170+2\sqrt{5}}+\sqrt{170-2\sqrt{5}}\right)\left(x+13-6\sqrt{5}+\sqrt{170+2\sqrt{5}}-\sqrt{170-2\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

と因数分解されることが分かった.

注： $\left(\sqrt{170+2\sqrt{5}}-\sqrt{170-2\sqrt{5}}\right)^2=170+2\sqrt{5}+170-2\sqrt{5}-2\sqrt{170^2-2^2\times5}=340-152\sqrt{5}$ $=4\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9$ なので，解は $s=\sqrt[4]{-13+6\sqrt{5}+2\sqrt{\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}}$ と書くことも出来る．ここで $-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ の基本単数 $\varepsilon=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の逆数であるが，何か意味があるのだろうか.

§5 結論

前§の結果より求める長さは

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}\right)=\sqrt[4]{-13+6\sqrt{5}+\sqrt{170+2\sqrt{5}}-\sqrt{170-2\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{0.759434714}=0.933517817$$

もしくは

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}\right) = \sqrt[4]{-13+6\sqrt{5}+(7-3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt[4]{0.759434714} = 0.933517817$$

これが求める長さである．ちなみに

$$\mathrm{sl}\left(\frac{4\varpi}{5}\right) = \sqrt[4]{-13+6\sqrt{5}-(7-3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt[4]{0.073381015} = 0.520470271$$

であるが，こちらは Gauss がいうところの sin.lemm 144° に相当する．他の 5 等分点の値は

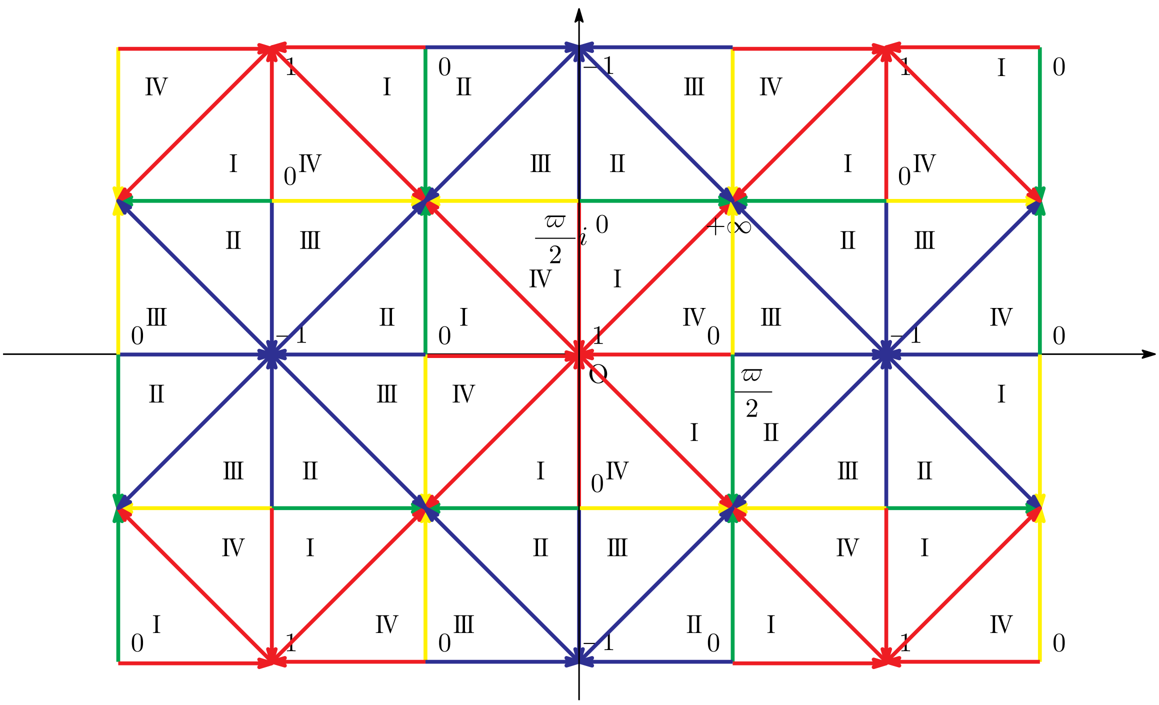
$$\mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{5}+\frac{\varpi}{5}i\right) = \sqrt[4]{-13-6\sqrt{5}+(7+3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt[4]{-0.341854512} = 0.540686257+0.540686257i$$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}+\frac{2\varpi}{5}i\right) = \sqrt[4]{-13-6\sqrt{5}-(7+3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt[4]{-52.49096122} = 1.903295118+1.903295118i$$

