For Tutors

MeBio　数学テキスト

1 の n 乗根の巾根表示

—$n = 11,\ 13,\ 7$—

Edited by M.Kamei

第 1 章

1 の 11 乗根の巾根表示

§ 1　問題

問題 1–1–1　　1 の虚数 11 乗根を巾根表示せよ.

解説 1–1–2　円分体は有理数体のアーベル拡大だから，巾根表示できる．それを具体的に表示せよという問題である．もちろん $\sqrt[11]{1}$ ではお話にならない．体の拡大 K/F において $K = F(\sqrt[p]{a})$ という表示は，次の条件を満たすときのみ許されるものとする．

(1)　$F \ni \zeta_p$．ここで ζ_p は 1 の虚数 p 乗根を表す．

(2)　$F \ni a$.

(3)　$x^p - a$ は $F[x]$ の既約元である．つまり $b^5 = a$ となる $b \in F$ が存在しない．

要するに K/F が p 次 Kummer 拡大になっている必要がある．（このとき $Gal(K/F) \cong \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ となっている．）

注意 1–1–3　K, F が複素数体 $\boldsymbol{C}$ に埋め込まれているときには p 乗根の取り方として偏角をどう選ぶかが問題になるが，代数的には p 乗根はすべて共役なので区別する必要はない．これはある意味面倒がないようにも思われるが，K/F が p 次 Kummmer 拡大で $K = F(\sqrt[p]{a}) = F(\sqrt[p]{b})$ $(a,\ b \in F)$ であるとき，$\sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{b}$ が K の元として何を表すのかわからなくなってしまうという問題が生じる．確定させるためには次の 2 つの方法のどちらかをとらないといけない．

(1)　K を $\boldsymbol{C}$ に埋め込んで，p 乗根の偏角を指定する．

(2)　$\sqrt[p]{b}$ を $\sqrt[p]{a}$ で表し，$\sqrt[p]{a}$ だけを使って表示する．

以下の解答では (2) の方法で解いた．そのため見た目の対称性が失われて，美しさが減じている．（だれかよい案はありませんか．）

§ 2　ζ, η, α の定義

1 の虚数 11 乗根を ζ とおく．複素数体 $\boldsymbol{C}$ に埋め込んで考えるときには $\zeta=\exp\dfrac{2\pi i}{11}=\cos\dfrac{2\pi}{11}+i\sin\dfrac{2\pi}{11}$ と思えばよい．以下では ζ 自体の巾根表示ではなく $\alpha=\zeta+\dfrac{1}{\zeta}$ $\left(=2\cos\dfrac{2\pi}{11}\right)$ の巾根表示を考える．α が巾根表示された場合には $\zeta=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ とすぐ分かる．

$Gal(\boldsymbol{Q}(\zeta)/\boldsymbol{Q})\cong(\boldsymbol{Z}/11\boldsymbol{Z})^\times\cong\boldsymbol{Z}/10\boldsymbol{Z}$ である．その部分体として $Gal(\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z}$ なので，α を巾根表示するためには $\boldsymbol{Q}$ に 1 の虚数 5 乗根を付け加えた体 F を考え，$F(\alpha)/F$ が Kummer 拡大であることを利用しなければならない．

1 の虚数 5 乗根を η とおく．複素数体 $\boldsymbol{C}$ に埋め込んで考えるときには $\eta=\exp\dfrac{2\pi i}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ と思えばよい．$\eta^4+\eta^3+\eta^2+\eta+1=0$ を背反方程式として解いて

$$\eta+\frac{1}{\eta}=2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \eta=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

と具体的に巾根表示できることに注意しておく．

§ 3　体の関係

$F=\boldsymbol{Q}(\eta)$ とする．$Gal(F/\boldsymbol{Q})\cong(\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z})^\times\cong\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ であるが，この生成元として $\tau:\eta\mapsto\eta^2$ をとることができる．$<\tau^2>$ の不変元が $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ である．

また $K=\boldsymbol{Q}(\alpha)$ とおく．$Gal(K/\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z}$ の生成元として $\sigma:\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\mapsto\zeta^2+\dfrac{1}{\zeta^2}$ をとることができる．(2 は $(\boldsymbol{Z}/11\boldsymbol{Z})^\times$ の原始根である．)