§ 6　5 倍角公式を使用しない $\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}\right)$ の求め方

$2+i$ 倍公式を導いた際に $\beta = \frac{4\varpi}{5} - \frac{2\varpi}{5}i$ に対して $\mathrm{sl}(\beta) = i\sqrt[4]{1-2i}$ であると述べた．（ただし 4 乗根は第 4 象限に含まれるものとする．$\mathrm{sl}(\beta)$ は第 1 象限に含まれる．）同様に $2-i$ 等分点 $\alpha = \frac{4\varpi}{5} + \frac{2\varpi}{5}i$ に対して $\mathrm{sl}(\alpha) = -i\sqrt[4]{1+2i}$ である．（4 乗根は第 1 象限に含まれるものとする．$\mathrm{sl}(\alpha)$ は第 4 象限に含まれる．）

$\mathrm{sl}(\alpha+\beta) = \mathrm{sl}\left(\frac{8\varpi}{5}\right) = -\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}\right)$ が成り立つから，その値は加法定理だけで求めることが出来るはずである．これを実行してみよう．この場合巾乗根が何象限の複素数かを注意しないといけない．実は $\mathrm{sl}'(z)$ の符号，象限は次の様になっている．（$\mathrm{sl}'(z)$ の符号，象限，および $\mathrm{sl}'(z) = \sqrt[4]{1-\mathrm{sl}^4(z)}$ に注意して考えればわかる．）



$\mathrm{sl}(\alpha) = -i\sqrt[4]{1+2i}, \mathrm{sl}(\beta) = i\sqrt[4]{1-2i}$ より

$$\mathrm{sl}'(\alpha) = \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(\alpha)} = \sqrt{1-(1+2i)} = \sqrt{-2i} = \pm(1-i)$$

$$\mathrm{sl}'(\beta) = \sqrt{1-\mathrm{sl}^4(\beta)} = \sqrt{1-(1-2i)} = \sqrt{2i} = \pm(1+i)$$

であるが，上のグラフより $\mathrm{sl}'(\alpha)$ は第 2 象限，$\mathrm{sl}'(\beta)$ は第 3 象限の複素数なので，$\mathrm{sl}'(\alpha) = -1+i, \mathrm{sl}'(\beta) = -1-i$ であることが分かる．従って

$$\begin{aligned}
\mathrm{sl}(\alpha+\beta) &= \frac{\mathrm{sl}(\alpha)\mathrm{sl}'(\beta)+\mathrm{sl}'(\alpha)\mathrm{sl}(\beta)}{1+\mathrm{sl}^2(\alpha)\mathrm{sl}^2(\beta)} \\
&= \frac{(-i\sqrt[4]{1+2i})(-1-i)+(-1+i)(i\sqrt[4]{1-2i})}{1+(-i\sqrt[4]{1+2i})^2(i\sqrt[4]{1-2i})^2} \\
&= \frac{(-1+i)\sqrt[4]{1+2i}+(-1-i)\sqrt[4]{1-2i}}{1+\sqrt{1+2i}\sqrt{1-2i}} \\
&= \frac{(-1+i)\sqrt[4]{1+2i}+(-1-i)\sqrt[4]{1-2i}}{1+\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}\right)=-\mathrm{sl}(\alpha+\beta)=\frac{(1-i)\sqrt[4]{1+2i}+(1+i)\sqrt[4]{1-2i}}{1+\sqrt{5}}$$

これが求める長さである．実際 Excel による数値計算によって $\dfrac{(1-i)\sqrt[4]{1+2i}+(1+i)\sqrt[4]{1-2i}}{1+\sqrt{5}}=0.933517817393729$ が確認できる．

§ 7　結果の一致の確認

$\mathrm{sl}\left(\dfrac{2\varpi}{5}\right)$ の表示が 2 通り得られた．そこでその一致

$$\frac{(1-i)\sqrt[4]{1+2i}+(1+i)\sqrt[4]{1-2i}}{1+\sqrt{5}}=\sqrt[4]{-13+6\sqrt{5}+(7-3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

を確認しておこう．$\sqrt{1+2i}=a+bi$ ($a,\ b$ 実数) とすると $1+2i=a^2-b^2+2abi$ なので，$a^2-b^2=1,\ ab=1 \iff a=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}},\ b=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ に留意すると $\sqrt{1+2i}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}i$ が分かる．（注：この式は $\xi^2=\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{-\dfrac{1}{\varepsilon}}$ として後々重要となる．）これより

$$\begin{aligned}
\text{左辺}^2 &= \frac{-2i\sqrt{1+2i}+2i\sqrt{1-2i}+4\sqrt[4]{5}}{6+2\sqrt{5}}\\
&= \frac{-i\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}i\right)+i\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}i\right)+2\sqrt[4]{5}}{3+\sqrt{5}}\\
&= \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}+2\sqrt[4]{5}}{3+\sqrt{5}}\\
\text{左辺}^4 &= \frac{2\sqrt{5}-2+4\sqrt{5}+4\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)\sqrt{5}}}{14+6\sqrt{5}}\\
&= \frac{3\sqrt{5}-1+2\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)\sqrt{5}}}{7+3\sqrt{5}}\\
&= \frac{\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)+2\left(7-3\sqrt{5}\right)\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)\sqrt{5}}}{\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}\\
&= \frac{-52+24\sqrt{5}+4\left(7-3\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{5}}}{4}\\
&= -13+6\sqrt{5}+\left(7-3\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

以上より確認できた．

§ 8 Gal($L/\mathbb{Q}$)

$L=\mathbb{Q}(E_5)$ は $s^{16}+52s^{12}-26s^8-12s^4+1=0$ の分解体であり，

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\simeq\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}\right\}\subset GL(2,\ \mathbf{F}_5)$$

であった．L は $\mathbb{Q}$ 上 32 次の非 Abel 拡大になっている．この拡大について考えたい．$K=\mathbb{Q}(i)$ とおく．L は虚 2 次体 K 上の 16 次の Abel 拡大になっており，$\mathrm{Gal}(L/K)\simeq(\mathbb{Z}[i]/5\mathbb{Z}[i])^\times=(\mathbb{Z}[i]/(2+i)\mathbb{Z}[i]\oplus\mathbb{Z}[i]/(2-i)\mathbb{Z}[i])^\times$ $\simeq\mathbf{F}_5{}^\times\times\mathbf{F}_5{}^\times$ である．

$\mathcal{L}$ の $2-i$ 等分点 $\alpha=\dfrac{4\varpi}{5}+\dfrac{2\varpi}{5}i$, $2+i$ 等分点 $\beta=\dfrac{4\varpi}{5}-\dfrac{2\varpi}{5}i$ をとり，$\xi=\mathrm{sl}(\alpha)$, $\eta=\mathrm{sl}(\beta)$ とおく．今まで求めてきたように $\xi=-i\sqrt[4]{1+2i}$, $\eta=i\sqrt[4]{1-2i}$ である．L は K 上 ξ および η で生成される．つまり $L=\mathbb{Q}(i,\ \xi,\ \eta)$ である．Galois 群の作用は i,ξ,η の 3 数に対する作用で決定される．

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})=G$ とおく．G の生成元 σ,τ,ρ を次の様にとろう．

$$\sigma:\begin{cases}\sigma(\xi) &= i\xi,\\ \sigma(\eta) &= \eta,\\ \sigma(i) &= i,\end{cases}\qquad \tau:\begin{cases}\tau(\xi) &= \xi,\\ \tau(\eta) &= -i\eta,\\ \tau(i) &= i,\end{cases}\qquad \rho:\begin{cases}\rho(\xi) &= \xi,\\ \rho(\eta) &= \eta,\\ \rho(i) &= -i,\end{cases}$$

$G=\langle\sigma,\ \tau,\ \rho\mid\sigma^4=\tau^4=\rho^2=e,\ \sigma\tau=\tau\sigma,\ \rho\sigma=\tau\rho,\ \rho\tau=\sigma\rho\rangle$ が σ,τ,ρ の基本関係式であり，$G=\{\sigma^l\tau^m\rho^n\mid l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ n=0,\ 1\}$ が G の全要素である．

G のすべての部分群と，その包含関係を調べた結果が以下の表である．ただし表中の部分群は位数が半分のもの，拡大群は位数が倍のものだけを載せている．(p 群の極大部分群は index が p だから，これで漏れはない．)