$L=KF=\boldsymbol{Q}(\alpha,\ \eta)$ とおく．$K\cap F=\boldsymbol{Q}$ なので，$Gal(L/K)=G_1, Gal(L/F)=G_2$ とおくと，$Gal(L/\boldsymbol{Q})=G_1\times G_2$ であり，$G_1=Gal(L/K)\cong Gal(F/\boldsymbol{Q})=<\tau>, G_2=Gal(L/F)\cong Gal(K/\boldsymbol{Q})=<\sigma>$ がわかる．そこで τ, σ を $Gal(L/\boldsymbol{Q})$ の元として次のように延長する．

$$\tau\colon\left\{\begin{array}{ccc}\eta & \mapsto & \eta^2\\ \zeta+\dfrac{1}{\zeta} & \mapsto & \zeta+\dfrac{1}{\zeta}\end{array}\right.,\quad \sigma\colon\left\{\begin{array}{ccc}\eta & \mapsto & \eta\\ \zeta+\dfrac{1}{\zeta} & \mapsto & \zeta^2+\dfrac{1}{\zeta^2}\end{array}\right.$$

つまり τ は K の元を固定し，σ は F の元を固定するものとする．

§ 4　β およびその共役元

L/F は Kummer 拡大なので，適当な $a\in F$ を用いて $L=F(\sqrt[5]{a})$ と表示することができる．a は通常通り次のようにすれば求められる．
$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha=\zeta+\frac{1}{\zeta}\\ \alpha_1 &= \alpha^{\sigma}=\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\\ \alpha_2 &= \alpha^{\sigma^2}=\zeta^4+\frac{1}{\zeta^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha^{\sigma^3} = \zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3} \\ \alpha_4 &= \alpha^{\sigma^4} = \zeta^5 + \frac{1}{\zeta^5}\end{aligned}$$

${\alpha_i}^\sigma = \alpha_{i+1}$ である．($\alpha_5 = \alpha_0$ とみなす．)　これら 5 つの F 上共役な元を用いて β を

$$\beta = \alpha_0 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_3\eta^3 + \alpha_4\eta^4$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}\beta^\sigma &= \alpha_1 + \alpha_2\eta + \alpha_3\eta^2 + \alpha_4\eta^3 + \alpha_0\eta^4 = \beta\eta^4 \\ \beta^{\sigma^2} &= \alpha_2 + \alpha_3\eta + \alpha_4\eta^2 + \alpha_0\eta^3 + \alpha_1\eta^4 = \beta\eta^3 \\ \beta^{\sigma^3} &= \alpha_3 + \alpha_4\eta + \alpha_0\eta^2 + \alpha_2\eta^3 + \alpha_2\eta^4 = \beta\eta^2 \\ \beta^{\sigma^4} &= \alpha_4 + \alpha_0\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_3\eta^3 + \alpha_3\eta^4 = \beta\eta\end{aligned}$$

が成り立つので，$\beta, \beta\eta, \beta\eta^2, \beta\eta^3, \beta\eta^4$ は F 上すべて共役で，すべて $x^5 - \beta^5 = 0$ の解であり，

$$N_{L/F}\beta = \beta\cdot\beta^\sigma\cdot\beta^{\sigma^2}\cdot\beta^{\sigma^3}\cdot\beta^{\sigma^4} = \beta\cdot\beta\eta^4\cdot\beta\eta^3\cdot\beta\eta^2\cdot\beta\eta = \beta^5 \in F$$

であることが分かる．従って β^5 を具体的に計算すれば，β はその元の 5 乗根として巾根表示されることになる．

§ 5　β^5 の計算

β^5 は手計算でも計算できる．そのためには次の演算規則を用意しておくと便利である．

${\alpha_0}^2 = \alpha_1 + 2$	${\alpha_1}^2 = \alpha_2 + 2$	${\alpha_2}^2 = \alpha_3 + 2$	${\alpha_3}^2 = \alpha_4 + 2$	${\alpha_4}^2 = \alpha_0 + 2$
$\alpha_0\alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_0$	$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_1$	$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_0 + \alpha_2$	$\alpha_3\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$	$\alpha_4\alpha_0 = \alpha_2 + \alpha_4$
$\alpha_0\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_1\alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_0$	$\alpha_2\alpha_4 = \alpha_0 + \alpha_1$	$\alpha_3\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_4\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$

これを使うと β^2 が次のように計算される．

$$\begin{aligned}\beta^2 &= (\alpha_0 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_3\eta^3 + \alpha_4\eta^4)^2 \\ &= \quad ({\alpha_0}^2 + 2\alpha_4\alpha_1 + 2\alpha_2\alpha_3) \\ &\quad +({\alpha_3}^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_0\alpha_1)\eta \\ &\quad +({\alpha_1}^2 + 2\alpha_0\alpha_2 + 2\alpha_3\alpha_4)\eta^2 \\ &\quad +({\alpha_4}^2 + 2\alpha_3\alpha_0 + 2\alpha_1\alpha_2)\eta^3 \\ &\quad +({\alpha_2}^2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_4\alpha_0)\eta^4 \\ &= \quad (\alpha_1 + 2 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_0 + 2\alpha_2) \\ &\quad +(\alpha_4 + 2 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_0)\eta \\ &\quad +(\alpha_2 + 2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)\eta^2 \\ &\quad +(\alpha_0 + 2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 + 2\alpha_1)\eta^3 \\ &\quad +(\alpha_3 + 2 + 2\alpha_4 + 2\alpha_0 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4)\eta^4 \\ &= (\eta^3 + 2 + 4\eta + 2\eta^4)(\alpha_0 + \alpha_1\eta^2 + \alpha_2\eta^4 + \alpha_3\eta + \alpha_4\eta^3) \\ &= (-\eta^3 - 2\eta^2 + 2\eta)(\alpha_0 + \alpha_1\eta^2 + \alpha_2\eta^4 + \alpha_3\eta + \alpha_4\eta^3) \\ &= \eta(\eta^3 + 2)(\eta^4 + 2)(\alpha_0 + \alpha_1\eta^2 + \alpha_2\eta^4 + \alpha_3\eta + \alpha_4\eta^3)\end{aligned}$$

ここで $\alpha_0+\alpha_1\eta^2+\alpha_2\eta^4+\alpha_3\eta+\alpha_4\eta^3=\beta^\tau$ である．(後の節では β_2 とかくことになる．)　また，$-\eta^3-2\eta^2+2\eta=\eta(\eta^3+2)(\eta^4+2)$ と表せることも後に説明する．結局のところ $\beta^2=\eta(\eta^3+2)(\eta^4+2)\beta_2$ が分かった．

注意：$\dfrac{{\beta_1}^2}{\beta_2}\in F$ は τ の作用を考えれば明らかである．

同様の計算により，$\beta\beta_2=\eta^2(\eta+2)(\eta^3+2)\beta_3$ が得られる．ここで $\beta_3=\beta^{\tau^2}=\alpha_0+\alpha_1\eta^3+\alpha_2\eta+\alpha_3\eta^4+\alpha_4\eta^2$ である．また，$\beta\beta_3=\eta(\eta^3+2)(\eta^4+2)\beta_4$ が得られる．ここで $\beta_4=\beta^{\tau^3}=\alpha_0+\alpha_1\eta^4+\alpha_2\eta^3+\alpha_3\eta^2+\alpha_4\eta$ である．最後に $\beta\beta_4$ を計算すると $\beta\beta_4=11$ がわかるので，

$$\beta^5=-11\eta^4(\eta+2)(\eta^3+2)^3(\eta^4+2)^2=-\eta^4(\eta+2)^2(\eta^2+2)(\eta^3+2)^4(\eta^4+2)^3$$

が得られる．

従って $\beta=\sqrt[5]{-\eta^4(\eta+2)^2(\eta^2+2)(\eta^3+2)^4(\eta^4+2)^3}$ であり $L=F\left(\sqrt[5]{-\eta^4(\eta+2)^2(\eta^2+2)(\eta^3+2)^4(\eta^4+2)^3}\right)$ である．

§ 6　$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ の定義と，α_0 の表示

前節でもふれたが，$\beta_1=\beta=\alpha_0+\alpha_1\eta+\alpha_2\eta^2+\alpha_3\eta^3+\alpha_4\eta^4$ とおき，β の K 上の共役元を次のようにおく．

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \beta^\tau=\alpha_0+\alpha_1\eta^2+\alpha_2\eta^4+\alpha_3\eta+\alpha_4\eta^3\\
\beta_3 &= \beta^{\tau^3}=\alpha_0+\alpha_1\eta^3+\alpha_2\eta+\alpha_3\eta^4+\alpha_4\eta^2\\
\beta_4 &= \beta^{\tau^2}=\alpha_0+\alpha_1\eta^4+\alpha_2\eta^3+\alpha_3\eta^2+\alpha_4\eta
\end{aligned}$$