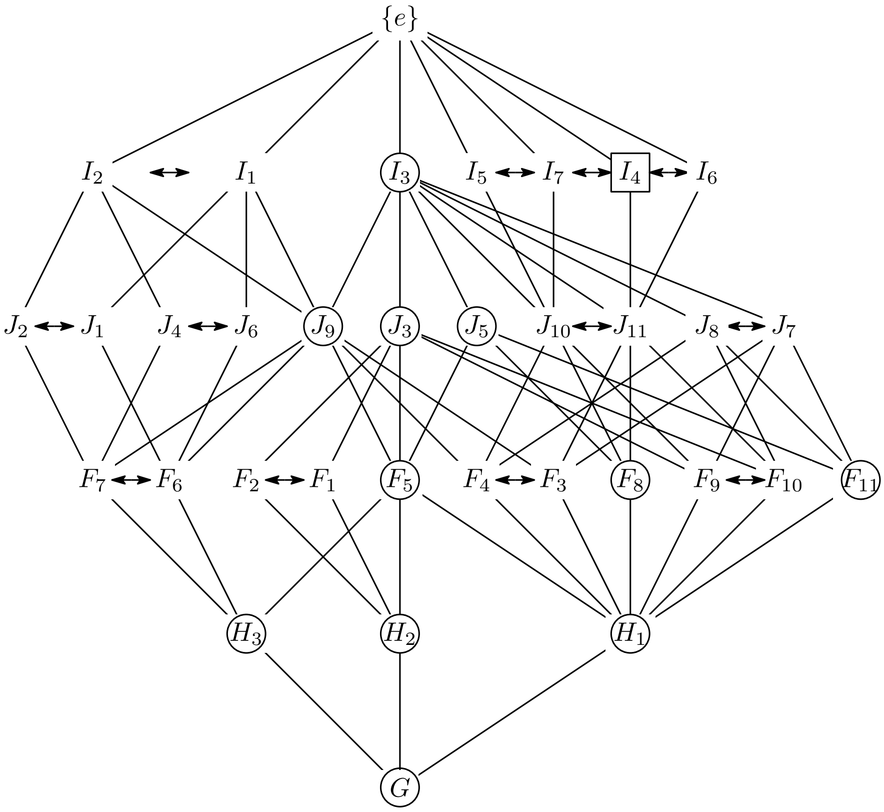
群	位数	要素	構造	部分群	拡大群	不変体
e	1	$\{e\}$			$I_1\sim I_7$	L
I_1	2	$\{e,\ \sigma^2\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	$J_1,\ J_6,\ J_9$	P_1
I_2	2	$\{e,\ \tau^2\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	$J_2,\ J_4,\ J_9$	P_2
I_3	2	$\{e,\ \sigma^2\tau^2\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	$J_3,\ J_5,\ J_7,\ J_8,\ J_9,\ J_{10},\ J_{11}$	P_3
I_4	2	$\{e,\ \rho\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	J_{11}	P_4
I_5	2	$\{e,\ \sigma^3\tau\rho\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	J_{10}	P_5
I_6	2	$\{e,\ \sigma^2\tau^2\rho\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	J_{11}	P_6
I_7	2	$\{e,\ \sigma\tau^3\rho\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{e\}$	J_{10}	P_7
J_1	4	$\{e,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_1	F_6	N_1
J_2	4	$\{e,\ \tau,\ \tau^2,\ \tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_2	F_7	N_2
J_3	4	$\{e,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_3	$F_1,\ F_2,\ F_5,\ F_9,\ F_{10}$	N_3
J_4	4	$\{e,\ \sigma^2\tau,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_2	F_7	N_4
J_5	4	$\{e,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma\tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_3	$F_5,\ F_8,\ F_{11}$	N_5
J_6	4	$\{e,\ \sigma\tau^2,\ \sigma^2,\ \sigma^3\tau^2\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_1	F_6	N_6
J_7	4	$\{e,\ \sigma^2\rho,\ \sigma^2\tau^2,\ \tau^2\rho\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_3	$F_3,\ F_9,\ F_{11}$	N_7
J_8	4	$\{e,\ \sigma\tau\rho,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau^3\rho\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	I_3	$F_4,\ F_{10},\ F_{11}$	N_8
J_9	4	$\{e,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^2,\ \tau^2\}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$I_1,\ I_2,\ I_3$	$F_3,\ F_4,\ F_5,\ F_6,\ F_7$	N_9
J_{10}	4	$\{e,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau\rho,\ \sigma\tau^3\rho\}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$I_3,\ I_5,\ I_7$	$F_4,\ F_8,\ F_9$	N_{10}
J_{11}	4	$\{e,\ \sigma^2\tau^2,\ \rho,\ \sigma^2\tau^2\rho\}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$I_3,\ I_4,\ I_6$	$F_3,\ F_8,\ F_{10}$	N_{11}