${\beta_1}^5=-11\eta^4(\eta+2)(\eta^3+2)^3(\eta^4+2)^2$ に τ を作用させることにより次が分かる．

$$\begin{aligned}
{\beta_1}^5&=-11\eta^4(\eta^1+2)(\eta^3+2)^3(\eta^4+2)^2\\
{\beta_2}^5&=-11\eta^3(\eta^2+2)(\eta^1+2)^3(\eta^3+2)^2\\
{\beta_4}^5&=-11\eta^1(\eta^4+2)(\eta^2+2)^3(\eta^1+2)^2\\
{\beta_3}^5&=-11\eta^2(\eta^3+2)(\eta^4+2)^3(\eta^2+2)^2
\end{aligned}$$

β の共役元ではないが $\beta_0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ とおいておく．$\beta_0=-1$ であることは明らかである．
$\{\beta_i\}$ の各定義式を足すと $\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=5\alpha_0+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4)=5\alpha_0$ であることが分かる．従って，

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{5}(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)\\
&= -\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\sqrt[5]{-11\eta^4(\eta^1+2)(\eta^3+2)^3(\eta^4+2)^2}+\frac{1}{5}\sqrt[5]{-11\eta^3(\eta^2+2)(\eta^1+2)^3(\eta^3+2)^2}\\
&\quad+\frac{1}{5}\sqrt[5]{-11\eta^1(\eta^4+2)(\eta^2+2)^3(\eta^1+2)^2}+\frac{1}{5}\sqrt[5]{-11\eta^2(\eta^3+2)(\eta^4+2)^3(\eta^2+2)^2}
\end{aligned}$$

が得られる．これにより ζ_{11} が巾根で表示できたことになり，問題は解決したといってもよい．ただしこの表記では各 5 乗根がどのような関係にあるのかが分からないので，完全な解決ではない．

§ 7　β の具体的な表示

$\beta^5 = {\beta_1}^5 = -11\eta^4(\eta+2)(\eta^3+2)^3(\eta^4+2)^2$ を展開すると ${\beta_1}^5 = -11(10\eta^3 - 15\eta^2 + 20\eta + 26)$ となる．これと $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ 上共役な元は ${\beta_4}^5 = -11\eta(\eta^4+2)(\eta^2+2)^3(\eta+2)^2 = -11(10\eta^2 - 15\eta^3 + 20\eta^4 + 26)$ である．

$$\begin{aligned}
{\beta_1}^5 + {\beta_4}^5 &= -11\left\{-5(\eta^2+\eta^3) + 20(\eta+\eta^4) + 52\right\} = -\frac{11}{2}(89 + 25\sqrt{5}) \\
{\beta_1}^5{\beta_4}^5 &= 11^5
\end{aligned}$$

より解の公式を用いて

$$ {\beta_1}^5 = -\frac{11}{4}\left\{89 + 25\sqrt{5} \pm 5\sqrt{178\sqrt{5} - 410}\right\} $$

が得られる．このようにして

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{178\sqrt{5} - 410}\right\}} \\
\beta_2 &= \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-178\sqrt{5} - 410}\right\}} \\
\beta_3 &= \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-178\sqrt{5} - 410}\right\}} \\
\beta_4 &= \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{178\sqrt{5} - 410}\right\}}
\end{aligned}$$

が得られる．従って

$$ \alpha = 2\cos\frac{2\pi}{11} \quad = \quad \frac{1}{5}\left[\begin{array}{l}
-1 + \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{178\sqrt{5} - 410}\right\}} \\
+ \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-178\sqrt{5} - 410}\right\}} \\
+ \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-178\sqrt{5} - 410}\right\}} \\
+ \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{178\sqrt{5} - 410}\right\}}
\end{array}\right] $$

と表すことができる．

§ 8　紛れのない α の表示

節 3 の結果より，$\beta_2, \beta_3, \beta_4$ を次のように β_1 で表すことができる．

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{1}{\eta(\eta^3+2)(\eta^4+2)}{\beta_1}^2 = \frac{\eta^4(\eta+2)(\eta^2+2)}{11}{\beta_1}^2 \\
\beta_3 &= \frac{1}{\eta^2(\eta+2)(\eta^3+2)}\beta_1\beta_2 = \frac{\eta^2(\eta+2)(\eta^2+2)^2(\eta^4+2)}{121}{\beta_1}^3 \\
\beta_4 &= \frac{1}{\eta(\eta^3+2)(\eta^4+2)}\beta_1\beta_3 = \frac{\eta(\eta+2)^2(\eta^2+2)^3(\eta^4+2)}{1331}{\beta_1}^4
\end{aligned}$$

ここで分母の有理化のために，$N_{F/\boldsymbol{Q}}(\eta+2)=(\eta+2)(\eta^2+2)(\eta^3+2)(\eta^4+2)=11$ の関係式を用いている．

これを用いて

$$\alpha=\frac{1}{5}\left\{-1+\beta+\frac{\eta^4(\eta+2)(\eta^2+2)}{11}\beta^2+\frac{\eta^2(\eta+2)(\eta^2+2)^2(\eta^4+2)}{121}\beta^3+\frac{\eta(\eta+2)^2(\eta^2+2)^3(\eta^4+2)}{1331}\beta^4\right\}$$

$$\text{ただし，}\beta=\sqrt[5]{-\eta^4(\eta+2)^2(\eta^2+2)(\eta^3+2)^4(\eta^4+2)^3},\ \ \eta=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

と表しておけば，巾根の選び方の問題はなくなる．ただ表示としては余り美しい感じがしないかもしれない．

§ 9　計算に役立ついくつかの事実

(1)　$\boldsymbol{Q}$ の素イデアル (11) は $F/\boldsymbol{Q}$ では完全分解し，$K/\boldsymbol{Q}$ では完全分岐する．

(2)　F も K も類数は 1 である．

F における 11 の素イデアルが $(\eta-3,\ 11)$, $(\eta-4,\ 11)$, $(\eta-5,\ 11)$, $(\eta-9,\ 11)$ であることはすぐに分かるが，これらは単項なので，生成元を見つけておきたい．適当な単項イデアルのノルムをいくつか計算してみると $(\eta-9,\ 11)=(\eta+2)$ であることがすぐに分かる．後はこの共役イデアルを考えれば，$(\eta-3,\ 11)=(\eta^2+2)$, $(\eta-4,\ 11)=(\eta^3+2)$, $(\eta-5,\ 11)=(\eta^4+2)$ が得られる．

この結果を用いると，例えば節 4 で表れた $-\eta^3-2\eta^2+2\eta$ は，$N_{F/\boldsymbol{Q}}(-\eta^3-2\eta^2+2\eta)=11^2$ であることからイデアルとして $(-\eta^3-2\eta^2+2\eta)=(\eta-4,\ 11)(\eta-5,11)=(\eta^3+2)(\eta^4+2)$ であることが分かり，数として $-\eta^3-2\eta^2+2\eta=\eta(\eta^3+2)(\eta^4+2)$ と素因数分解できることに気付く．

§ 10　$\boldsymbol{C}$ に埋め込んでの数値計算

$\xi = \exp\dfrac{2\pi i}{55} = \cos\dfrac{2\pi}{55} + i\sin\dfrac{2\pi}{55}$ とおく．$\zeta = \xi^5$, $\eta = \xi^{11}$ である．

$$\begin{aligned}
\beta &= \alpha_0 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_3\eta^3 + \alpha_4\eta^4 \\
&= \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\eta + \left(\zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4}\right)\eta^2 + \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right)\eta^3 + \left(\zeta^5 + \frac{1}{\zeta^5}\right)\eta^4 \\
&= (\xi^5 + \xi^{-5}) + (\xi^{10} + \xi^{-10})\xi^{11} + (\xi^{20} + \xi^{-20})\xi^{22} + (\xi^{15} + \xi^{-15})\xi^{33} + (\xi^{25} + \xi^{-25})\xi^{44} \\
&= \xi^5 + \xi^{50} + \xi^{21} + \xi + \xi^{42} + \xi^2 + \xi^{48} + \xi^{18} + \xi^{14} + \xi^{19} \\
&= 2.636105564 + 2.012696563i = 3.31662479\exp(0.652092452i)
\end{aligned}$$

これの巾乗は

$$\begin{array}{lllll}
\beta^2 &= +2.898105093 & +10.61136122i &=& 11\exp(1.304184904i) \\
\beta^3 &= -13.71773929 & +33.80567451i &=& 36.48287269\exp(1.956277356i) \\
\beta^4 &= -104.2019737 & +61.50567996i &=& 121\exp(2.608369808i) \\
\beta^5 &= -398.4796735 & -47.5914892i &=& 401.3115996\exp(-3.022723047i)
\end{array}$$

ちなみに $\beta^5 = -\dfrac{11}{4}\left\{89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{178\sqrt{5} - 410}\right\}$ として数値計算しても同じ値が得られる．