群	位数	要素	構造	部分群	拡大群	不変体
F_1	8	$\{e,\ \sigma\rho,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau\rho,$ $\sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau^2\rho,\ \sigma^3\tau^3,\ \tau^3\rho\}$	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	J_3	H_2	M_1
F_2	8	$\{e,\ \tau\rho,\ \sigma\tau,\ \sigma\tau^2\rho,$ $\sigma^2\tau^2,\ \sigma^2\tau^3\rho,\ \sigma^3\tau^3,\ \sigma^3\rho\}$	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	J_3	H_2	M_2
F_3	8	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\rho,\ \sigma^2\rho,\ \tau^2\rho,\ \sigma^2\tau^2\rho\}$	D_8	$J_7,\ J_9,\ J_{11}$	H_1	M_3
F_4	8	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\sigma\tau\rho,\ \sigma\tau^3\rho,\ \sigma^3\tau\rho,\ \sigma^3\tau^3\rho\}$	D_8	$J_8,\ J_9,\ J_{10}$	H_1	M_4
F_5	8	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\sigma\tau,\ \sigma\tau^3,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^3\tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$J_3,\ J_5,\ J_9$	$H_1,\ H_2,\ H_3$	M_5
F_6	8	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\sigma,\ \sigma^3,\ \sigma\tau^2,\ \sigma^3\tau^2\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$J_1,\ J_6,\ J_9$	H_3	M_6
F_7	8	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\tau,\ \tau^3,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^2\tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$J_2,\ J_4,\ J_9$	H_3	M_7
F_8	8	$\{e,\ \sigma\tau^3,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau,$ $\rho,\ \sigma\tau^3\rho,\ \sigma^2\tau^2\rho,\ \sigma^3\tau\rho\}$	D_8	$J_5,\ J_{10},\ J_{11}$	H_1	M_8
F_9	8	$\{e,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau^3,$ $\sigma^2\rho,\ \tau^2\rho,\ \sigma^3\tau\rho,\ \sigma\tau^3\rho\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$J_3,\ J_7,\ J_{10}$	H_1	M_9
F_{10}	8	$\{e,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau^3,$ $\rho,\ \sigma\tau\rho,\ \sigma^2\tau^2\rho,\ \sigma^3\tau^3\rho\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$J_3,\ J_8,\ J_{11}$	H_1	M_{10}
F_{11}	8	$\{e,\ \sigma\tau^3,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma^3\tau,$ $\sigma\tau\rho,\ \sigma^2\rho,\ \tau^2\rho,\ \sigma^3\tau^3\rho\}$	Q_8	$J_5,\ J_7,\ J_8$	H_1	M_{11}
H_1	16	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\sigma\tau,\ \sigma\tau^3,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^3\tau^3,$ $\rho,\ \sigma^2\rho,\ \tau^2\rho,\ \sigma^2\tau^2\rho,$ $\sigma\tau\rho,\ \sigma\tau^3\rho,\ \sigma^3\tau\rho,\ \sigma^3\tau^3\rho\}$		$F_3,\ F_4,\ F_5,\ F_8,$ $F_9,\ F_{10},\ F_{11}$	G	K_1
H_2	16	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\sigma\tau,\ \sigma\tau^3,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^3\tau^3,$ $\tau\rho,\ \tau^3\rho,\ \sigma\rho,\ \sigma\tau^2\rho,$ $\sigma^2\tau\rho,\ \sigma^2\tau^3\rho,\ \sigma^3\rho,\ \sigma^3\tau^2\rho\}$		$F_1,\ F_2,\ F_5$	G	K_2
H_3	16	$\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,$ $\sigma\tau,\ \sigma\tau^3,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^3\tau^3,$ $\sigma,\ \sigma^3,\ \sigma\tau^2,\ \sigma^3\tau^2,$ $\tau,\ \tau^3,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^2\tau^3\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$F_5,\ F_6,\ F_7$	G	K_3