同様にして

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \alpha_0 + \alpha_1\eta^2 + \alpha_2\eta^4 + \alpha_3\eta + \alpha_4\eta^3 \\
&= \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\eta^2 + \left(\zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4}\right)\eta^4 + \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right)\eta + \left(\zeta^5 + \frac{1}{\zeta^5}\right)\eta^3 \\
&= (\xi^5 + \xi^{-5}) + (\xi^{10} + \xi^{-10})\xi^{22} + (\xi^{20} + \xi^{-20})\xi^{44} + (\xi^{15} + \xi^{-15})\xi^{11} + (\xi^{25} + \xi^{-25})\xi^{33} \\
&= \xi^5 + \xi^{50} + \xi^{32} + \xi^{12} + \xi^9 + \xi^{24} + \xi^{26} + \xi^{51} + \xi^3 + \xi^8 \\
&= 2.0701621 + 2.591221504i = 3.31662479\exp(0.896718175i) \\
{\beta_2}^5 &= -91.02032655 - 390.8532975i = 401.3115996\exp(-1.799594433i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \alpha_0 + \alpha_1\eta^3 + \alpha_2\eta + \alpha_3\eta^4 + \alpha_4\eta^2 \\
&= \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\eta^3 + \left(\zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4}\right)\eta + \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right)\eta^4 + \left(\zeta^5 + \frac{1}{\zeta^5}\right)\eta^2 \\
&= (\xi^5 + \xi^{-5}) + (\xi^{10} + \xi^{-10})\xi^{33} + (\xi^{20} + \xi^{-20})\xi^{11} + (\xi^{15} + \xi^{-15})\xi^{44} + (\xi^{25} + \xi^{-25})\xi^{22} \\
&= \xi^5 + \xi^{50} + \xi^{43} + \xi^{23} + \xi^{31} + \xi^{46} + \xi^4 + \xi^{29} + \xi^{47} + \xi^{52} \\
&= 2.0701621 - 2.591221504i = 3.31662479\exp(-0.896718175i) \\
{\beta_3}^5 &= -91.02032655 + 390.8532975i = 401.3115996\exp(1.799594433i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \alpha_0 + \alpha_1\eta^4 + \alpha_2\eta^3 + \alpha_3\eta^2 + \alpha_4\eta \\
&= \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\eta^4 + \left(\zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4}\right)\eta^3 + \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right)\eta^2 + \left(\zeta^5 + \frac{1}{\zeta^5}\right)\eta \\
&= (\xi^5 + \xi^{-5}) + (\xi^{10} + \xi^{-10})\xi^{44} + (\xi^{20} + \xi^{-20})\xi^{33} + (\xi^{15} + \xi^{-15})\xi^{22} + (\xi^{25} + \xi^{-25})\xi^{11}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi^5+\xi^{50}+\xi^{54}+\xi^{34}+\xi^{53}+\xi^{13}+\xi^{37}+\xi^{7}+\xi^{36}+\xi^{41} \\
&= 2.636105564-2.012696563i = 3.31662479\exp(-0.652092452i) \\
{\beta_4}^5 &= -398.4796735+47.5914892i = 401.3115996\exp(3.022723047i)
\end{aligned}
$$

以上より $\dfrac{1}{5}(-1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)=1.682507066$ で，これは $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$ に一致する．

繰り返すようだが，

$$
\begin{aligned}
\beta &= \sqrt[5]{-\frac{11}{4}\left\{89+25\sqrt{5}+5\sqrt{178\sqrt{5}-410}\right\}} \\
&= \sqrt[5]{-398.4796735-47.5914892i} \\
&= 2.636105564+2.012696563i \\
&= 3.31662479\exp(0.652092452i)
\end{aligned}
$$

における偏角の選び方（もしくは β_1 と β_2 の偏角の整合の取り方）をどう考えればよいのだろうか.

なお，本稿では ${\beta_1}^5=-11(26+20\eta-15\eta^2+10\eta^3)=11(6\eta+41\eta^2+16\eta^3+26\eta^4)$ となることを代数的に計算して求めたが，数値計算により次のように求めることもできる．

${\beta_1}^5=b_1\eta+b_2\eta^2+b_3\eta^3+b_4\eta^4$ とおく．各 b_i は有理整数である．${\beta_1}^5=-398.4796735-47.5914892i$ などは分かっている．これらの式を次のように足し合わせる．