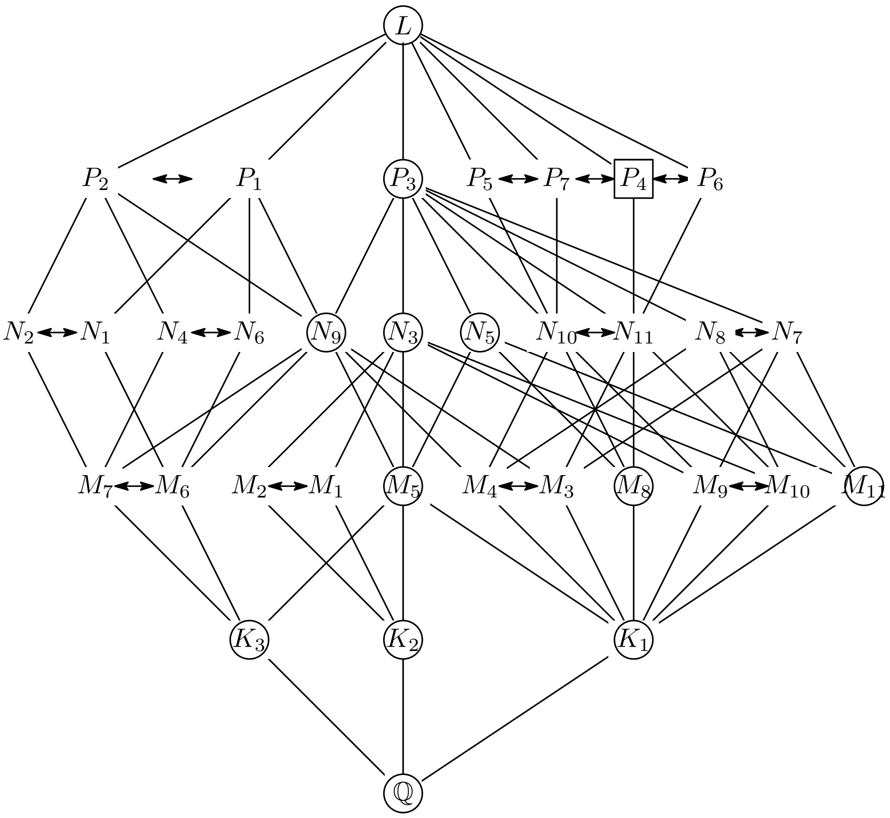
部分群のうち正規部分群は $I_3, J_3, J_5, J_9, F_5, F_8, F_{11}, H_1, H_2, H_3$ である．
I_1, I_2 が共役で，正規化群は $N(I_1) = N(I_2) = H_3$,
I_4, I_5, I_6, I_7 が共役で，正規化群は $N(I_4) = N(I_5) = N(I_6) = N(I_7) = F_8$,
J_1, J_2 が共役で，正規化群は $N(I_1) = N(I_2) = H_3$, J_4, J_6 が共役で，正規化群は $N(J_4) = N(J_6) = H_3$,
J_7, J_8 が共役で，正規化群は $N(J_7) = N(J_8) = H_1$, J_{10}, J_{11} が共役で，正規化群は $N(J_{10}) = N(J_{11}) = H_1$,
F_1, F_2 が共役で，正規化群は $N(F_1) = N(F_2) = H_2$, F_6, F_6 が共役で，正規化群は $N(F_6) = N(F_6) = H_3$,
F_3, F_4 が共役で，正規化群は $N(F_3) = N(F_4) = H_1$, F_9, F_{10} が共役で，正規化群は $N(F_9) = N(F_{10}) = H_1$

I_4 が複素共役に対応する部分群であり，対応する不変体 P_4 が最大実部分体ということになる．

群の包含関係をグラフ化したものが次である．○のついているものが正規部分群である．□のついている I_4 が，複素共役に対応する部分群である．「↔」で結ばれた群が共役の関係にある．



これを対応する不変体に置き換えたものが次のグラフである．○のついているものが $\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大体であり，□のついている P_4 が最大実拡大体である．「↔」で結ばれた体は共役の関係にある．



次は L の部分体の固定群，共役な体，生成元の表である．共役な体としては自分自身も含めている．○がついているものは $\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大である．K は $\mathbb{Q}(i)$ を表す，$\xi = -i\sqrt[4]{1+2i}$, $\eta = i\sqrt[4]{1-2i}$ であり，$\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \text{ の基本単数}\right)$ である．

体	固定群	共役な体	体の生成元
L	$\{e\}$	○	$K(\xi,\ \eta)$
P_1	I_1	P_1，P_2	$K(\xi^2,\ \eta)$
P_2	I_2	P_1，P_2	$K(\xi,\ \eta^2)$
P_3	I_3	○	$K(\xi^2,\ \eta^2,\ \xi\eta)$
P_4	I_4	P_4，P_5，P_6，P_7	$\mathbb{Q}(\mathrm{sl}(2\varpi/5))$
P_5	I_5	P_4，P_5，P_6，P_7	
P_6	I_6	P_4，P_5，P_6，P_7	$\mathbb{Q}(\mathrm{sl}(2\varpi/5)i)$
P_7	I_7	P_4，P_5，P_6，P_7	
N_1	J_1	N_1，N_2	$K(\eta)$
N_2	J_2	N_1，N_2	$K(\xi)$
N_3	J_3	○	$K(\xi\eta) = K(\sqrt[4]{5})$
N_4	J_4	N_4，N_6	$K(\xi\eta^2)$
N_5	J_5	○	$K(\xi\eta^3)$
N_6	J_6	N_4，N_6	$K(\xi^2\eta)$
N_7	J_7	N_7，N_8	
N_8	J_8	N_7，N_8	
N_9	J_9	○	$K(\sqrt{\varepsilon}) = K(\xi^2,\ \eta^2)$
N_{10}	J_{10}	N_{10}，N_{11}	
N_{11}	J_{11}	N_{10}，N_{11}	
M_1	F_1	M_1，M_2	
M_2	F_2	M_1，M_2	
M_3	F_3	M_3，M_4	$\mathbb{Q}(\xi^2+\eta^2) = \mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon})$
M_4	F_4	M_3，M_4	$\mathbb{Q}(\xi^2-\eta^2) = \mathbb{Q}(\sqrt{-\varepsilon})$
M_5	F_5	○	$K(\xi^2\eta^2) = K(\sqrt{5})$
M_6	F_6	M_6，M_7	$K(\eta^2) = K(\sqrt{1-2i})$
M_7	F_7	M_6，M_7	$K(\xi^2) = K(\sqrt{1+2i})$
M_8	F_8	○	$\mathbb{Q}(\xi^3\eta+\xi\eta^3) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)/2}\right)$
M_9	F_9	M_9，M_{10}	$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}i)$
M_{10}	F_{10}	M_9，M_{10}	$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$
M_{11}	F_{11}	○	
K_1	H_1	○	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_2	H_2	○	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$
K_3	H_3	○	$K = \mathbb{Q}(i)$

注：　$\xi^2 = -\sqrt{1+2i} = -\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{-1/\varepsilon}$, $\eta^2 = -\sqrt{1+2i} = -\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{-1/\varepsilon}$ であるから $-\xi^2 - \eta^2 = 2\sqrt{\varepsilon}$ $-\xi^2 + \eta^2 = 2\sqrt{-1/\varepsilon}$ であり，$\sigma\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = -\sqrt{-1/\varepsilon}$, $\tau\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = \sqrt{-1/\varepsilon}$ が成り立っている．

L に含まれる重要な数と，その数の生成する体，その数に対する Galois 群の作用をいくつか調べておこう．

(1) レムニスケートの 5 等分点の値

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{5}\right) &= \sqrt[4]{-13+6\sqrt{5}+(7-3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} \\ &= \frac{(1-i)\sqrt[4]{1+2i}+(1+i)\sqrt[4]{1-2i}}{1+\sqrt{5}} \\ &= -\frac{(1-i)\xi+(1+i)\eta}{1+\xi^2\eta^2}\end{aligned}$$

は実数であり，P_4 の元である．実際 Galois 群の作用から ρ 不変であることが分かるが，P_4 の唯一の極大部分体 N_{11} に含まれないことは，J_{11} の作用により $\sigma^2\tau^2\left(-\dfrac{(1-i)\xi+(1+i)\eta}{1+\xi^2\eta^2}\right)=\dfrac{(1-i)\xi+(1+i)\eta}{1+\xi^2\eta^2}$ であることから分かる．従ってつまり $\mathbb{Q}$ 上 16 次の代数的数である．

$\left(\mathrm{sl}\left(\dfrac{2\varpi}{5}\right)\right)^4=-13+6\sqrt{5}+(7-3\sqrt{5})\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ は $M_8=\mathbb{Q}(\xi^3\eta+\xi\eta^3)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)/2}\right)$ の元であり，P_4/M_8 は非 Galois 4 次拡大であるが，$P_4(i)/M_8(i)=L/N_5$ は 4 次の Kummer 拡大である．

(2) $\varepsilon=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと $\xi^2=-\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{-\dfrac{1}{\varepsilon}}$, $\eta^2=-\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{-\dfrac{1}{\varepsilon}}$, であった．ここで $\sqrt{\varepsilon}$ は実数，$\sqrt{-\dfrac{1}{\varepsilon}}$ は純虚数である．$\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=-\dfrac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$ は $\mathbb{Q}$ 上 4 次 $\left(\mathbb{Q}(\sqrt{5})\text{ 上 2 次}\right)$ の代数的整数（実数）であるが，

$$\begin{aligned}\sigma\left(\sqrt{\varepsilon}\right) &= -\frac{1}{2}(-\xi^2+\eta^2)=-\sqrt{-\frac{1}{\varepsilon}}=-\sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ \tau\left(\sqrt{\varepsilon}\right) &= -\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)=\sqrt{-\frac{1}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ \rho\left(\sqrt{\varepsilon}\right) &= -\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)=\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\end{aligned}$$