$$
\begin{array}{lcllcl}
{\beta_1}^5 &=& b_1\eta+b_2\eta^2+b_3\eta^3+b_4\eta^4 &=& -398.4796735-47.5914892i \\
{\beta_2}^5 &=& b_1\eta^2+b_2\eta^4+b_3\eta+b_4\eta^3 &=& -91.02032655-390.8532975i \\
{\beta_3}^5 &=& b_1\eta^3+b_2\eta^1+b_3\eta^4+b_4\eta^2 &=& -91.02032655+390.8532975i \\
{\beta_4}^5 &=& b_1\eta^4+b_2\eta^3+b_3\eta^2+b_4\eta &=& -398.4796735+47.5914892i \\
\text{合計} &=& -b_1-b_2-b_3-b_4 &=& -979\quad(=-\mathrm{A})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcllcl}
{\beta_1}^5\eta^4 &=& b_1+b_2\eta+b_3\eta^2+b_4\eta^3 &=& -168.3991869+364.2701111i \\
{\beta_2}^5\eta^3 &=& b_1+b_2\eta^2+b_3\eta^4+b_4\eta &=& -156.1008131+369.7073656i \\
{\beta_3}^5\eta^2 &=& b_1+b_2\eta^3+b_3\eta+b_4\eta^4 &=& -156.1008131-369.7073656i \\
{\beta_4}^5\eta &=& b_1+b_2\eta^4+b_3\eta^3+b_4\eta^2 &=& -168.3991869-364.2701111i \\
(\mathrm{A}) &=& b_1+b_2+b_3+b_4 &=& 979 \\
\text{合計} &=& 5b_1 &=& 330
\end{array}
$$

従って $b_1=66$ である．b_2，b_3，b_4 も同様にする．

第 2 章

1 の 13 乗根の巾根表示

§ 1　問題

問題 2–1–1　　1 の虚数 13 乗根を巾根表示せよ．

§ 2　ζ, ω, α, β の定義

1 の虚数 13 乗根を ζ とおく．複素数体 $\boldsymbol{C}$ に埋め込んで考えるときには $\zeta = \exp\dfrac{2\pi i}{13} = \cos\dfrac{2\pi}{13} + i\sin\dfrac{2\pi}{13}$ と思えばよい．以下では ζ 自体の巾根表示ではなく $\beta = \zeta + \dfrac{1}{\zeta}$ $\left(= 2\cos\dfrac{2\pi}{13}\right)$ の巾根表示を考える．β が巾根表示された場合には $\zeta = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}$ とすぐ分かる．

$Gal(\boldsymbol{Q}(\zeta)/\boldsymbol{Q}) \cong (\boldsymbol{Z}/13\boldsymbol{Z})^{\times} \cong \boldsymbol{Z}/12\boldsymbol{Z}$ である．その部分体として $Gal(\boldsymbol{Q}(\beta)/\boldsymbol{Q}) \cong \boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z}$ なので，β を巾根表示するためには $\boldsymbol{Q}$ に 1 の虚数 3 乗根 ω $\left(\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ を付け加えた体 F を考え，$F(\beta)/F$ の中間体 K で K/F が 3 次拡大であるものを考えればよい．

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を次のように定義する．$K = F(\alpha_1) = F(\alpha_2) = F(\alpha_3)$ である．

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 &=& \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^5 + \zeta^{-5} \\
\alpha_2 &=& \zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta^3 + \zeta^{-3} \\
\alpha_3 &=& \zeta^4 + \zeta^{-4} + \zeta^6 + \zeta^{-6}
\end{array}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1$ である．また，次の計算規則がすぐに確かめられる．

$$\begin{array}{lll}
{\alpha_1}^2 = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 4 & {\alpha_2}^2 = \alpha_3 + 2\alpha_1 + 4 & {\alpha_3}^2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4 \\
\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 - 1 & \alpha_2\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_1 = \alpha_3 - 1 & \alpha_3\alpha_1 = \alpha_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - 1
\end{array}$$

これらより，次がわかる．

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &=& -1 \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 &=& -4 \\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 &=& -1
\end{array}$$

解と係数の関係より $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ の 3 解である．${\alpha_1}^3 + {\alpha_1}^2 - 4\alpha_1 + 1 = 0$ を直接確かめるのもたやすい．

カルダノの公式を使うと $x^3+x^2-4x+1=0$ の 3 解が次のように表示される．

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\right\}, \\ &\quad -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\omega^2\right\}, \\ &\quad -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega^2+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\omega\right\} \end{aligned}$$

ただし 3 乗根の偏角は $-\frac{\pi}{3} < \arg < \frac{\pi}{3}$ となるようにとるものとする．

§ 3　数値計算

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ なので

$$13(3\omega+4) = \frac{65}{2}+\frac{39\sqrt{3}}{2}i = 32.5+33.77499075i = 46.87216658\exp(0.804633677i)$$

である．偏角の絶対値を最小にするように 3 乗根をとると

$$\sqrt[3]{13(3\omega+4)} = 3.476640113+0.955496479i = 3.605551275\exp(0.268211226)$$