より $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ は $\mathbb{Q}$ 上 4 次の非 Galois 拡大であって，固定部分群 $F_3=\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,\ \rho,\ \sigma^2\rho,\ \tau^2\rho,\ \sigma^2\tau^2\rho\}$ は G の非正規部分群である．F_3 の正規化群は $N(F_3)=H_1=F_3\cup\sigma\tau F_3$ なので F_3 と共役な群は $F_4=\sigma F_3\sigma^{-1}(=\tau F_3\tau^{-1})=\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2,\ \sigma\tau\rho,\ \sigma\tau^3\rho,\ \sigma^3\tau\rho,\ \sigma^3\tau^3\rho\}$ だけであり，その不変体は $\mathbb{Q}\left(\sigma\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{-\dfrac{1}{\varepsilon}}\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{-\varepsilon}\right)$ である．

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ の Galois 閉包は $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\varepsilon},\ \sqrt{-\varepsilon}\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{\varepsilon},\ i\right)$ であり，その固定群 $J_9=F_3\cap F_4=\{e,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \sigma^2\tau^2\}$ は G の正規部分群である．$G/J_9=\left\langle\overline{\sigma},\ \overline{\tau},\ \overline{\rho}\mid\overline{\sigma}^2=\overline{\tau}^2=\overline{\rho}^2=e,\ \overline{\sigma}\,\overline{\tau}=\overline{\tau}\,\overline{\sigma},\ \overline{\rho}\,\overline{\sigma}=\overline{\tau}\,\overline{\rho},\ \overline{\rho}\,\overline{\tau}=\overline{\sigma}\,\overline{\rho}\right\rangle\simeq D_8$（二面体群）なので，$J_9$ の拡大群，対応する $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}},\ i\right)$ の部分体の包含関係は次の図のようになっている．

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & J_9 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
F_7 \arrow[dr] & F_6 \arrow[d] & F_5 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & F_4 \arrow[d] & F_3 \arrow[dl] \\
 & H_3 \arrow[dr] & H_2 \arrow[d] & H_1 \arrow[dl] & \\
 & & G & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & \mathbb{Q}\left(\sqrt{\varepsilon},\ i\right) \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{1+2i}\right) \arrow[dr] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{1-2i}\right) \arrow[d] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{5},\ i\right) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{-\varepsilon}\right) \arrow[d] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q}(i) \arrow[dr] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\right) \arrow[d] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) \arrow[dl] & \\
 & & \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

(3)　$\alpha = -(\xi^3\eta + \xi\eta^3) = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$ とおく．$\mathbb{Q}(\alpha) = M_8$ であり，その固定群は F_8 で, $\mathrm{Gal}(M_8/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ であった．$\mathbb{Q}$ 上 4 次の実巡回拡大は受験の題材としても貴重なので，少し見ておこう．

まず α の定義方程式であるが，$\alpha^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ より $2\alpha^2 - 5 = \sqrt{5}$, つまり $\alpha^4 - 5\alpha^2 + 5 = 0$ である．そこで M_8 が巡回拡大である事実を忘れて，$x^4 - 5x + 5 = 0$ の分解体について考えてみよう．

$x^4 - 5x + 5 = 0$ の解は $\alpha = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $\beta = -\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $\gamma = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $\delta = -\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ の 4 つであるが，$\alpha\gamma = \sqrt{\dfrac{25-5}{4}} = \sqrt{5} = 2\alpha^2 - 5$ であるから $\gamma = \dfrac{2\alpha^2 - 5}{\alpha} = \dfrac{2\alpha^2 + (\alpha^4 - 5\alpha)}{\alpha} = \alpha^3 - 3\alpha$ であることが分かる．従って $x^4 - 5x + 5 = 0$ の分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ であり，これは $\mathbb{Q}$ 上 4 次の Galois 拡大（Abel 拡大）であることがわかる．この Galois 群を決定しよう．$\sigma : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha)$ を $\sigma(\alpha) = \gamma = \alpha^3 - 3\alpha$ で定義する．このとき

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma) &= (\alpha^3 - 3\alpha)^3 - 3(\alpha^3 - 3\alpha) \\
&= \alpha^9 - 9\alpha^7 + 27\alpha^5 - 30\alpha^3 + 9\alpha \\
&= (\alpha^4 - 5\alpha^2 - 5)(\alpha^5 - 4\alpha^3 + 2\alpha) - \alpha \\
&= -\alpha = \beta
\end{aligned}$$

であることより $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ は σ を生成元とする 4 次の巡回拡大だと分かる．$\mathbb{Q}(\alpha)$ の唯一の中間体は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である．α は実数であるから $\mathbb{Q}(\alpha,\ i) = \mathbb{Q}(\alpha) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ であり，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha,\ i)/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =< \sigma,\ \rho >$ がわかる．ただし ρ は複素共役を表す．