となる．他の 3 乗根は

$$\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega = -2.565804281+2.533110418i = 3.605551275\exp(2.362606328)$$

$$\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega^2 = -0.910835832-3.488606898i = 3.605551275\exp(4.45700143)$$

の 2 つである．従って

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\right\} &= -2.651093409, \\ -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\omega^2\right\} &= 1.377202854, \\ -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega^2+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\omega\right\} &= 0.273890555 \end{aligned}$$

がわかる．

一方

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \zeta+\zeta^{-1}+\zeta^5+\zeta^{-5} &&= 2\cos\frac{2\pi}{13}+2\cos\frac{10\pi}{13} &&= 0.273890555 \\ \alpha_2 &= \zeta^2+\zeta^{-2}+\zeta^3+\zeta^{-3} &&= 2\cos\frac{4\pi}{13}+2\cos\frac{6\pi}{13} &&= 1.377202854 \\ \alpha_3 &= \zeta^4+\zeta^{-4}+\zeta^6+\zeta^{-6} &&= 2\cos\frac{8\pi}{13}+2\cos\frac{12\pi}{13} &&= -2.651093409 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \zeta+\zeta^{-1}+\zeta^5+\zeta^{-5} &&= -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega^2+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\omega\right\} \\ \alpha_2 &= \zeta^2+\zeta^{-2}+\zeta^3+\zeta^{-3} &&= -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}\omega+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\omega^2\right\} \\ \alpha_3 &= \zeta^4+\zeta^{-4}+\zeta^6+\zeta^{-6} &&= -\frac{1}{3}\left\{1+\sqrt[3]{13(3\omega+4)}+\sqrt[3]{13(3\omega^2+4)}\right\} \end{aligned}$$

という対応が付く．

§ 4　β の計算

$\beta_1 = \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\dfrac{2\pi}{13}$, $\beta_2 = \zeta^5 + \zeta^{-5} = 2\cos\dfrac{10\pi}{13}$ とおく．

$$\beta_1 + \beta_2 = \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^5 + \zeta^{-5} = \alpha_1$$
$$\beta_1\beta_2 = (\zeta + \zeta^{-1})(\zeta^5 + \zeta^{-5}) = \zeta^4 + \zeta^{-4} + \zeta^6 + \zeta^{-6} = \alpha_3$$

であるから $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1 \pm \sqrt{{\alpha_1}^2 - 4\alpha_3}}{2}$ と表せるが，11 乗根の場合と同様 α_1 と α_3 の対応に微妙なところがあるので α_1 だけで表しておこう．

計算規則のところで $\alpha_3\alpha_1 = \alpha_1 - 1$ が得られていたので，$\alpha_3 = \dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} = 1 - \dfrac{1}{\alpha_1}$ である．一方 ${\alpha_1}^3 + {\alpha_1}^2 - 4\alpha_1 + 1 = 0$ より ${\alpha_1}^2 + \alpha_1 - 4 + \dfrac{1}{\alpha_1} = 0$ がわかる．従って $\alpha_3 = {\alpha_1}^2 + \alpha_1 - 3$ である．

これを使うと $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1 \pm \sqrt{-3{\alpha_1}^2 - 4\alpha_1 + 12}}{2}$ となる．数値計算により複号はプラスと決まる．

§ 5　結論

まとめると次のようになる．（偏角を最小になるようにとる約束をなくし，先程と表示を少し変えている．）

$$\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{10\pi}{13} = -\frac{1}{3}\left\{1 + \sqrt[3]{\frac{13}{2}(5+3\sqrt{3}i)} + \sqrt[3]{\frac{13}{2}(5-3\sqrt{3}i)}\right\}$$

ただし，$\sqrt[3]{\dfrac{13}{2}(5+3\sqrt{3}i)} = -0.910835832{-}3.488606898i = 3.605551275\exp(4.45700143i)$ とし，$\sqrt[3]{\dfrac{13}{2}(5-3\sqrt{3}i)}$ はその複素共役となるようにとる．（ $\alpha = 0.273891$ である．）

この α を用いて $\cos\dfrac{2\pi}{13}$ が次のように表される．

$$\cos\frac{2\pi}{13} = \frac{\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 - 4\alpha + 12}}{4}$$

第 3 章

1 の 7 乗根の巾根表示

§ 1　結論だけ

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{6}\left\{-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3\sqrt{3}i)} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-3\sqrt{3}i)}\right\}$$